L3, STRUCTURES ALGÉBRIQUES UE: ENSMI6UX 2014–15

TD3. Le groupe symétriqué S_n

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_5$ est la permutation $\sigma(1) = 5$, $\sigma(2) = 4$, $\sigma(3) = 2$, $\sigma(4) = 1$, $\sigma(5) = 3$.
Si $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ alors $\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ (on applique σ après τ).

Exercice 1. Soient $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer $\tau\sigma$, $\tau\rho$, $\rho\tau$ et $\rho\tau\sigma$.

Exercice 2. a) Décrire les orbites de σ, τ, ρ et des produits de l'exercice 1 (dans E_5).

b) Décomposer en produits de cycles à support disjoints, puis en produits de transpositions les permutations de a).

c) Dans E_{10}, décrire les orbites des permutations suivantes, et décomposer (dans S_{10}) en produits de cycles à support disjoints, puis en produits de transpositions :
$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 4 & 5 & 1 & 2 & 7 & 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ et $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 8 & 1 & 3 & 9 & 10 & 5 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

d) Etant donnée $\sigma \in S_n$, vérifier que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\{1, 2, \ldots, n\}$ par $\mathcal{R}_\sigma$ ci-dessus est une relation d'équivalence. Si on obtient p classes d'au moins 2 éléments, alors σ s'écrit comme un produit de p cycles.

e) Vérifier que les cycles disjoints commutent: $\operatorname{supp}(\alpha) \cap \operatorname{supp}(\beta) = \emptyset \implies \alpha\beta = \beta\alpha$.

Exercice 3. Soit $\sigma \in S_n$. On considère sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints $\sigma = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdots \gamma_p$. Soit k_r l'ordre du cycle γ_r, pour $1 \leq r \leq p$, c'est à dire le plus petit nombre positif tel que $(\gamma_r)^{k_r} = Id$.

a) Soit $m \geq 2$, tel que $\sigma^m = Id$. Montrer que m est un multiple commun des ordres $k_1, ..., k_p$. En déduire que l'ordre de σ est égal au ppcm des ordres $k_1, ..., k_p$.

b) Caractériser les permutations d'ordre 3.

c) Dans cette question $n = 5$.

(i) Quels sont les ordres des éléments $(1\,2)(3\,4\,5)$ et $(3\,4\,5)(1\,2\,3\,4\,5)$?

(ii) Démontrer qu'il n'y a pas dans S_5 d'élément d'ordre 15.

d) Déterminer les ordres des éléments de S_6 et S_7.

e) Déterminer l'ordre maximal d'un élément de S_n, pour $n = 8, 9, 10$; et dans S_n?

Exercice 4. a) Vérifier que $(a_1\,a_2\,a_3 \ldots a_n) = (a_1\,a_n)(a_1\,a_{n-1})(a_1\,a_{n-2}) \ldots (a_1\,a_3)(a_1\,a_2)$.
b) Montrer que les transpositions $(j, j+1)$, $j = 1, \ldots, n-1$ engendrent S_n (c.-à-d. tout élément de S_n s'écrit comme produit de ces transpositions), mais qu'aucun sous–ensemble propre n'engendre S_n.
c) Montrer qu'ensemble, une transposition $(1\,2)$ avec un n–cycle $(1\,2\,3 \ldots\, n)$ engendrent S_n.
d) Montrer que le centre du groupe S_n, $Z(G) = \{z \mid zg = gz\ \forall g \in S_n\}$ pour $n \geq 3$ se réduit à l'élément neutre (la permutation identité). (Soit $\sigma \in Z(S_n)$; considérer le produit $\sigma.(i\,j)$ pour une transposition $(i\,j)$.) Et quand $n = 1, 2$?

Exercice 5. [Montrons que A_5 est simple]

a) Quels sont les ordres possibles pour les éléments de A_5? Combien d'éléments y a–t–il de chaque ordre?

b) Soit G un groupe fini, $N \triangleleft G$, et écrire $|G|$ pour l'ordre de G. Soit $g \in G$ un élément d'ordre k qui est premier avec $\frac{|G|}{|N|}$. Montrer que $g \in N$.

c) Montrer que A_5 n'a pas de sous–groupe distingué d'ordre 5 (combien d'éléments d'ordre 5 y a–t–il dans G?). Et pour les ordres 10, 15 et 20?

d) De la même façon, montrer qu'il n'y a pas de sous–groupe distingué dans A_5 d'ordre 12,6,4,3.

e) Montrer que les sous–groupes d'ordre 2 dans A_5 ne sont pas distingués.

Date: February 9, 2015.