Deuxième TP

Boris Colombari

1 Manipulation des nombres rationnels

1. La période de 14/11 est 27 car $14/11 = 1 + 3/11 = 1 + 27/99$.

   La période de 18/37 est 486 car $18/37 = 486/999$.

2. En faisant la division euclidienne de a par 7, on obtient $a = 7q + r$ avec $0 \leq r < 7$. On a donc $a/7 = q + r/7$, et la période de $a/7$ est celle de $r/7$, donc il suffit de regarder les périodes de $r/7$ avec $r = 0, 1, \ldots, 6$.

   Pour $r = 0$, la période est bien sûr 0. Pour $r = 1, 2, \ldots, 6$, on obtient les périodes 142857, 285714, 428571, 571428, 714285 et 857142. On remarque qu'il s'agit toujours de la même suite de chiffres dans le même ordre, mais décalée de façon cyclique.

   Par le même raisonnement, les périodes possibles pour $a/11$ sont celles de $r/11$ pour $r = 0, 1, \ldots, 10$. On obtient donc 0, 09, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81 et 90. Ce sont les multiples de 9, ce qui s'explique par le fait que $r/11 = 9r/99$.

   Pour les périodes de $a/21$, on trouve 0, 3 et 6 si $a = 0, 7, 14$, on retrouve celles de $a/7$ si a est un multiple de 3, et pour a premier avec 3 et 7, on trouve 047619, 095238, et toutes les suites de 6 chiffres obtenues à partir de celles-ci par un décalage cyclique (par exemple 619047 ou 523809).

3. Soit $r = a/b$ un rationnel, avec a et b premiers entre eux. Pour trouver la prépériode et la période de r, on cherche à l'écrire sous la forme $c/(10^m(10^k - 1))$. En effet, le développement décimal de $c/(10^k - 1)$ est périodique après la virgule, et le terme $1/10^m$ donne le décalage qui introduit la prépériode.

   Soit $p = \nu_2(b)$ le plus grand entier tel que 2^p divise b, et $q = \nu_5(b)$ le plus grand entier tel que 5^q divise b. On a donc $b = 2^p 5^q b'$ avec b' premier avec 10. Posons $m = \max(p, q)$, et $c = 2^{m-p} 5^{m-q} a$. On a alors $r = a/b = c/(10^m b')$.

   Il ne reste maintenant plus qu'à trouver un multiple de b' de la forme $10^k - 1$, ce qui est possible, car d'après le petit théorème de Fermat, on a $10^{\phi(b')} \equiv 1 \mod b'$, donc b' divise $10^{\phi(b')} - 1$. On prend pour k le plus petit entier tel que b' divise $10^k - 1$, et en notant $c' = c \cdot (10^k - 1)/b'$, on a $r = c'/(10^m(10^k - 1))$ comme annoncé.

   Finalement, on obtient :
   $$r = \text{left} + \frac{\text{prépériode}}{10^m} + \frac{1}{10^m}\frac{\text{période}}{10^k - 1},$$
   où left, prépériode et période sont des entiers tels que $0 \leq \text{prépériode} < 10^m$ et $0 \leq \text{période} < 10^k - 1$.

4. Les nombres x et $10^\ell x$ ont la même période à partir d'un certain rang, qui s'annule quand on calcule $(10^\ell - 1)x = 10^\ell x - x$. Ce nombre a un développement décimal fini, donc est décimal, et *a fortiori* rationnel. On en déduit que $x = (10^\ell - 1)x/(10^\ell - 1)$ est rationnel.

5. Si la prépériode est de longueur m et la période de longueur k, alors on a

$$r = \text{left} + \frac{\text{prépériode}}{10^m} + \frac{1}{10^m}\frac{\text{période}}{10^k - 1}.$$

2 Fractions continues

6. Le calcul se fait par récurrence, en posant $x_0 = x$, $a_0 = \lfloor x_0 \rfloor$, et tant que $x_n > a_n$, $x_{n+1} = \frac{1}{x_n - a_n}$ et $a_{n+1} = \lfloor x_{n+1} \rfloor$. Si $a_n = x_n$, alors le calcul s'arrête, et on a $x = [a_0, \dots, a_n]$.

7. Les premiers termes du développement en fraction continue de $\sqrt{2}$ sont $1, 2, 2, 2, \dots$, donc il semble que $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \dots]$. En effet, on a :

$$a_0 = \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}, \quad a_1 = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{2} + 1 \rfloor = 2, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1 - 2} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = x_1,$$

et à partir de là, $x_{n+1} = x_n$ pour $n \geq 1$, donc $x_n = x_1$ et $a_n = a_1 = 2$ pour $n \geq 1$.

Les 10 premiers termes du développement en fraction continue de π sont $3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1$.

8. Etant donné une suite d'entiers $(a_n)_{n \geq 0}$, le numérateur et le dénominateur de $[a_0, \dots, a_n]$ sont donnés par les suites $(h_n)_n$ et $(k_n)_n$ définies par récurrence par :

$$h_{-2} = 0, \quad h_{-1} = 1, \quad h_n = a_n h_{n-1} + h_{n-2} \quad \forall n \geq 0,$$

$$k_{-2} = 1, \quad k_{-1} = 0, \quad k_n = a_n k_{n-1} + k_{n-2} \quad \forall n \geq 0.$$

En effet, en se plaçant dans le corps $\mathbb{Q}(X_0, X_1, \dots, X_n, \dots)$, la suite $(F_n)_n$ de fractions rationnelles définie par $F_0 = X_0$ et $F_{n+1} = F_n(X_0, \dots, X_{n-1}, X_n + \frac{1}{X_{n+1}})$ vérifie $F_n(a_0, \dots, a_n) = [a_0, \dots, a_n]$.

En définissant les suites de polynômes $(P_n)_n$ et $(Q_n)_n$ dans $\mathbb{Z}[X_0, X_1, \dots, X_n, \dots]$ par $P_{-2} = 0$, $P_{-1} = 1$, $Q_{-2} = 1$, $Q_{-1} = 0$ et $P_n = X_n P_{n-1} + P_{n-2}$, $Q_n = X_n Q_{n-1} + Q_{n-1}$ pour $n \geq 0$, on obtient $F_n = \frac{P_n}{Q_n}$ pour tout $n \geq 0$.

En effet, $\frac{P_0}{Q_0} = \frac{X_0}{1} = F_0$, donc c'est vrai pour $n = 0$. Si c'est vrai jusqu'à $n - 1$ avec $n \geq 1$, alors on a :

$$\begin{aligned} F_n = F_{n-1}(X_0, \dots, X_{n-1} + \frac{1}{X_n}) &= \frac{P_{n-1}(X_0, \dots, X_{n-1} + \frac{1}{X_n})}{Q_{n-1}(X_0, \dots, X_{n-1} + \frac{1}{X_n})} = \frac{(X_{n-1} + \frac{1}{X_n})P_{n-2} + P_{n-3}}{(X_{n-1} + \frac{1}{X_n})Q_{n-2} + Q_{n-3}} \\ = \frac{X_{n-1}P_{n-2} + P_{n-3} + \frac{1}{X_n}P_{n-2}}{X_{n-1}Q_{n-2} + Q_{n-3} + \frac{1}{X_n}Q_{n-2}} &= \frac{P_{n-1} + \frac{1}{X_n}P_{n-2}}{Q_{n-1} + \frac{1}{X_n}Q_{n-2}} = \frac{X_n P_{n-1} + P_{n-2}}{X_n Q_{n-1} + Q_{n-2}} = \frac{P_n}{Q_n}, \end{aligned}$$

donc c'est vrai pour n.

En posant $h_n = P_n(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}$ et $k_n = Q_n(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}$, on a $\frac{h_n}{k_n} = [a_0, \dots, a_n]$, et les suites $(h_n)_n$ et $(k_n)_n$ vérifient bien la relation de récurrence donnée ci-dessus.

3 Théorème de Hurwitz

10. Pour $x = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, il semble que pour tout n impair, on ait $C_n \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$. Pour $x = \pi$, il semble que l'on ait $C_n \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$ pour au moins un n sur 2 (il y a une perte de précision pour $n \geq 14$).