

# Enlacement entre géodésiques sur une orbifold

Pierre Dehornoy<sup>a</sup>

<sup>a</sup>UMPA, Ens de Lyon  
46 allée d'Italie  
69364 Lyon

---

## Abstract

É. Ghys a suggéré que l'enlacement entre relevés de collections géodésiques homologiquement nulles sur le fibré unitaire tangent à toute orbifold orientable de dimension 2 est négatif ou nul. On annonce et esquisse ici des démonstrations dans les cas du tore plat, des orbifolds de type  $(2, q, \infty)$  et de l'orbifold de type  $(2, 3, 7)$ . On obtient comme corollaire que toute collection homologiquement nulle de géodésiques sur ces orbifolds se relève en un entrelacs bordant une section de Birkhoff du flot géodésique, et donc en un entrelacs fibré.

A conjecture of Ghys asserts that the lifts of two homologically zero collections of geodesics on an orientable 2-orbifold are always negatively linked. We sketch proofs in the cases of the flat torus, of orbifolds of type  $(2, q, \infty)$ , and of the orbifold of type  $(2, 3, 7)$ . We deduce that the lift of any homologically zero collection of geodesics bounds a cross section to the geodesic flow, and is the binding of an open book decomposition.

*Keywords:* orbifolds, geodesic flow, Birkhoff sections, templates

---

On s'intéresse ici à des orbifolds riemanniennes orientables de dimension 2, c'est-à-dire à des espaces définis localement comme quotient d'une surface riemannienne par un groupe discret d'isométries préservant l'orientation [9]. Les surfaces orientables sont un cas particulier. Le fibré unitaire tangent à une orbifold de dimension 2 est une variété de dimension 3 naturellement munie du *flot géodésique*, dont les orbites périodiques sont les relevés des géodésiques périodiques orientées [7]. Le fibré unitaire tangent est canoniquement orienté en concaténant les orientations de la base et des fibres. Cette orientation permet de définir l'enlacement entre deux courbes fermées  $K_1, K_2$  dont les classes d'homologies rationnelles sont nulles comme le nombre d'intersection entre  $K_1$  et n'importe quelle 2-chaîne rationnelle de bord  $K_2$ , la nullité homologique assurant que ce nombre ne dépend pas du choix de la 2-chaîne. S'appuyant sur l'observation de certains cas particuliers [6], É. Ghys a suggéré

---

*Email address:* pierre.dehornoy@umpa.ens-lyon.fr (Pierre Dehornoy)

**Conjecture 1.** *Soit  $\Sigma$  une orbifold orientable. Soit  $\Gamma_1, \Gamma_2$  deux collections homologiquement nulles d'orbites périodiques du flot géodésique sur  $T^1\Sigma$ . Alors l'enlacement entre  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  est négatif ou nul. De plus, si les projections de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sur  $\Sigma$  se coupent, alors l'enlacement est strictement négatif.*

Dans le cas où le fibré unitaire tangent est une sphère d'homologie rationnelle (par exemple dans le cas des orbifolds de type  $(p, q, r)$ ), la conjecture 1 implique que le flot est *lévogyre* au sens de Ghys [6], c'est-à-dire qu'il existe une biforme d'enlacement de Gauß qui est strictement positive en chaque paire de points distincts de  $T^1\Sigma$  dans la direction du flot géodésique.

Si  $\Sigma$  est une sphère à courbure constante, alors  $T^1\Sigma$  est difféomorphe à  $SO_3$ , quotient de  $S^3$  par  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Les orbites du flot géodésique sont les cercles de l'image-miroir de la fibration de Hopf, lesquels s'enlacent toujours négativement. La conjecture est donc trivialement vraie pour une sphère ronde.

Si  $\Sigma$  est la surface modulaire  $\mathbb{H}^2/PSL_2(\mathbb{Z})$ , à savoir une orbifold hyperbolique ayant un cusp et deux points singuliers d'ordres 2 et 3, alors son fibré unitaire tangent est difféomorphe au complémentaire d'un nœud de trèfle dans  $S^3$ . Si on le compactifie en rajoutant le trèfle, un théorème de Ghys [5] affirme les orbites périodiques du flot géodésique coïncident avec les nœuds de Lorenz. Comme l'enlacement entre deux nœuds de Lorenz est toujours strictement négatif, la conjecture est également vraie dans ce cas.

Une *section de Birkhoff* pour un flot non singulier dans une variété tridimensionnelle compacte est une surface dont le bord est constitué d'un nombre fini d'orbites périodiques, et dont l'intérieur est transverse au flot et coupe toutes les orbites une infinité de fois.

Si  $\Sigma$  est une orbifold à courbure négative, alors le flot géodésique sur  $T^1\Sigma$  est de type Anosov, et un théorème de Fried [4] implique qu'il admet des sections de Birkhoff. Quand le flot géodésique est markovien, par exemple quand la courbure est négative, on peut lui appliquer le théorème M de l'article de Fried [3], et la seconde partie de la conjecture 1 est alors équivalente à

**Conjecture 2.** *Soit  $\Sigma$  une orbifold orientable hyperbolique. Soit  $\Gamma$  une collection homologiquement nulle d'orbites périodiques du flot géodésique sur  $T^1\Sigma$  dont la projection sur  $\Sigma$  coupe toute autre collection homologiquement nulle. Alors  $\Gamma$  borde une section de Birkhoff du flot géodésique.*

Autrement dit, il y aurait énormément de sections de Birkhoff pour le flot géodésique. Dans la suite, nous annonçons et esquissons des démonstrations des conjectures 1 et 2 pour le tore plat, pour les orbifolds de type  $(2, q, \infty)$  avec  $q \geq 3$  et pour l'orbifold de type  $(2, 3, 7)$ . Les démonstrations complètes figurent dans [2].

## 1. Tore plat

Soit  $\Lambda$  un réseau de  $\mathbb{R}^2$ . On note  $T^2$  le tore  $\mathbb{R}^2/\Lambda$  muni de la métrique euclidienne standard. Une géodésique périodique a une classe d'homologie de la forme  $(p, q)$ . Une famille  $\Gamma$  de géodésiques est homologiquement nulle si la somme des coordonnées de ses membres est nulle, et peut donc être représentée par un polygone convexe du plan à sommets entiers, noté  $Pol_\Gamma$ , dont les côtés sont les coordonnées des membres de  $\Gamma$ . L'énoncé obtenu dans ce cas contient en plus un contrôle du genre des sections de Birkhoff, de leur nombre à isotopie près et de l'enlacement entre deux familles.

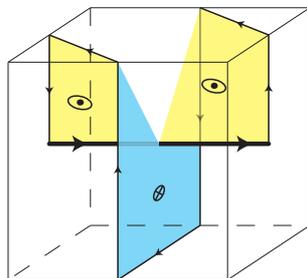


FIGURE 1: Une boîte hélicoïdale. Le flot va de gauche à droite. *An helix box. The flow goes from left to right.*

**Théorème 1.1.** *Soit  $\Gamma$  une famille homologiquement nulle d'orbites périodiques du flot géodésique sur  $T^1\mathbb{T}^2$ . Alors  $\Gamma$  borde une surface négativement transverse au flot géodésique. Le genre d'une telle surface est le nombre de points à l'intérieur du polygone  $\text{Pol}_\Gamma$ . Si elle est de genre non nul, cette surface de section coupe toutes les orbites du flot. L'enlacement entre deux familles  $\Gamma, \Gamma'$  est la différence  $\text{Aire}(\text{Pol}_\Gamma) + \text{Aire}(\text{Pol}_{\Gamma'}) - \text{Aire}(\text{Pol}_{\Gamma \cup \Gamma'})$ , laquelle est toujours négative ou nulle.*

**Esquisse de preuve.** Les ingrédients essentiels sont les boîtes hélicoïdales, introduites par J. Van Horn Morris [10] et représentées sur la figure 1. On montre qu'une surface transverse au flot est composée de telles boîtes, les tiges centrales correspondant aux bords surfaces de section. Un calcul de caractéristique d'Euler donne le genre, et un recensement des points d'intersection entre une surface de section et une famille de géodésiques permet de calculer l'enlacement entre deux familles.

## 2. Orbifaces de type $(2, q, \infty)$

Pour  $p \geq 2, q \geq 3$ , on note  $\Sigma_{p,q,\infty}$  l'orbifold hyperbolique ayant un cusp et deux points singuliers d'ordres  $p$  et  $q$ . Le fibré unitaire tangent  $T^1\Sigma_{p,q,\infty}$  est obtenu en recollant deux tores pleins, notés  $\mathcal{B}_p$  et  $\mathcal{B}_q$  (b comme "beignet"), chacun privé d'une courbe sur la frontière, et est difféomorphe au complémentaire d'un nœud torique de type  $(p, q)$  dans l'espace lenticulaire  $L_{pq-p-q,p-1}$ . La compactification naturelle pour la structure hyperbolique consiste à boucher ce nœud torique. Pour démontrer la conjecture dans ce cas, on a besoin d'une description combinatoire en termes de patrons, qui généralise le théorème de Ghys sur les nœuds modulaires et de Lorenz. Cet énoncé a été démontré simultanément, indépendamment, et façon légèrement différente par Tali Pinski dans sa thèse [8].

**Théorème 2.1.** *Soit  $\Sigma_{p,q,\infty}$  une orbifold hyperbolique. Alors il existe un patron  $\mathcal{P}_{p,q}$  plongé dans  $T^1\Sigma_{p,q,\infty}$  et composé de  $p + q - 2$  rubans tel que toute collection d'orbites périodiques du flot géodésique est isotope à une collection d'orbites périodiques du patron.*

**Esquisse de preuve.** L'idée est d'ouvrir le cusp, c'est-à-dire de déformer le revêtement universel pour l'amener sur un graphe plongé dans le plan hyperbolique. On applique

cette déformation au fibré unitaire tangent, en veillant à ce que les vecteurs pointent toujours dans la même direction à l'infini au cours de la déformation. Comme l'orbifold est hyperbolique, les géodésiques périodiques sont déterminées par leur direction à l'infini dans le revêtement universel, et donc la restriction de cette déformation aux géodésiques périodiques est une isotopie. À la fin de la déformation, le fibré tangent est contracté dans l'ensemble des fibres au-dessus d'un certain graphe, lesquelles forment alors une surface branchée qui hérite d'un semi-flot. C'est le patron annoncé.

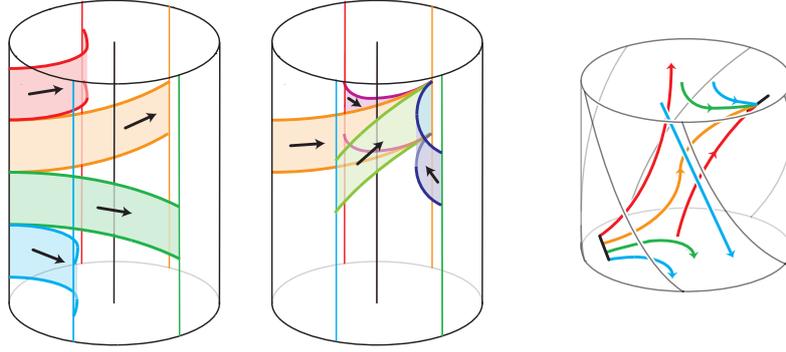


FIGURE 2: À gauche et au centre, des rubans du relevé du patron  $\mathcal{P}_{p,q}$  dans le revêtement universel  $T^1\mathbb{H}^2$ . À droite, le squelette du patron dans le tore plein  $\mathcal{B}_p$ , qui est le quotient par un vissage d'ordre  $p$  du fibré tangent à un disque, ici avec  $p = 5$ . *On the left and on the center are shown some of the ribbons of the lift of the template  $\mathcal{P}_{p,q}$  in the universal cover  $T^1\mathbb{H}^2$ . On the right, the skeleton of the template in the solid torus  $\mathcal{B}_p$ . It is the quotient by an order  $p$  screw-motion of the unit tangent bundle of a disc, with  $p = 5$  here.*

Dans le cas  $p = 2$ , étant donnée une collection  $\Gamma$  d'orbites périodiques de  $\mathcal{P}_{2,q}$ , on peut construire une 2-chaîne à coefficients rationnels de bord  $\Gamma$ . Celle-ci est composée d'une partie dans  $\mathcal{B}_p$ , d'une dans  $\mathcal{B}_q$ , et d'une à la frontière entre les deux. En majorant l'intersection entre ces deux composantes et n'importe quelle collection d'orbites du patron, on arrive à montrer la conjecture 1 pour ces orbifolds.

**Théorème 2.2.** *Soit  $q \geq 3$  un entier et  $T^1\overline{\Sigma_{2,q,\infty}}$  la compactification naturelle du fibré unitaire tangent à  $\Sigma_{2,q,\infty}$ . Alors l'enlacement entre deux collections quelconques d'orbites périodiques du flot géodésique dans  $T^1\overline{\Sigma_{2,q,\infty}}$  est strictement négatif.*

### 3. Surfaces, quotients, et orbifold de type (2, 3, 7)

Le théorème 2.1 se transpose à d'autres orbifolds, et en particulier aux surfaces de genre  $g \geq 2$ . Dans ce cas, et en partant d'un domaine fondamental à  $4g + 2$  côtés<sup>1</sup>, on construit un patron ayant  $4g(4g + 1)$  rubans, notés  $\text{Rub}_{i,j}$  et indexés par les couples

1. un domaine quelconque permet une construction similaire, mais on se sert ici d'un polygone à  $4g + 2$  côtés pour traiter ensuite le cas de l'orbifold (2, 3, 7).

d'entiers distincts entre 1 et  $4g + 2$ . On note  $i$  et  $\bar{i}$  les indices de deux côtés appariés. Étant donnée une famille  $\Gamma$  homologiquement nulle, on peut également construire une 2-chaîne bordée par  $\Gamma$ . On arrive alors à la proposition suivante.

**Proposition 3.1.** *Soit  $\Sigma$  une surface hyperbolique de genre  $g \geq 2$  et  $\mathcal{P}_g$  un patron pour le flot géodésique construit à partir d'un domaine fondamental à  $4g + 2$  côtés. Soient  $\Gamma, \Gamma'$  deux familles homologiquement nulles d'orbites périodiques de  $\mathcal{P}_g$ . Pour  $1 \leq i \neq j \leq 4g + 2$ , on note  $b_{i,j}$  et  $b'_{i,j}$  le nombre de fois que les familles  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  empruntent le ruban  $\text{Rub}_{i,j}$ . Alors l'enlacement entre  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  est majoré par la forme bilinéaire  $q_{\text{Enl}}(\Gamma, \Gamma') = \sum_{i \neq j, k \neq l} a_{i,j,k,l} b_{i,j} b'_{k,l}$ , où  $a_{i,j,k,l}$  vaut*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\{i < k < l \leq j\} + \{k < i < j \leq l\}) \\ - & \frac{1}{16} (\{k \neq i, j\} + \{k \neq \bar{i}, \bar{j}\} + \{l \neq i, j\} + \{l \neq \bar{i}, \bar{j}\}) \\ + & \frac{(2g-1)}{8(g-1)(2g+1)^2} ((j-i)[4g+2] - 2g-1)((k-l)[4g+2] - 2g-1). \end{aligned}$$

Contrairement au cas des orbifolds  $(2, q, \infty)$ , cette forme bilinéaire n'est pas négative, et donc la majoration n'est pas suffisante pour démontrer la conjecture 1.

L'orbifold  $\Sigma_{2,3,7}$  est un quotient d'ordre 168 d'une surface de genre 3, et  $T^1\Sigma_{2,3,7}$  est un quotient d'ordre 168 de  $T^1\Sigma(3)$ . Une collection  $\Gamma$  d'orbites périodiques sur  $T^1\Sigma_{2,3,7}$  se relève en une collection  $\tilde{\Gamma}$  de  $T^1\Sigma(3)$  qui est riche en symétrie. Dans [2], on exploite ces symétries et restreint l'ensemble des valeurs prises par la famille  $b_{i,j}$  associée à un cône. On montre ensuite que la restriction de la forme  $q_{\text{Enl}}$  à ce cône est négative. On en déduit que la conjecture 1 est vraie pour l'orbifold de type  $(2, 3, 7)$ .

**Théorème 3.2.** *L'enlacement entre deux collections quelconques d'orbites périodiques du flot géodésique dans  $T^1\Sigma_{2,3,7}$  est strictement négatif.*

## Références

- [1] G. BIRKHOFF, *Dynamical systems with two degrees of freedom*, Trans. of the Amer. Math. Soc. **18** (1917) 199–300.
- [2] PI. DEHORNOY, *Invariants topologiques des orbites périodiques d'un champ de vecteurs*, Thèse, ÉNS Lyon (2011).
- [3] D. FRIED, *The geometry of cross sections to flows*, Topology **21** (1982) 353–371.
- [4] D. FRIED, *Transitive Anosov flows and pseudo-Anosov maps*, Topology **22** (1983) 299–303.
- [5] É. GHYS, *Knots and dynamics*, Proc. of the Int. Cong. of Mathematicians **I**, Eur. Math. Soc., Zürich (2007) 247–277.
- [6] É. GHYS, *Right-handed vector fields & the Lorenz attractor*, Japan. J. Math. **4** (2009) 47–61.
- [7] J. M. MONTESINOS, *Classical tessellations and three-manifolds*, Universitext (1987) 230 pp.
- [8] T. PINSKY, *Templates for geodesic flows*, Ph.D Thesis, Technion, Haifa (2011).
- [9] W. THURSTON, *The topology and geometry of three-manifolds* (1980).
- [10] J. VAN HORN MORRIS, *Constructions of open book decompositions*, Ph.D Thesis, University of Texas, Austin (2007).