COURS DE LICENCE 3IÈME ANNÉE 2014–15
STRUCTURES ALGÉBRIQUES UE: ENSMI6UX

TD1. Définition de groupe, sous–groupe etc.

Exercice 1 (Loi de composition interne).

(1) Sur $\mathbb{R}$, on définit la loi de composition interne $*$: $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, x*y = x+y-xy$. Etudier les propriétés de la loi $*$.
(2) Sur $\mathbb{R}$, on définit la loi $\square$: $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, x\square y = kxy + k'(x+y)$, avec k et k' deux réels donnés. Déterminer (k,k') pour que $\square$ soit associative.

Exercice 2 (Un groupe fini d'ordre 4).

Soient les quatre applications de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$:

$$f_1(z) = z\ ,\ f_2(z) = \frac{1}{z}\ ,\ f_3(z) = -z\ ,\ f_4(z) = -\frac{1}{z}$$

Montrer que $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est un groupe pour la loi $\circ$. Est–il cyclique?

Exercice 3 (Tous les éléments sont réguliers).

Soit E un ensemble fini muni d'une loi de composition interne $\star$ associative. On suppose que tous les éléments de E sont réguliers ($\forall x,y,z \in E, x*y = x*z \implies y = z$ et $x*z = y*z \implies x = y$) et on fixe $a \in E$.

(1) Démontrer qu'il existe $e \in E$ tel que $a \star e = a$.
(2) Démontrer que, pour tout $x \in E$, on a $e \star x = x$.
(3) Démontrer que, pour tout $x \in E$, on a $x \star e = x$.
(4) Démontrer que $(E,\star)$ est un groupe.
(5) Le résultat subsiste-t-il si E n'est pas fini ?

Exercice 4 (Exemples de sous-groupes).

Soit $(G,\cdot)$ un groupe. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-groupes de G.

(1) $Z(G) = \{x \in G | \forall y \in G, x\cdot y = y \cdot x\}$. ($Z(G)$ s'appelle le centre de G.)
(2) $aHa^{-1} = \{x \in G | \exists h \in H, x = a\cdot h \cdot a^{-1}\}$ avec H un sous-groupe de G.

Exercice 5 (Groupe produit).

Soit $(G,\star)$ et $(H,\square)$ deux groupes. On définit sur $G\times H$ la loi $\circ$ définie par :

$$(x,y)\circ(x',y') = (x\star x', y\square y')$$

(1) Montrer que $(G\times H,\circ)$ est un groupe.
(2) Si G est d'ordre 2, dresser la table de $G\times G$.

Exercice 6 (Groupes de rotations du plan).

(1) Soit ABC un triangle équilatéral du plan. Déterminer l'ensemble des rotations laissant invariant $\{A,B,C\}$. Montrer que c'est un groupe pour la loi $\circ$.
(2) Faire de même pour un carré $ABCD$.

Exercice 7 (Produit de deux sous-groupes).

Soit $(G,\cdot)$ un groupe et A, B deux sous-groupes. On note $A\cdot B = \{a\cdot b | a \in A, b \in B\}$.

(1) Montrer que $A\cdot B$ est un sous-groupe de G si et seulement si $A\cdot B = B \cdot A$.
(2) On suppose que A et B sont finis et que $A\cap B = \{e\}$. Montrer que $A\cdot B$ est fini et que $|A\cdot B| = |A|\times|B|$.

Exercice 8 (Image réciproque, image directe de sous-groupe).

Soient $(G,\cdot)$ et $(G',\cdot)$ des groupes et $f \in \mathrm{Hom}(G,G')$.

(1) Montrer : H' est un sous-groupe de G' $\implies$ $f^{-1}\{H'\}$ est un sous-groupe de G.
(2) Montrer : H est un sous-groupe de G $\implies$ $f(H)$ est un sous-groupe de G'.
(3) Retrouver que $\mathrm{Ker}f$ et $\mathrm{Im}f$ sont des sous-groupes de G et G'.

Date: January 16, 2015.

Exercice 9 (Loi Δ)**.**
Soit E un ensemble et $G = \mathcal{P}(E) = \{A \subset E\}$ l'ensemble des parties de E. On rappelle que si $A, B \in G$, la différence symétrique est $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

(1) Montrer que (G, Δ) est un groupe commutatif.
(2) Pour $a \in E$ on définit $\phi_a : G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par $\phi_a(X) = \begin{cases} 0 \text{ si } a \notin X \\ 1 \text{ si } a \in X \end{cases}$.
Montrer que ϕ_a est un morphisme de groupes de (G, Δ) vers $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
(3) On prends $E = \{1, \ldots, n\}$ et on note
$$\begin{aligned} \Phi : G &\longrightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \\ X &\longmapsto (\phi_1(X), \ldots, \phi_n(X)). \end{aligned}$$
Montrer que ϕ est un Isomorphisme de groupes

Exercice 10 (Endomorphismes d'ensembles de nombres)**.**

(1) Trouver tous les endomorphismes et les automorphismes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$.
(2) Trouver tous les endomorphismes du groupe $(\mathbb{Q}, +)$.
(3) Trouver tous les endomorphismes continus du groupe $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 11 (Vrai ou Faux)**.**

(1) Les sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$ sont infinis.
(2) Soit l'application
$$\begin{aligned} f : G &\to G \\ x &\mapsto x^{-1} \end{aligned}$$
(a) f est un morphisme de groupe.
(b) f est bijective.
(c) $\{f^n | n \in \mathbb{Z}\}$ est un groupe fini.
(3) La réunion de deux sous-groupes n'est jamais un sous-groupe
(4) L'application
$$\begin{aligned} (\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +) &\longrightarrow (\mathbb{R}, +) \\ f &\longmapsto f(0) \end{aligned}$$
est un morphisme de groupe ? l'application est-elle injective ?

Exercice 12 (Petit théorème de Lagrange)**.**
Soit $(G, \cdot)$ un groupe commutatif fini et $g \in G$. Montrer que l'ordre de g divise le cardinal de G. On pourra considérer $\prod_{h \in G}(gh)$.

Exercice 13 (Ordre d'un élément)**.**

(1) Soient G, H deux groupes et $f \in \mathrm{Hom}(G, H)$. Soit $x \in G$. Comparer l'ordre de x et de $f(x)$.
(2) Soient $x, g \in G$. Comparer l'ordre de x et de gxg^{-1}.
(3) Soient $a, b \in G$. Comparer l'ordre de ab et de ba.

Exercice 14 (Ordre de ab)**.**
Soit $x, y \in G$ tels que x est d'ordre a et y est d'ordre b avec $a \wedge b = 1$. De plus $xy = yx$.

Déterminer l'ordre de ab.

Exercice 15 (Pas de sous-groupe)**.**
Soit G un groupe n'ayant pas de sous-groupe non-trivial.

(1) Montrer que G est monogène (cyclique).
(2) Montrer que G est fini.
(3) Montrer que —G— est un nombre premier.