Faculté des Sciences
Aix*Marseille Université

Master de mathématiques, 1re année

Quatrième TP

lundi 21 novembre 2016
B. Cadorel, P. Mercat

Analyse

1 Coordonnées sphériques

Un point de la sphère unité est repéré par sa longitude $\lambda \in [-\pi;\pi]$ et de latitude $\phi \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

1. Exprimer les coordonnées cartésiennes (x,y,z) du point de coordonnées sphériques $(r=1,\lambda,\phi)$.

2. Tracer la sphère unité. `parametric_plot3d()` `parametric_plot3d(color='red')`

3. Sur la sphère unité, tracer en rouge les parallèles de latitude $\phi = -\frac{3\pi}{8}$, $-\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{8}$, 0, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{8}$.

4. Sur la sphère unité, tracer en vert les méridiens de longitude $\theta = \frac{k\pi}{8}$, pour k variant de -7 à 8.

5. Pour une petite variation $d\lambda$ de la longitude, montrer que le déplacement horizontal est de $\cos\phi\, d\lambda$.

6. De même pour une petite vairation $d\phi$ de la latitude, calculer le déplacement.

2 Projection de Mercator

À un point de longitude λ et de latitude ϕ la projection de Mercator fait correspondre le point du plan de coordonnées

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \ln(\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2})) \end{cases}$$

`parametric_plot(color='red')`

7. Tracer dans le plan, les projections des parallèles et les méridiens des questions précédentes.

8. Calculer les déplacements en abscisse et en ordonnée (respectivement), pour de petites variations $d\lambda$ et $d\phi$ de la longitude et de la latitude (respectivement).

9. Montrer que pour la projection de Mercator, en tout point l'échelle verticale est égale à l'échelle horizontale.

3 Projection de Peters

À un point de longitude λ et de latitude ϕ la projection de PETERS fait correspondre le point du plan de coordonnées

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\sin(\phi) \end{cases}$$

10. Tracer dans le plan, les projections des parallèles et les méridiens des questions précédentes.

11. Calculer l'aire balayée sur la sphère unité par une petite variation $d\lambda$ de la longitude et $d\phi$ de la latitude.

12. Montrer que la projection de PETERS conserve les aires (à un facteur près).

4 Géodésiques

Sur la sphère les géodésiques sont les grands cercles, c'est-à-dire les cercles dont centre est le centre de la spère. On considère sur la sphère les points

— NY de longitude $74°00'22''$ Ouest et de latitude $40°42'52''$ Nord et

— MRS de coordonnées $5°22'12''$ Est et $43°17'47''$ Nord.

13. Donner les coordonnées cartésiennes de ces deux points.

```
u=vector([1,2,3]), u.cross_product(v), u/norm(u), u*v
```

14. Donner une équation cartésienne du plan passant par les points NY, MRS et le centre de la terre.

15. Tracer sur la sphère unité la géodésique passant par ces deux points.

16. Tracer l'image de cette géodésique par les projections de MERCATOR et de PETERS.

17. Calculer les angles du triangle géodésique dont les sommets sont NY, MRS et le pôle Nord.