Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université
Master de mathématiques, 1re année

Deuxième TP

lundi 7 novembre 2016
B. Cadorel, P. Mercat

Développements décimaux

1 Manipulation des nombres rationnels

```
sage: (13/7).n(digits=50)
1.8571428571428571428571428571428571428571428571429
sage: 7/55.n(digits=50)
0.12727272727272727272727272727272727272727272727273
```

On dit que le développement décimal de 13/7 est périodique de période 857142. Pour 7/55 la prépériode est 1 et la période 27.

1. Donner la période des développements décimaux de 14/11 et 18/37.

2. Quelles sont les périodes possibles pour un nombre de la forme $a/7$, $a/11$, $a/21$?

3. Écrire une fonction qui prend une fraction en entrée et retourne son développement décimal sous la forme `(left,preperiod,period)` où `left` est la liste des chiffres à gauche de la virgule et `preperiod` et `period` sont les listes de chiffres de la pré-période et de la période respectivement.

4. Soit x un nombre périodique de période ℓ. Montrer que $(10^\ell - 1)x$ est un nombre décimal et donc que x est rationnel.

5. Écire une fonction qui prend trois listes `(left,preperiod,period)` en entrée et qui renvoie une fraction admettant ce développement décimal.

2 Fractions continues

Pour une suite $a_0, a_1, \ldots$ d'entiers, avec $a_0 \geq 0$ et $\forall i > 0$, $a_i > 0$, on définit les fractions continues

$$u_n = [a_0, a_1, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + a_n}}} \quad \text{et} \quad x = \lim_{n \to +\infty} u_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots}}}$$

Par exemple $\frac{57}{17} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}$, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}$.

Pour un nombre x_0 son développement en fraction continue est donné par les formules par $a_n = \lfloor x_n \rfloor$, $x_{n+1} = \frac{1}{x_n - a_n}$.

6. Écrire un programme qui étant donné un nombre x, calcul les n premiers termes de son développement en fraction continue.

7. Donner le développement en fraction continue de $\sqrt{2}$. Donner les 10 premiers termes du développement en fraction continue de π.

8. Écrire un programme qui étant donné un développement en fraction continue $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$, calcul le numérateur et le dénominateur de u_n.

3 Théorème de Hurwitz

Une approximation d'un nombre x par un nombre rationnel $\frac{p}{q}$ est bonne si le dénominateur q n'est pas trop grand quand la précision $\epsilon = |x - \frac{p}{q}|$ est petite.

Avec le développement en fraction continue on obtient les meilleurs approximations d'un nombre x.

Pour un nombre irrationnel x, soit $u_n = [a_0, a_1, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$ son n-ième développement en fractions continues. Soit $C_n = |x - \frac{p_n}{q_n}|{q_n}^2$.

9. Pour le nombre d'or $x = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et pour $x = \pi$, calculer les premières valeurs de u_n, p_n, q_n et C_n.

10. Vérifier expérimentalement le théorème de Hurwitz : pour un nombre irrationnel x, il existe une infinité de nombres rationnels $\frac{p}{q}$, tels que $|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2\sqrt{5}}$