

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE RENNES

MÉMOIRE DE 1^{ER} ANNÉE

**Sections de Birkhoff du flot géodésique
sur le tore plat**

Alain BLAUSTEIN

Sous la direction de : M. Pierre
DEHORNOY

15 Mai 2017 — 1^{er} Juillet 2017

Mémoire : Sections de Birkhoff du flot géodésique sur le tore plat

25 août 2018

Table des matières

1	Notion de surface et classification	4
1.1	Définitions	4
1.1.1	Surface	4
1.1.2	Orientabilité	4
1.2	Classification	6
1.2.1	Triangulation	6
1.2.2	Classification	7
2	Sections de Birkhoff	18
2.1	Définitions	18
2.2	Premier exemple : Le flot linéaire sur T^2	19
3	Sections de Birkhoff du champs géodésique sur le tore plat	23
3.1	Remarques préliminaires	24
3.1.1	Le flot géodésique	24
3.1.2	Le bord de \mathcal{S}	25
3.1.3	Problèmes d'orientation	26
3.2	Invariance des classes d'homologie entre deux niveaux critiques	27
3.3	Étude locale des niveaux critiques	29
3.4	Conséquences, classification	34

Le but de ce stage a été de découvrir une notion utilisée dans l'étude des systèmes dynamiques : les sections de Birkhoff. Dans la suite, on définira cet objet puis on lui donnera vie par l'étude d'un exemple.

1 Notion de surface et classification

L'objectif de cette partie est la classification topologique (à homéomorphisme près) des surfaces connexes, compactes et orientables. Dans cette partie, on tentera d'être bref et on admettra certains résultats.

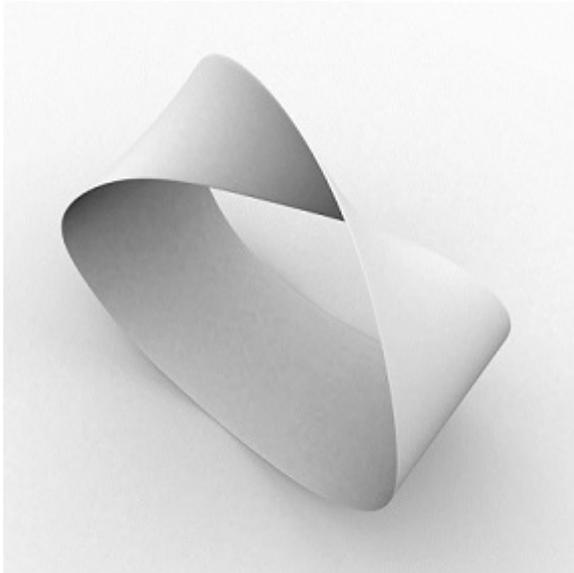
1.1 Définitions

1.1.1 Surface

Définition 1.1.1. *On appelle surface une variété topologique de dimension 2.*

1.1.2 Orientabilité

Définition 1.1.2. *On dit d'une surface qu'elle est orientable si il n'existe pas de plongement du ruban de Möbius dans celle-ci.*



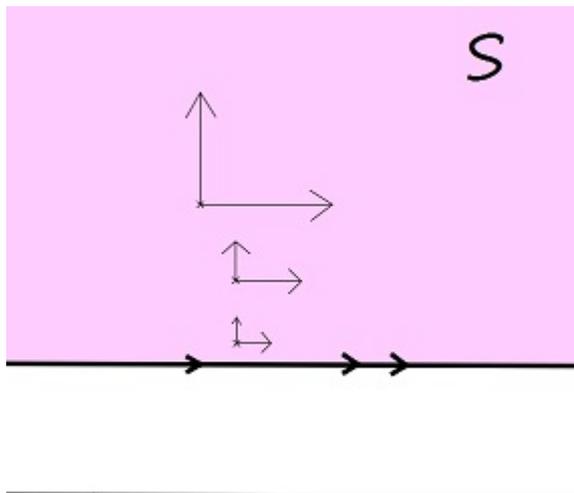
Remarque :

1. Par cette définition, il est évident que l'orientabilité des surfaces est un invariant topologique.
2. L'orientabilité d'une surface permet de définir "un dessus" et "un dessous" sur cette surface. Cela signifie que si l'on imagine que la surface avait une épaisseur, on ne pourrait pas passer d'un côté à l'autre de cette surface en se déplaçant continuellement sur celle-ci.

3. Sur une surface orientable, il est possible de définir une orientation. Dans le cas d'une variété différentielle, cela revient à choisir une base d'un espace tangent. On parle alors de surface orientée.
4. La définition d'orientabilité reste valable dans le cas d'une surface à bord.

Propriété (Orientation induite) : Il existe une orientation induite canonique du bord d'une surface orientée.

Démonstration : On se contentera du dessin suivant :



1.2 Classification

Dans cette partie, on se restreindra à l'étude des surfaces compactes, connexes et orientables (on dira CCO).

1.2.1 Triangulation

Définition 1.2.1. Soit \mathcal{S} une surface CCO.

On appelle triangulation de \mathcal{S} une famille finie de fermés $\{T_1, \dots, T_n\}$ de \mathcal{S} et une famille d'homéomorphismes $\{f_1, \dots, f_n\}$ tels que f_i soit un homéomorphisme d'un triangle de \mathbb{R}^2 sur T_i pour i entre 1 et n .

On appelle triangles les $T_i, i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, côtés les images des côtés des triangles de \mathbb{R}^2 , et sommets les images des sommets des triangles de \mathbb{R}^2 .

On demande de plus que pour $i \neq j$, les triangles T_i et T_j soient disjoints, ou possèdent un côté en commun, ou un sommet en commun.

On demande aussi que $T_1 \cup \dots \cup T_n = \mathcal{S}$

Exemple : Triangulation d'un cerf :



Théorème 1.2.2. *Toute surface CCO admet une triangulation.*

On admettra ce théorème

Lemme 1.2.3. *Soit \mathcal{S} est une surface CCO.*

Il existe une triangulation $\{T_1, \dots, T_n\}$ de \mathcal{S} , telle que pour $i \geq 2$, T_i admette un sommet en commun avec l'un des T_1, \dots, T_{i-1} .

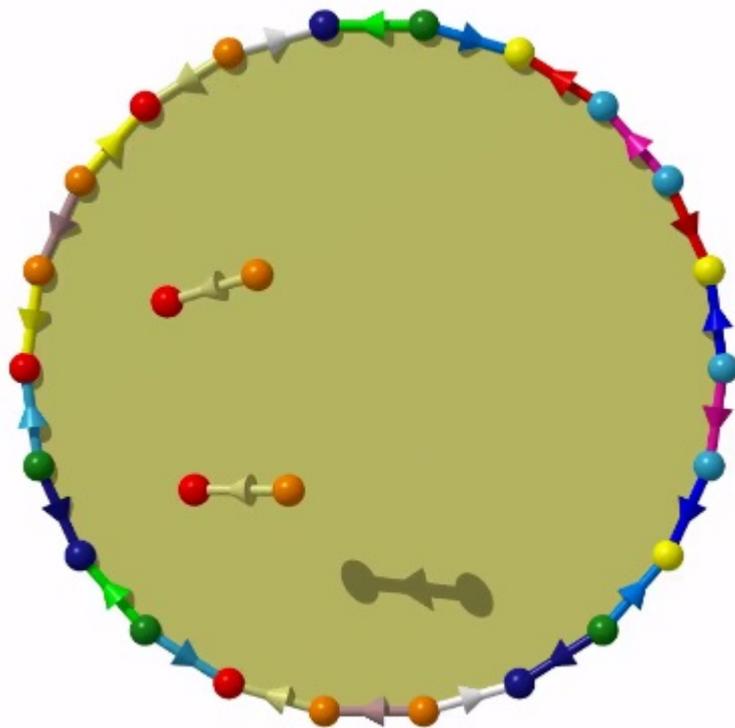
Démonstration : Ce résultat s'obtient facilement en utilisant la connexité de \mathcal{S} et le théorème admis.

1.2.2 Classification

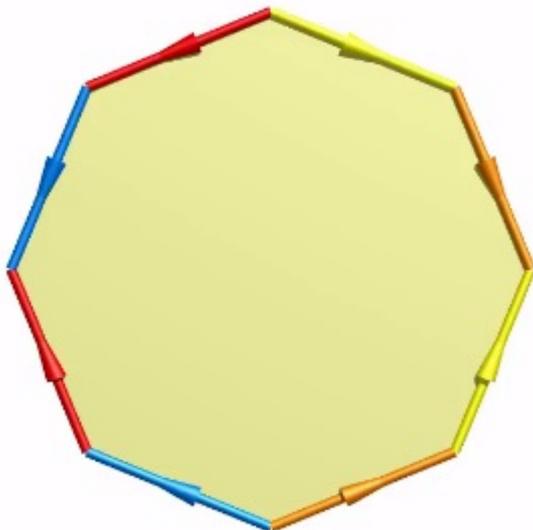
Définition 1.2.4. *Soit P un polygone régulier de \mathbb{R}^2 ayant un nombre pair $2n$ de sommets. On appelle polygone topologique l'espace topologique \mathcal{P} obtenu en quotientant P par une relation d'équivalence \sim identifiant les côtés de P par paires de côtés distincts.*

Exemple : Les images suivantes montrent un exemple de polygone topologique :





Remarque : Un polygone topologique \mathcal{P} à $2n$ côtés est entièrement décrit par un mot composé des caractères $s_1, \dots, s_n, s_1^{-1}, \dots, s_n^{-1}$ et dans lequel soit s_i et s_i^{-1} apparaissent une fois, soit s_i apparaît deux fois.
 Par exemple, au polygone suivant :



On associe le mot : " $abcde^{-1}d^{-1}a^{-1}b^{-1}$ "

Propriété : toute surface CCO est homéomorphe à un polygone topologique.

Démonstration : On donnera ici une idée de démonstration.

Soit \mathcal{S} une surface CCO munie d'une triangulation $\{T_1, \dots, T_n\}$ telle que pour $i \geq 2$, T_i admet un sommet en commun avec l'un des T_1, \dots, T_{i-1} .

Puisque tous les triangles de \mathbb{R}^2 sont homéomorphes, on peut supposer que pour $i \geq 2$, l'image T'_i de T_i dans \mathbb{R}^2 admet un sommet en commun avec l'un des T'_1, \dots, T'_{i-1} . Cela équivaut à dire que l'on peut supposer que les homéomorphismes f_1, \dots, f_n de la triangulation coïncident sur l'intersection des triangles sur lesquels ils sont définis.

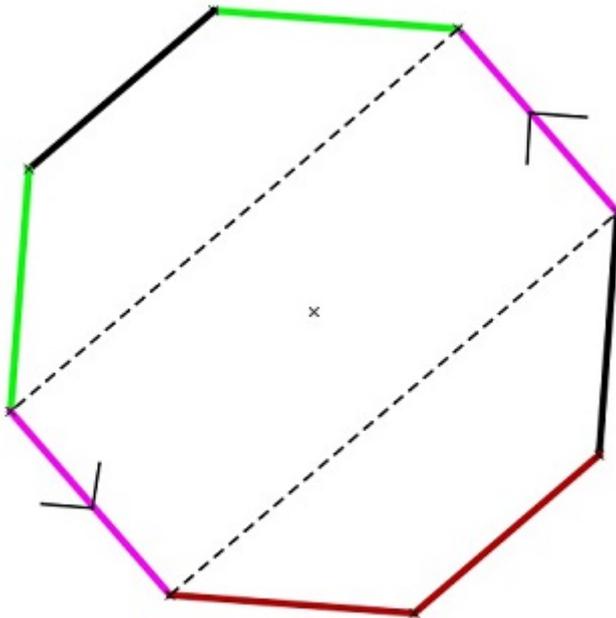
On obtient ainsi un polygone P dans \mathbb{R}^2 qui est la réunion des T'_i . De plus la remarque précédente permet d'affirmer qu'il existe une surjection continue f de P dans \mathcal{S} telle que la restriction de f à T_i soit égale à f_i^{-1} , pour i entre 1 et n .

On définit alors la relation \sim par : $x \sim y$ ssi $f(x) = f(y)$, $\forall x, y \in P$. La relation \sim permet d'identifier les côtés de P par paires. En quotientant P par \sim on obtient bien un polygone topologique \mathcal{P} . De plus, par définition de \sim , l'application \tilde{f} associée à f de \mathcal{P}

sur \mathcal{S} est un homéomorphisme.
Le résultat est donc démontré.

Remarque :

1. La propriété précédente permet de décrire topologiquement une surface CCO par le mot associé à un des polygones topologique homéomorphe à cette surface.
2. Les caractères d'un mot décrivant une surface CCO apparaissent une unique fois dans ce mot. Ils sont donc de la forme : " $a...a^{-1}...$ ". Cette remarque découle directement de l'hypothèse d'orientabilité de la surface choisie. On peut s'en convaincre grace au dessin suivant :

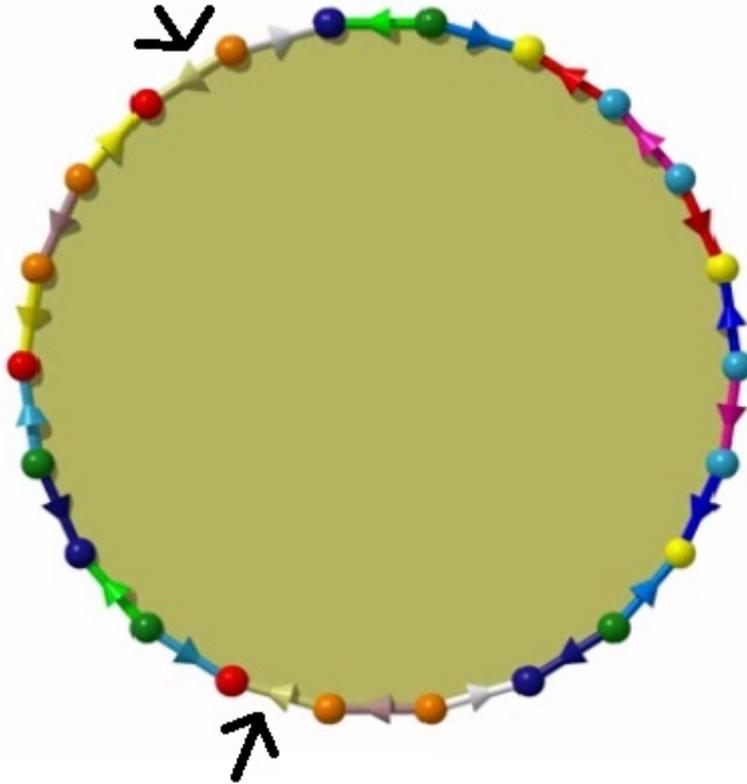


Sur ce dessin les côtés violets sont identifiés selon la même orientation. La figure délimitée par les pointillés est homéomorphe à un ruban de möbius, ce polygone topologique n'est donc pas orientable.

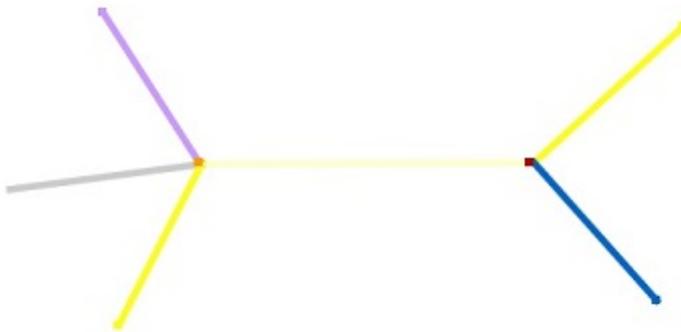
Propriété : Tout polygone topologique décrivant une surface CCO est homéomorphe à un polygone topologique dont tout les sommets sont identifiés.

Démonstration : La preuve se fait par récurrence sur le nombre de sommets distincts

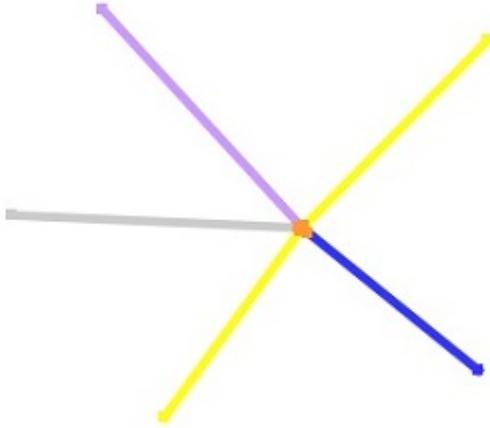
du polygone topologique \mathcal{P} . On montrera sur un exemple comment on passe de n à $n - 1$ sommets distincts :



On peut choisir un voisinage du côté beige indiqué ci-dessus de \mathcal{P} dont un plongement dans \mathbb{R}^2 soit semblable à :



En déplaçant continuellement les sommets de la triangulation (cette action ne modifie pas la classe topologique de \mathcal{P}) on obtient le dessin suivant :



le sommet rouge a été supprimé et on obtient un nouveau polygone topologique homéomorphe au précédent.

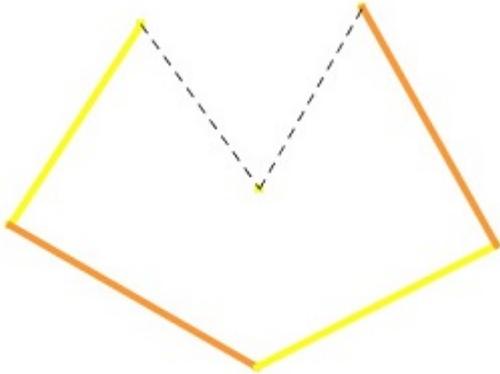
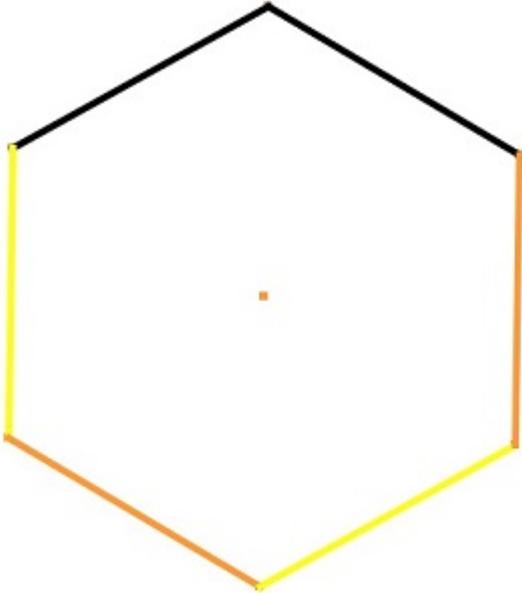
Propriété : Toute surface CCO est homéomorphe à un polygone topologique représenté par un mot de la forme : " $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$ " ou " aa^{-1} ". On dit que cette forme est "normale"

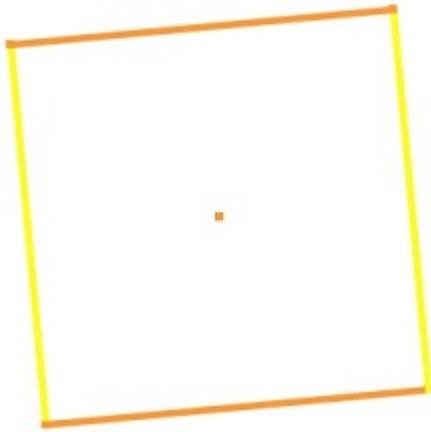
Démonstration : Soit \mathcal{S} une surface CCO. D'après la propriété précédente, \mathcal{S} est homéomorphe à un polygone topologique \mathcal{P} dont tout les sommets sont identifiés.

On cherche les paires de côté en chaînées du polygone \mathcal{P} c'est à dire les côtés a, b tels qu'un mot représentant \mathcal{P} soit de la forme : " $a \dots b \dots a^{-1} \dots b^{-1}$ ".

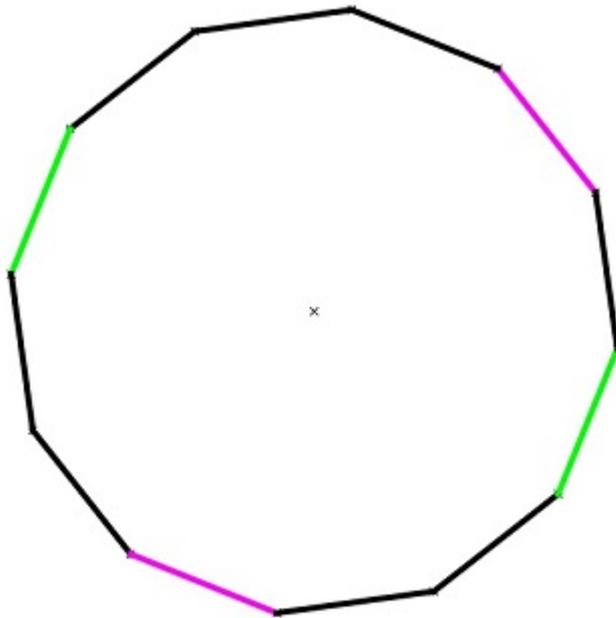
Si \mathcal{P} n'a aucune paire de côtés en chaînés, on arrive facilement à voir qu'un mot représentant \mathcal{P} est de la forme : " $aa^{-1} \dots$ ". Les illustrations ci-dessous expliquent comment

supprimer le côté a et son inverse (ici les côtés noirs) :

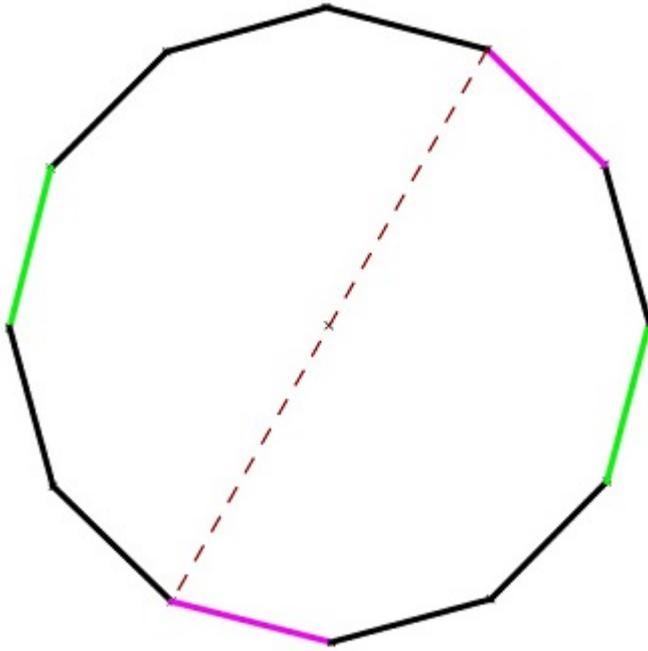




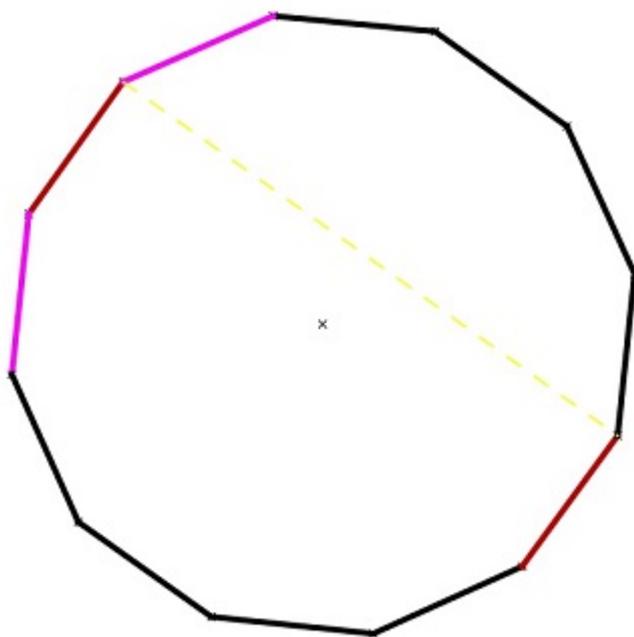
Si \mathcal{P} admet un paire de côtés enchaînés a, b , les illustrations expliquent comment les mettent sous forme normale : " $aba^{-1}b^{-1}\dots$ " :



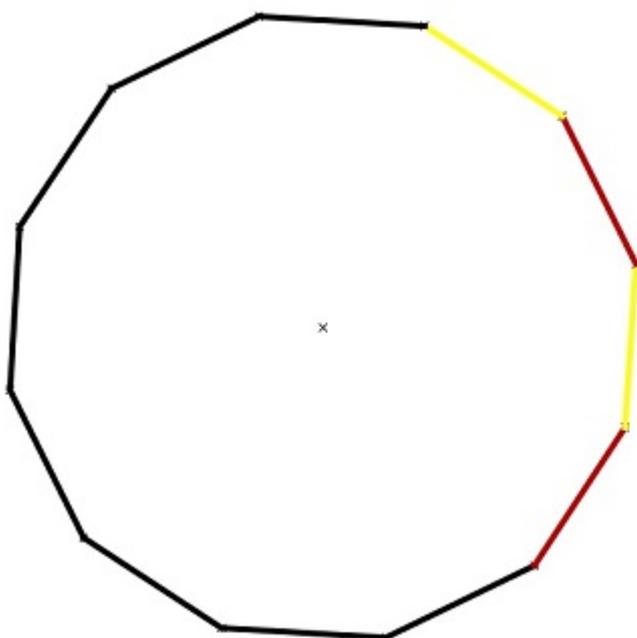
Ici les côtés verts et violets sont enchaînés. Les côtés noirs sont quelconques.



On découpe le polygone en créant une nouvelle paire de côtés de couleur rouge puis on recolle selon la paire de côtés verts identifiés, ce qui les fait disparaître :



Par la même méthode on fait apparaître une paire de côtés jaunes.



On obtient la forme normale voulue.

On a seulement utilisé le fait que l'on avait des côtés enchaînés pour mener à bien la démonstration. Celle-ci reste donc valable dans le cas général.

Pour arriver au résultat final, il suffit de répéter la méthode utilisée précédemment avec le reste du polygone.

Remarque :

1. Si une surface CCO est homéomorphe à un polygone topologique représenté par le mot : " $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$ ", cette surface est la somme connexe de n tores. On dit quelle est de genre n .
2. Si une surface CCO est homéomorphe à un polygone topologique représenté par le mot : " aa^{-1} ", cette surface est une sphère. On dit quelle est de genre nul.
3. Le genre est invariant topologique, il décrit entièrement la classe topologique d'une surface CCO. On a donc classifié les surfaces CCO.

Définition 1.2.5. Soit \mathcal{S} une surface triangulée. Supposons que la triangulation de \mathcal{S} comprenne S sommets, A arêtes et F faces. On définit la caractéristique d'Euler de \mathcal{S} par :

$$\chi(\mathcal{S}) = S - A + F$$

Remarque :

1. La caractéristique d'Euler est un invariant topologique, elle ne dépend pas de la triangulation choisie.
2. La caractéristique d'Euler est définie pour une surface à bord par :

$$\chi(\mathcal{S}) = S - A + F - n$$

Où n désigne le nombre de composantes connexes du bord de \mathcal{S}

3. Si g désigne le genre de \mathcal{S} , on a la relation : $\chi(\mathcal{S}) = 2 - 2g - n$
4. La caractéristique d'Euler est additive dans le sens où : $\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$

2 Sections de Birkhoff

Les sections de Birkhoff sont des objets utilisés dans le cadre de l'étude de systèmes dynamiques, notamment lorsque le système étudié est de petite dimension.

2.1 Définitions

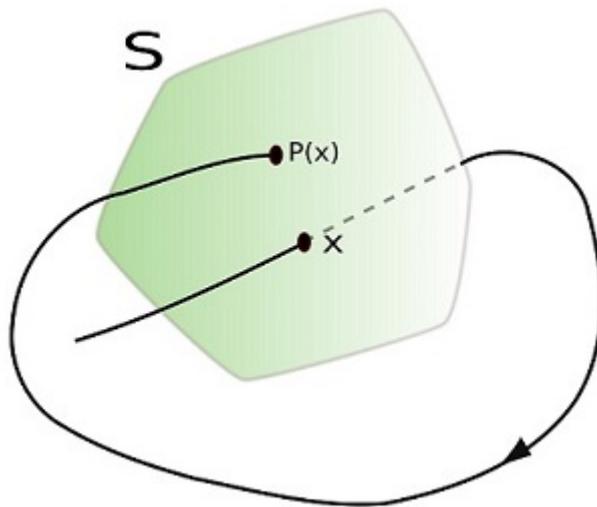
Définition 2.1.1. Soit M une variété différentielle de dimension 3 (resp. 2) et Φ un flot sur M .

On dit que \mathcal{S} est une section de Birkhoff pour le flot Φ si \mathcal{S} est une variété différentielle de dimension 2 (resp. 1) telle que :

1. Si \mathcal{S} est une variété à bord, $\partial\mathcal{S}$ est la réunion d'orbites périodiques du flot Φ .
2. Le flot Φ est transverse à \mathcal{S} en son intérieur.
3. Toute orbite de Φ rencontre \mathcal{S} une infinité de fois dans le futur et dans le passé

Remarque :

1. On peut reformuler le troisième point de la manière suivante : Si $x \in M \setminus \partial\mathcal{S}$, la partie $\{t \in \mathbb{R}_+, \Phi(t, x) \in \mathcal{S}\}$ admet un minimum t_0 . On définit alors une application, dite de premier retour et noté Ψ sur $M \setminus \partial\mathcal{S}$ par $\Psi(x) = \Phi(t_0, x)$. L'image suivante explique plus simplement la définition de l'application de premier retour :



2. L'application ainsi définie est continue, surjective dans l'intérieur de la surface. Elle induit un homéomorphisme de l'intérieur de \mathcal{S} .
3. La remarque précédente souligne un intérêt fondamental des sections de Birkhoff : on ramène l'étude d'un flot dans un espace de dimension 3 à l'étude d'un homéomorphisme dans un espace de dimension 2.
4. On dit d'une section de Birkhoff qu'elle est globale si elle n'a pas de bord.

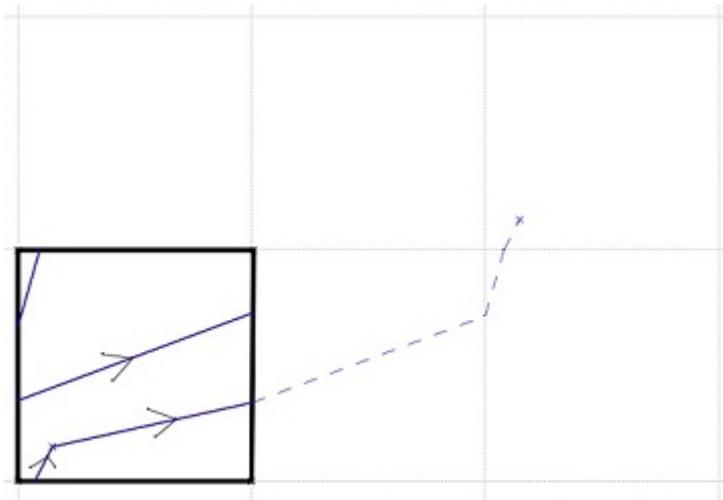
2.2 Premier exemple : Le flot linéaire sur T^2

On se place dans $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ muni de sa topologie quotient (c'est une variété différentielle de dimension 2).

On définit le champs de vecteur constant sur $T^2 : X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On appelle flot linéaire le flot associé à ce champs de vecteur, on le note Φ .

Définition 2.2.1. 1. On appelle courbe fermée sur T^2 une partie de T^2 paramétrée par une application $\gamma : [0, 1] \rightarrow T^2$ continue, telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$ et injective sur $[0, 1[$.

2. A chaque courbe fermée γ de T^2 , on peut associer canoniquement une courbe $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la manière suivante :



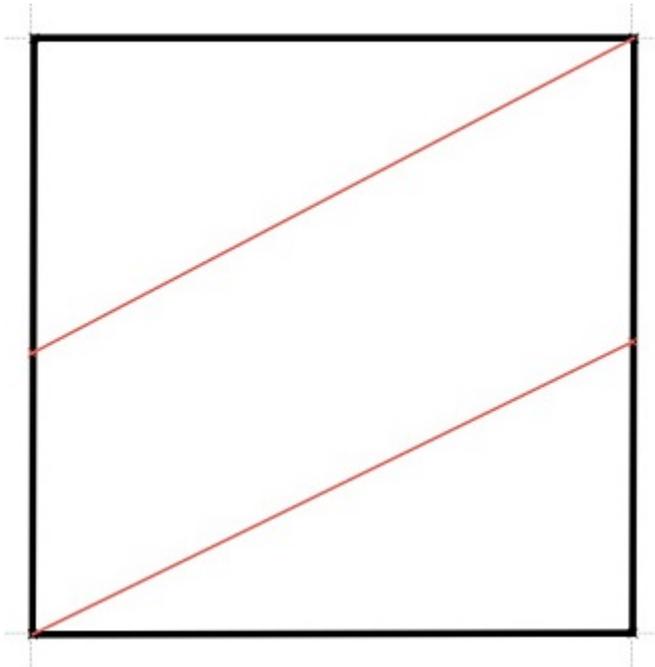
On appelle classe d'homologie de la courbe fermée γ le vecteur de \mathbb{Z}^2 défini par : $[\gamma] = \tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) \in \mathbb{Z}^2$.

Par exemple, la classe d'homologie de la courbe précédente est $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Si $\Gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$, où les γ_i sont des courbes fermées de T^2 , on définit la classe d'homologie de Γ par : $[\Gamma] = \sum_i [\gamma_i]$

Remarque :

1. La relation "avoir la même classe d'homologie" est une relation d'équivalence sur les courbes fermées de T^2 .
2. On peut associer à chaque classe un représentant canonique, la géodésique du tore dirigée par le vecteur de la classe et passant par l'origine. Ci-dessous le représentant de la courbe bleue de l'exemple précédent.



3. La classe d'homologie d'une courbe fermée est indépendante du paramétrage dans le sens où si γ est une courbe fermée et Φ une bijection croissante de l'intervalle $[0, 1]$ sur lui-même laissant fixe 0 et 1, alors $\gamma \circ \Phi$ est une courbe fermée de T^2 et $[\gamma] = [\gamma \circ \Phi]$

4. D'après la dernière remarque, si γ est une partie de T^2 homéomorphe à S^1 munie d'une orientation, alors on peut parler de la classe d'homologie de γ
5. Il existe des relations très fortes entre deux courbes fermées de la même classe d'homologie : elles sont homéomorphes et même isotopes (c'est à dire que l'on peut déformer continuellement l'une des courbes pour obtenir l'autre).
6. Si $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est une classe d'homologie, alors a et b sont premiers entre eux.
7. Si Γ et Γ' sont deux familles de géodésiques parallèles et de même orientation, le nombre de points d'intersection entre Γ et Γ' est égal à la valeur absolue du déterminant de leur classe d'homologie.

On va maintenant chercher les sections globales (sans bords) connexes et compactes pour le flot linéaire sur T^2 . Dans ce cas simple on pourra même expliciter l'application de premier retour sur chaque section.

Remarque :

1. Ces sections sont des variétés de dimension 1.
2. Un résultat sur les variétés compactes de dimension 1 nous dit que ces sections sont homéomorphes au cercle unité. Ce sont des courbes fermées de T^2 .
3. D'après la dernière remarque, à chaque section globale pour le flot linéaire, on pourra associer sa classe d'homologie. Cela nous invite à ne chercher que les classes d'homologie dont le représentant canonique est une section de globale.

Proposition : Une géodésique de vecteur normal $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ est une section globale pour le champs constant $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ si et seulement si $\langle \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \rangle \neq 0$.

Démonstration : Le sens direct découle directement de l'hypothèse de transversalité de la section au flot.

La réciproque découle simplement du fait que deux droites non parallèles du plan ont un point d'intersection.

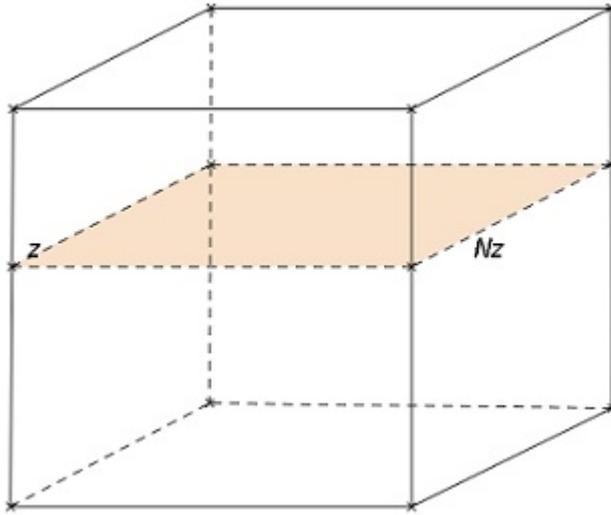
Remarque : L'application de premier retour induit un homéomorphisme sur la section. Ici la section est homéomorphe à un cercle. Un calcul rapide que nous ne détaillerons

pas montre que l'application de premier retour est une rotation du cercle, dont on peut même calculer l'angle explicitement.

3 Sections de Birkhoff du champs géodésique sur le tore plat

Dans cette partie, on se place sur $T^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ muni de sa topologie quotient (c'est une variété différentielle de dimension 3).

Pour $z \in [0, 1[$, on appellera niveau l'ensemble $N_z = \{(x, y, z), (x, y, z) \in T^3\}$. N_z muni de sa topologie induite est homéomorphe au tore T^2 .



3.1 Remarques préliminaires

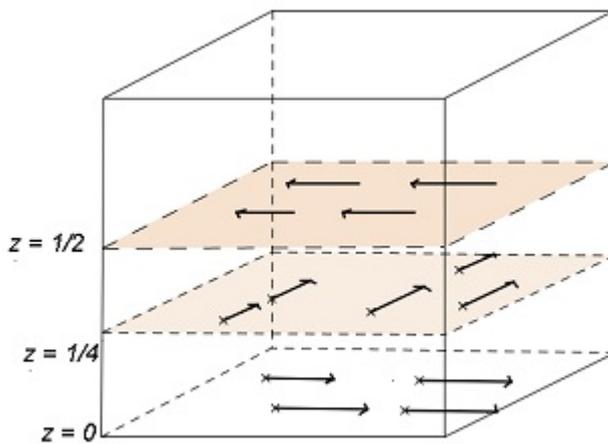
3.1.1 Le flot géodésique

Définition 3.1.1. On définit le champs de vecteur géodésique sur T^3 :

$$X(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi z) \\ \sin(2\pi z) \\ 0 \end{pmatrix}$$

On appelle flot géodésique le flot associé à ce champs de vecteur, on le note Φ .

L'image ci-dessous représente ce champs de vecteur sur T^3 :



Remarque :

1. L'étude du flot géodésique sur un niveau de T^3 se ramène à l'étude précédente d'un flot linéaire sur T^2 .
2. Chaque orbite périodique du flot géodésique est incluse dans un niveau de T^3 . Ce sont donc des courbes fermées de T^2 , on peut leur associer leur classe d'homologie.

Dans la suite on considère une surface \mathcal{S} transverse au flot géodésique en son intérieur. On note Γ le bord de \mathcal{S} et on suppose que Γ est la réunion d'orbites périodiques du flot géodésique .

Cette condition n'est pas suffisante pour que \mathcal{S} soit une section de Birkhoff pour le flot géodésique.

Le but de cette partie sera d'étudier les propriétés de \mathcal{S} et de trouver les conditions sous lesquelles c'est une section de Birkhoff.

3.1.2 Le bord de \mathcal{S}

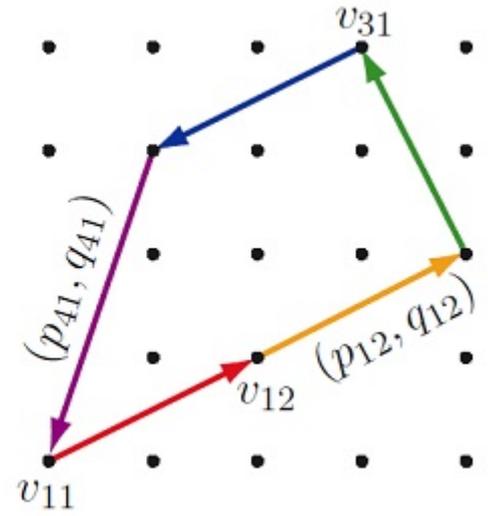
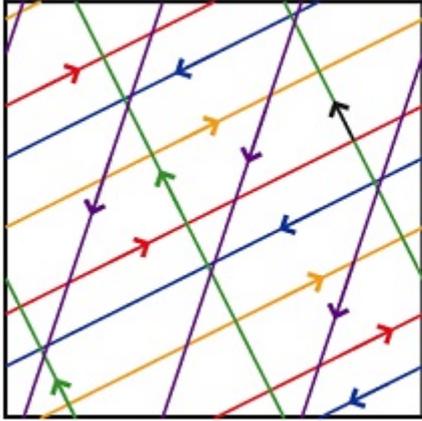
Notations :

1. On note $\{\gamma_{11}, \dots, \gamma_{kn_k}\}$ les orbites périodiques dont le bord Γ est la réunion. Où chaque γ_{ij} est incluse dans le niveau N_{z_i} de T^3 , avec $0 \leq z_1 < \dots < z_k < 1$.
2. A chaque orbite périodique γ_{ij} de Γ on associe sa classe d'homologie $(p_{ij}, q_{ij}) \in \mathbb{Z}^2$.
3. Comme les orbites périodiques d'un même niveau sont parallèles, elles ont la même classe d'homologie. On peut donc noter (p_i, q_i) la classe d'homologie des γ_{ij} .
4. On dit qu'un niveau N_z est critique si $z = z_i$ pour un certain i entre 1 et n , sinon on dit que ce niveau est générique. On note \mathcal{S}_z l'intersection entre \mathcal{S} et N_z .
5. On notera I_i l'intervalle $]z_i, z_{i+1}[$

Lemme 3.1.2. *Un résultat d'homologie que l'on admettra nous dit que le bord d'une variété topologique et de classe d'homologie nulle. Ici se traduit par :*

$$\sum_{i,j} (p_{ij}, q_{ij}) = \sum_i n_i (p_i, q_i) = (0, 0)$$

Définition 3.1.3. *Le lemme précédent nous permet d'associer au bord Γ un polygone convexe dans le réseau \mathbb{Z}^2 , noté $\text{Poly}(\Gamma)$ dont la frontière est constituée des vecteurs $(p_{11}, q_{11}), \dots, (p_{kn_k}, q_{kn_k})$, c'est à dire de n_1 vecteurs (p_{11}, q_{11}) , suivis de n_2 vecteurs (p_{21}, q_{21}) et ainsi de suite. On note $V_{\epsilon, \eta}$ l'origine du vecteur du côté (p_{ij}, q_{ij}) .*



Comme les coordonnées p_{ij} et q_{ij} des classes d'homologie sont premières entre elles, les seuls points à coordonnées entières de la frontière de $Poly(\Gamma)$ sont les points $V_{\epsilon, \eta}$.

3.1.3 Problèmes d'orientation

Remarque :

On a supposé \mathcal{S} transverse au champs géodésique X en son intérieur. X étant continu et ne s'annulant pas, \mathcal{S} doit être orientable. Dans un soucis de clarté nous ne présenterons pas la preuve de cette propriété et on supposera \mathcal{S} orientable.

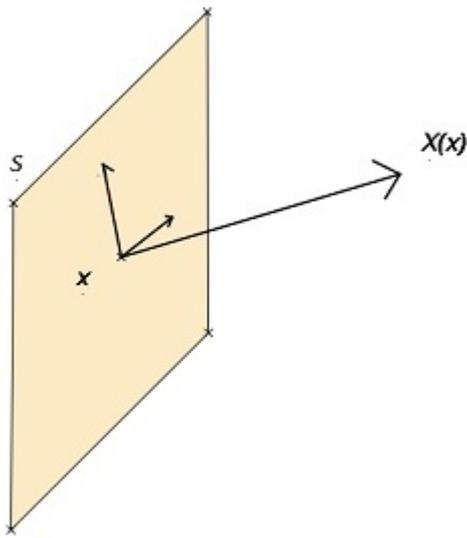
Propriété : le champs géodésique oriente \mathcal{S} .

Démonstration : Soit $x \in \mathcal{S}$.

\mathcal{S} étant transverse à X , $X(x)$ n'est pas inclu au plan tangent à \mathcal{S} en x .

On choisit une base (y, z) du plan tangent en x de manière à ce que la base $(y, z, X(x))$ soit directe.

La base (y, z) définit une orientation sur \mathcal{S} .



Définition 3.1.4. On dit que \mathcal{S} est positive (resp. négative) si l'orientation induite par \mathcal{S} sur les orbites périodiques de son bord coïncide à (resp. est opposée à) l'orientation des orbites en tant que période du flot géodésique.

Dans la suite, on supposera \mathcal{S} positive ou négative.

3.2 Invariance des classes d'homologie entre deux niveaux critiques

Propriété (admise) :

Si N_z est un niveau générique pour \mathcal{S} , alors l'intersection entre N_z et \mathcal{S} est une réunion de cercles disjoints de T^2 .

Remarque :

1. Les cercles composant \mathcal{S}_z sont orientées par le champs géodésique. Par convention, on les oriente de manière à ce que le repère formé par l'orientation choisie et la direction du flot soit direct.
2. Puisque \mathcal{S}_z est la réunion de parties homéomorphes à S^1 qu'on a muni d'une orientation, on peut parler de la classe d'homologie \mathcal{S}_z

Propriété :

Si z et z' sont dans le même intervalle I_i alors \mathcal{S}_z et $\mathcal{S}_{z'}$ ont la même classe d'homologie.

Démonstration : Cette démonstration utilise des outils non définis mais il m'a tout de même semblé intéressant de la laisser dans le sens où elle illustre les liens qui existent entre deux courbes fermés de même classe d'homologie (comme je l'avais précisé plus haut).

La famille $\{\mathcal{S}_t\}_{t \in [z, z']}$ détermine une isotopie entre \mathcal{S}_z et $\mathcal{S}_{z'}$ qui sont par conséquent homologues.

Remarque :

La dernière proposition nous donne des informations sur \mathcal{S} entre deux niveaux critiques. Il reste à comprendre ce qu'il se passe au voisinage des niveaux critiques pour tirer l'ensemble des informations sur \mathcal{S} .

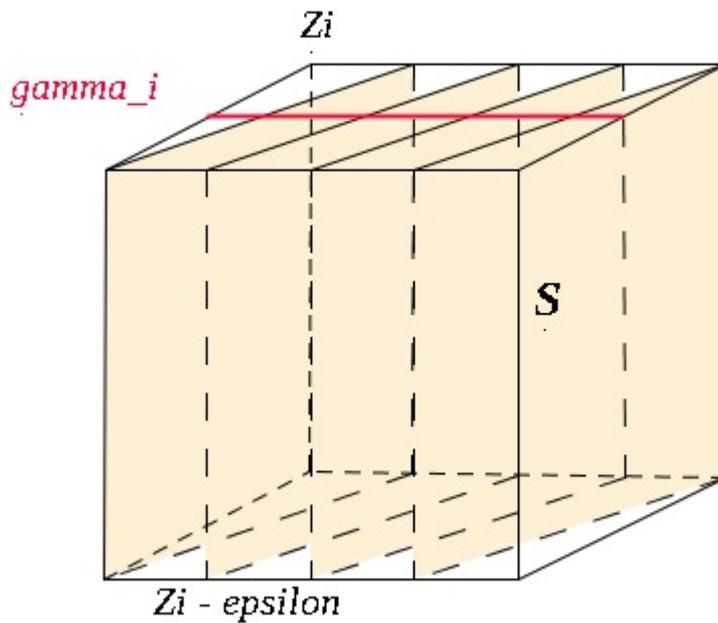
3.3 Étude locale des niveaux critiques

Dans cette partie on étudiera un voisinage d'un niveau critique N_{z_i} .

On supposera que pour ϵ assez petit et $z \in [z_i - \epsilon, z_i[$, \mathcal{S}_z est exactement le représentant canonique de sa classe d'homologie (c'est à dire la géodésique de vecteur directeur $[\mathcal{S}_z]$).

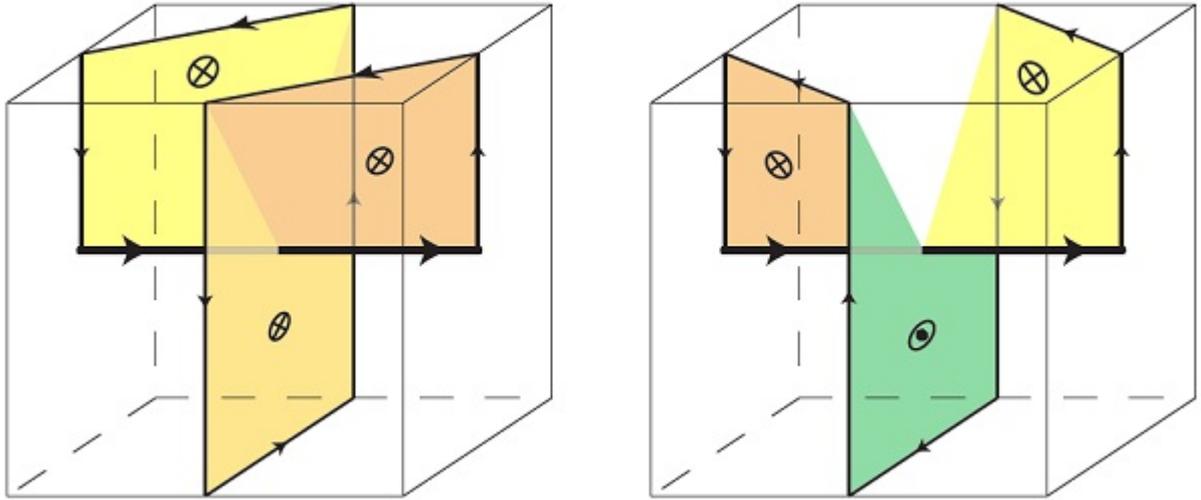
On ne justifiera pas cette hypothèse mais elle n'entraîne pas de perte de généralité.

Si l'on regarde \mathcal{S} entre les niveau $N_{z_i - \epsilon}$ et N_{z_i} , on voit :



Ici $[\gamma_i] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $[\mathcal{S}_{z_i - \epsilon}] = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

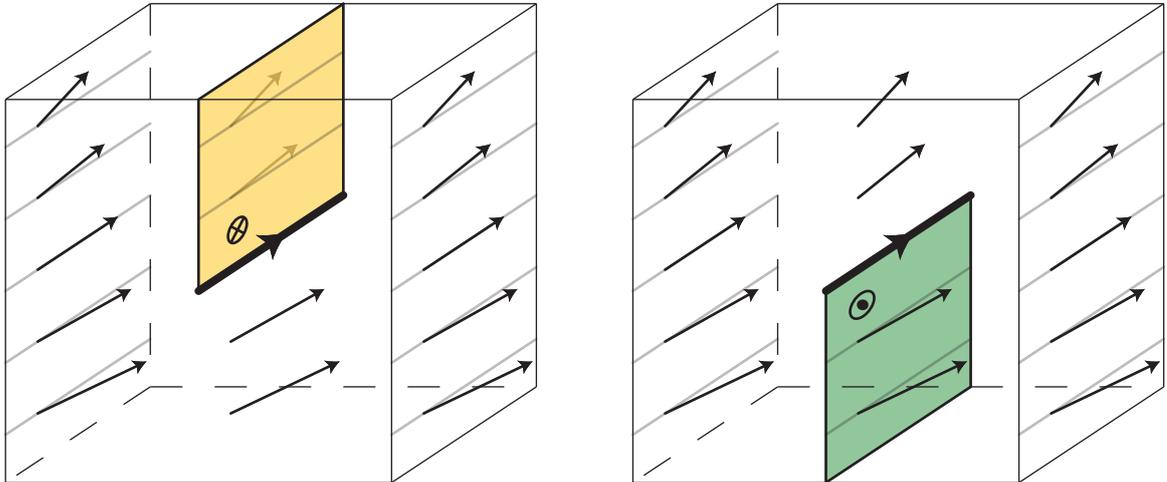
Définition 3.3.1. Une boîte hélicoïdale positive (resp. négative) est un cube contenant la surface orientée notée S_+ (resp. S_-), montrée sur la figure suivante :



Le bord ∂S_+ (resp. ∂S_-) est constitué de sept segments orientés, notés dans l'ordre s_1, \dots, s_7 , inclus dans les faces du cube et coupant les arêtes en leur milieu, et d'un segment, appelé reliure, intérieur au cube et reliant les centres de deux faces opposées.

Lemme 3.3.2. Soit γ_{ij} , une des orbites périodiques composant Γ comprise dans le niveau critique N_{z_i} .

Si l'intérieur de \mathcal{S} ne rencontre pas N_{z_i} , alors \mathcal{S} est négativement transverse au flot géodésique et il existe un voisinage de γ_{ij} tel que \mathcal{S} soit homéomorphe à $\gamma_{ij} \times [z_i, z_i + \eta]$ ou $\gamma_{ij} \times [z_i - \eta, z_i]$. On est alors dans la situation suivante :



Sinon, l'intérieur de \mathcal{S} rencontre N_{z_i} . Dans ce cas, il existe un voisinage $V_{\epsilon, \eta}$ de γ_{ij} vérifiant :

1. $V_{\epsilon,\eta}$ est de la forme $[\gamma_{ij} - \epsilon, \gamma_{ij} + \epsilon] \times [z_i - \eta, z_i + \eta]$
2. $V_{\epsilon,\eta}$ est homéomorphe à une réunion d'un nombre entier strictement positif, noté t_{ij} , de boîtes hélicoïdales positives si \mathcal{S} positive, négatives si \mathcal{S} est négative recollées entre elles selon leurs faces gauches et droites. De plus, γ_{ij} est identifiée à la réunion des reliures, \mathcal{S} à la réunion des surfaces S_+ ou S_- et les faces horizontales (resp. verticales) de $V_{\epsilon,\eta}$ identifiées aux faces horizontales (resp. verticales) des boîtes.

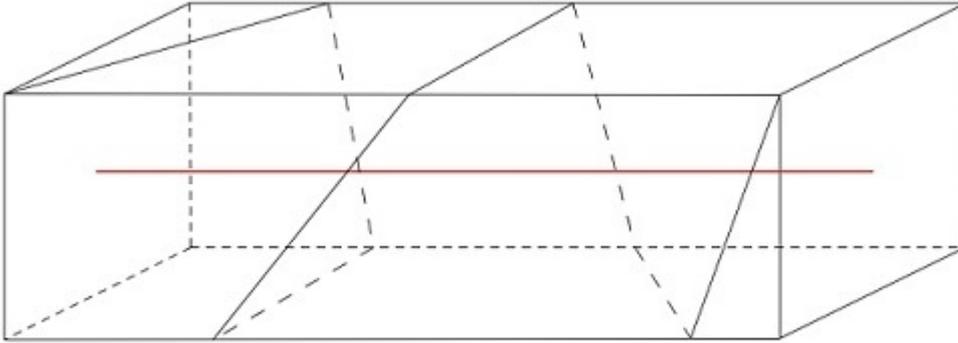
Démonstration : Cette démonstration n'est pas entièrement rigoureuse mais on tentera de donner les éléments principaux.

On considère l'intersection entre le bord de $V_{\epsilon,\eta}$ et \mathcal{S} que l'on notera Ψ .

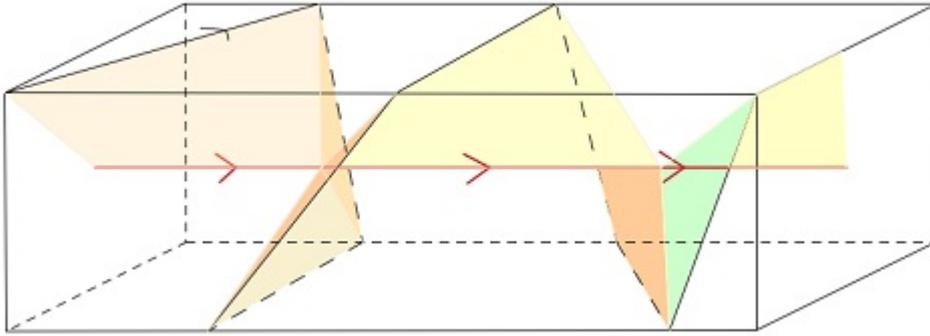
Puisque \mathcal{S} est transverse au flot géodésique et que les faces horizontales de $V_{\epsilon,\eta}$ sont tangentes au flot géodésique, \mathcal{S} et les faces horizontales du bord de $V_{\epsilon,\eta}$ sont transverses. De plus, on admettra que pour η assez petit, les faces verticales du bord de $V_{\epsilon,\eta}$ et \mathcal{S} sont aussi transverses.

Le bord de $V_{\epsilon,\eta}$ et \mathcal{S} sont donc transverses et Ψ est une courbe fermée de T^3 .

Dans le cas où \mathcal{S} est positive, Ψ est de la forme :

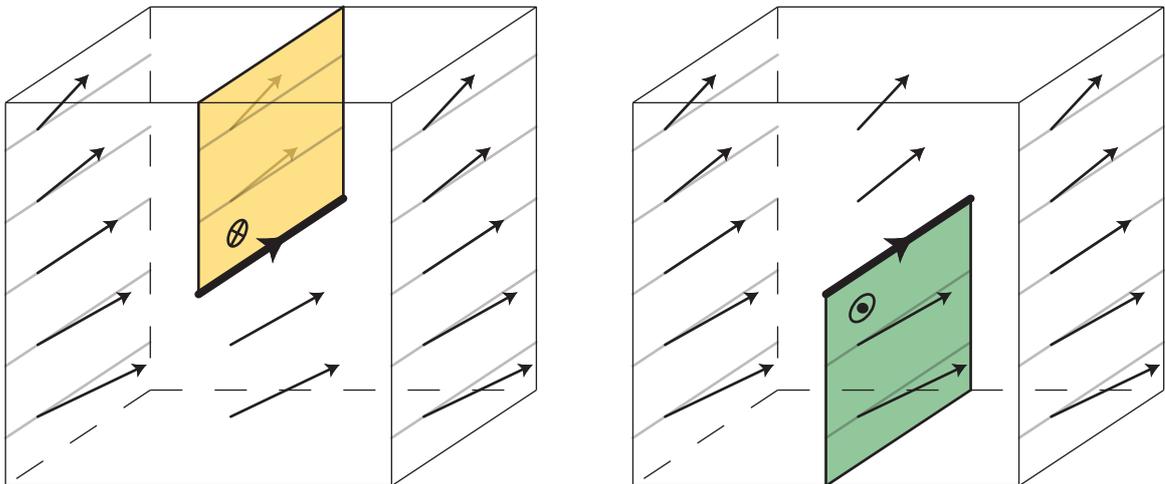


Le nombre de tours que Ψ effectue autour de γ_{ij} est noté t_{ij} . On admettra que pour ϵ et η assez petits, \mathcal{S} ne peut être que de la forme :



On voit donc apparaître, à homéomorphisme près, les t_{ij} boîtes hélicoïdales annoncées.

Si \mathcal{S} est négativement transverse au flot géodésique, le nombre de tours effectués par Ψ autour de γ_{ij} peut être nul on retrouve alors la situation suivante :



Si le nombre de tours effectués par Ψ est non nul on retrouve une situation semblable au cas positif.

Définition 3.3.3. On appelle voisinage produit le tore plein V_{ij} défini précédemment. On dit que V_{ij} est tronçonné en t_{ij} boîtes hélicoïdales.

Théorème 3.3.4. On rappelle que $\gamma_{i1}, \dots, \gamma_{in_i}$ sont les n_k orbites périodiques comprises dans le niveau N_{z_i} . On note V_{i1}, \dots, V_{in_i} leur voisinages produit respectif. Alors :

1. Les nombres t_{i1}, \dots, t_{in_i} de boîtes hélicoïdales dans chacun des voisinages produits sont égaux à un même nombre noté t_i .
2. Si t_i est non nul, il existe un voisinage de N_{z_i} de la forme $]z_i - \eta, z_i + \eta[$ pavé par $n_i \times t_i$ boîtes hélicoïdales, de sorte que dans chaque boîte, \mathcal{S} coïncide avec la surface S_+ ou S_- .
3. Si \mathcal{S} est négativement transverse au flot géodésique, les classes d'homologie des courbes $\mathcal{S}_{z_i-\eta}$ et $\mathcal{S}_{z_i+\eta}$ soient reliées par la relation :

$$[\mathcal{S}_{z_i+\eta}] = [\mathcal{S}_{z_i-\eta}] + n_i(p_i, q_i)$$

4. Si \mathcal{S} est négativement transverse au flot géodésique, les classes d'homologie des courbes $\mathcal{S}_{z_i-\eta}$ et $\mathcal{S}_{z_i+\eta}$ soient reliées par la relation :

$$[\mathcal{S}_{z_i+\eta}] = [\mathcal{S}_{z_i-\eta}] - n_i(p_i, q_i)$$

Démonstration :

Pour tout j entre 1 et n_i , choisissons un voisinage produit V_{ij} de γ_{ij} .

Quitte à en restreindre certains, on peut supposer tous ces tores pleins à section rectangulaire de même hauteur 2η .

Le complémentaire de la réunion $V_{i1} \cup \dots \cup V_{in_i}$ dans $]N_{z_i-\eta}, N_{z_i+\eta}[$ est la réunion de n_i tores pleins à section rectangulaire, notés W_{i1}, \dots, W_{in_i} .

On peut aussi supposer que, pour tout j , la numérotation place W_{ij} entre les voisinages carrés V_{ij} et V_{ij+1} .

Comme \mathcal{S} est transverse au flot, son intersection avec W_{ij} l'est également. Par conséquent cette intersection est la réunion d'un certain nombre, noté u_{ij} , de disques, dont les bords sont des cercles inclus dans le bord de W_{ij} . Or la frontière commune entre V_{ij} et W_{ij} est composée de t_{ij} segments verticaux, d'où l'égalité $u_{ij} = t_{ij}$. De la même façon, on obtient $u_{ij} = t_{ij+1}$. Par récurrence, tous les entiers t_{ij} pour i entre 1 et n_i sont égaux. Enfin, comme l'intersection de \mathcal{S} et de W_{ij} ne consiste qu'en des disques disjoints, on peut élargir les tores V_{ij} de manière à ce que leur réunion recouvre tout le voisinage $]N_{z_i-\eta}, N_{z_i+\eta}[$ de N_{z_i} d'où les deux premiers points.

Les deux points précédents nous permettent de connaître le nombre de points d'intersection entre $\mathcal{S}_{z_i-\eta}$, $\mathcal{S}_{z_i+\eta}$ et $\gamma_{i1} \cup \dots \cup \gamma_{in_i}$ si on les mettait sur le même tore.

En effet, pour chaque boîte hélicoïdale, on compte un point d'intersection entre $\mathcal{S}_{z_i-\eta}$ et $\gamma_{i1} \cup \dots \cup \gamma_{in_i}$, deux points d'intersection entre $\mathcal{S}_{z_i+\eta}$ et $\gamma_{i1} \cup \dots \cup \gamma_{in_i}$ et deux points d'intersection entre $\mathcal{S}_{z_i-\eta}$ et $\mathcal{S}_{z_i+\eta}$.

En remarquant que chaque point d'intersection entre $\mathcal{S}_{z_i+\eta}$ et $\gamma_{i1} \cup \dots \cup \gamma_{in_i}$ ainsi que ceux entre $\mathcal{S}_{z_i-\eta}$ et $\mathcal{S}_{z_i+\eta}$ sont partagés par deux boîtes hélicoïdales, on conclut que $\mathcal{S}_{z_i-\eta}$, $\mathcal{S}_{z_i+\eta}$ et $\gamma_{i1} \cup \dots \cup \gamma_{in_i}$ s'intersectent t_{ij} fois deux à deux.

On déduit d'une remarque précédente :

$$|\det([\mathcal{S}_{z_i-\eta}], [\mathcal{S}_{z_i+\eta}])| = n_i |\det([\mathcal{S}_{z_i-\eta}], [\gamma_{i1}])| = n_i |\det([\gamma_{i1}], [\mathcal{S}_{z_i+\eta}])| = t_{ij}$$

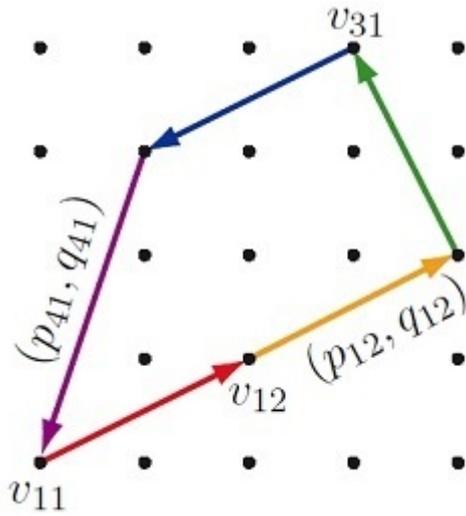
En distinguant les cas où \mathcal{S} est positive et négative, on aboutit au deux derniers points du théorème.

3.4 Conséquences, classification

Quitte à changer de base pour T^3 , on peut supposer que le niveau N_0 est générique pour \mathcal{S} . On note $Poly(\Gamma)$ le polygone associé à Γ .

Puisqu'on suppose N_0 générique, la classe homologique $[\mathcal{S}_0]$ de \mathcal{S}_0 est bien définie.

Si \mathcal{S} est négative (resp. positive), on déplace $Poly(\Gamma)$ dans le réseau \mathbb{Z}^2 de manière à ce que $v_{11} = [\mathcal{S}_0]$ (resp. $v_{11} = -[\mathcal{S}_0]$) et on note $Poly_{\mathcal{S}}(\Gamma)$ le polygone obtenu.



Lemme 3.4.1. 1. Si \mathcal{S} est négative (resp. positive), pour tout i entre 1 et k , et pour tout z entre z_{i-1} et z_i , la classe $[\mathcal{S}_z]$ (resp. $-[\mathcal{S}_z]$) coïncide avec le sommet v_{i1} du $Poly_{\mathcal{S}}(\Gamma)$.

2. Pour i entre 1 et k , le nombre de boîtes utilisées pour paver le voisinage du niveau N_{z_i} est égal à l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $[\mathcal{S}_{z_i-\eta}]$ et $[\mathcal{S}_{z_i+\eta}]$.

Démonstration :

On démontre ce résultat par récurrence sur i . Nous ferons ici le cas $i = 2$ et on supposera \mathcal{S} positive.

Grâce aux résultats précédent, on sait que pour z entre z_1 et z_2 , $-\mathcal{S}_z = -[\mathcal{S}_0] + n_1(p_1, q_1)$. Par construction de $Poly_{\mathcal{S}}(\Gamma)$, $-\mathcal{S}_0 = v_{11}$ et $v_{11} + n_1(p_1, q_1) = v_{21}$. On a donc $-\mathcal{S}_z = v_{11} + n_1(p_1, q_1) = v_{21}$.

Le premier point est démontré.

Le deuxième point a déjà été presque démontré dans la partie précédente. En effet, on a déjà vu que le nombre de boîtes t_i tronçonnant le voisinage de V_i est égal à la valeur absolue du déterminant entre $[\mathcal{S}_{z_i-\eta}]$ et $[\mathcal{S}_{z_i+\eta}]$. Ce déterminant est lui même égal à l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $[\mathcal{S}_{z_i-\eta}]$ et $[\mathcal{S}_{z_i+\eta}]$.

Le travail des parties précédentes permet à présent de classer les surfaces transverses pour le flot géodésique et de calculer élémentairement leur genre. Ces résultats sont décrits dans le théorème suivant :

Théorème 3.4.2. *1. L'application $F \mapsto \text{Polys}(\Gamma)$ induit une bijection entre surfaces négatives, à difféomorphisme préservant les niveaux près, et polygones convexes de \mathbb{Z}^2 contenant $(0,0)$ en leur intérieur ou sur leur frontière.*

2. L'application $F \mapsto \text{Polys}_S(\Gamma)$ induit une bijection entre sections de Birkhoff négatives du flot géodésique, à difféomorphisme préservant les niveaux près, et les polygones convexes de \mathbb{Z}^2 contenant $(0,0)$ en leur intérieur (strict).

3. Il n'y a pas de surface positive transverse au flot géodésique.

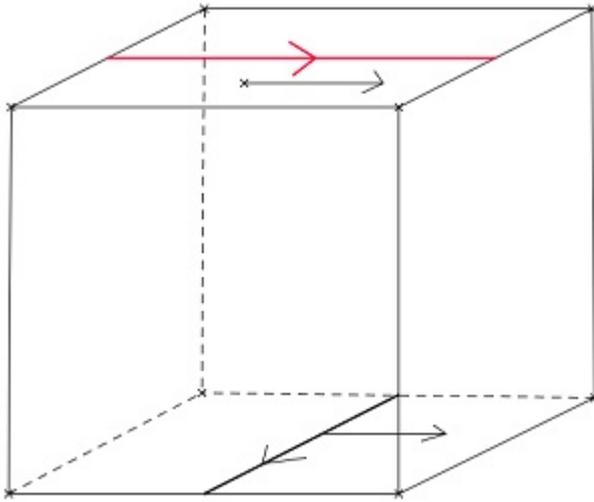
4. Soit Γ une familles d'orbites périodiques du flot géodésique, de classe d'homologie nulle. Si on note $A(\Gamma)$ l'aire du polygone $\text{Poly}(\Gamma)$ et $I(\Gamma)$ le nombre de points entiers à l'intérieur de $\text{Poly}(\Gamma)$, alors pour toute surface \mathcal{S} de bord Γ transverse au flot géodésique, la caractéristique d'Euler de \mathcal{S} est $-2A(\Gamma)$ et son genre $I(\Gamma)$.

Démonstration :

Commençons par montrer que si \mathcal{S} est négative, alors le point $(0,0)$ est à l'intérieur ou sur la frontière de $\text{Polys}_S(\Gamma)$.

Soit i entre 1 et k et $z \in I_{i-1}$, on a $[\mathcal{S}_z] = v_{i1}$ d'après le lemme précédent.

Or, comme le montre le dessin suivant (obtenu en ne considérant que la partie inférieure d'une boîte hélicoïdale), \mathcal{S}_z est par définition orientée de manière à ce que $([\mathcal{S}_z], [\gamma_{i1}])$ soit directe :



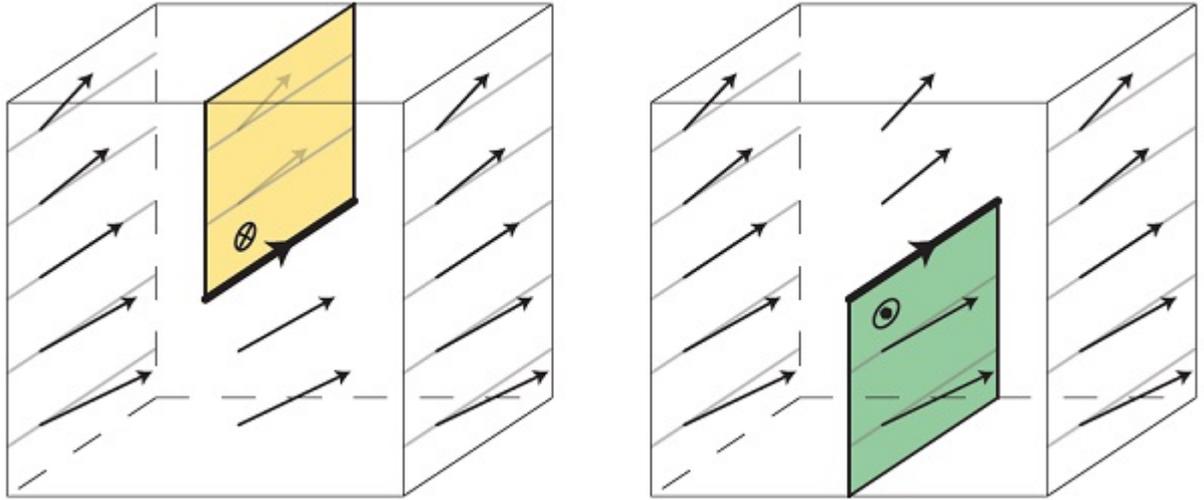
Le point $(0,0)$ est donc situé à gauche de la droite orientée dirigée par $[\gamma_{i1}]$ et passant par v_{i1} . C'est à dire du même côté de la droite que le polygone $Polys(\Gamma)$.
 Ce résultat étant vrai pour tout i entre 1 et k , on enlève pour chaque i les demis plans affines dans lesquels le point $(0,0)$ ne peut pas se trouver, il ne reste à la fin plus que le polygone $Polys(\Gamma)$. Le résultat est démontré et l'application est bien définie

Montrons maintenant la bijectivité de l'application.

La surjectivité s'obtient en suivant le chemin inverse à celui suivi au cours de l'étude. Pour un polygone convexe de \mathbb{Z}^2 contenant $(0,0)$ en son intérieur, on recolle les boîtes hélicoïdales imposées par les niveaux critiques associés au polygone et on vérifie que la surface obtenue est bien négative et transverse au flot géodésique.

L'injectivité provient du fait que les difféomorphismes de T^3 conservant les niveau conservent aussi les classes d'homologie des courbes fermées d'un niveau. Grâce aux relations entre les classes d'homologie du bord et celles des niveaux génériques d'une surface transverse, on sait que le polygone associé est entièrement déterminé par les classes d'homologie des niveaux génériques. Puisque ceux-ci sont invariants sous l'action des difféomorphismes préservant les niveau, on a le résultat.

Soit \mathcal{S} , une surface de Birkhoff négative. Comme \mathcal{S} est négativement transverse, le raisonnement précédent s'applique et le polygone $Polys(\Gamma)$ contient $(0,0)$ en son intérieur (large). De plus, la surface \mathcal{S} coupe toutes les orbites, donc toutes les courbes \mathcal{S}_z sont non vides, ce qui exclut le cas où $(0,0)$ appartient à la frontière du polygone associé. On peut aussi considérer le dessin suivant :



Le deuxième point est démontré.

Dans le cas où \mathcal{S} est positive, le raisonnement utilisé pour démontrer le premier point reste valable. Cependant, dans le cas positif, $-\mathcal{S}_z = v_{i1}$. L'orientation de v_{i1} est donc inversée.

Lorsqu'on exclu les parties du plan dans lesquelles $(0, 0)$ ne peut pas se trouver, on trouve un ensemble vide. Il y a donc contradiction et le troisième point est démontré.

On va maintenant calculer le genre et la caractéristique d'Euler d'une surface \mathcal{S} transverse au flot et de bord Γ en fonctions de l'aire $A(\Gamma)$ du polygone associé et du nombre de points entiers $I(\Gamma)$ à l'intérieur du polygone associé.

La surface \mathcal{S}_- dans une boîte hélicoïdale négative est composée d'un disque topologique, de huit arêtes, dont sept sur la frontière qui sont communes à deux boîtes, et de huit sommets, dont deux sont communs à deux boîtes, et six à quatre boîtes. Par conséquent, la contribution d'une boîte hélicoïdale à la caractéristique d'Euler vaut $1 - (1 + 7/2) + (2/2 + 6 : 4)$, soit -1 .

Or, d'après le précédent, le nombre de boîtes hélicoïdales contribuant à une surface transverse \mathcal{S} est $2A(\mathcal{S})$, d'où $\chi(\mathcal{S}) = -2A(F)$.

Comme le genre de \mathcal{S} est donné par la formule $\chi(\mathcal{S}) = 2 - 2g(\mathcal{S}) - \sum n_i$, la formule de Pick sur l'aire d'un polygone entier donne la formule du genre.

Références

- [1] Pierre Dehornoy, *Invariants topologiques des orbites périodiques d'un champs de vecteur*, 2011
- [2] Anatole Katok, Boris Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, 1995
- [3] Sergey V. Matveev, *Lectures on Algebraic Topology*,
- [4] CNRS *Analysis Situs*, <http://analysis-situs.math.cnrs.fr/>, 2014
- [5] Frédéric Paulin, *Gométrie différentielle élémentaire*, 2006