

NŒUDS DE LORENZ

PIERRE DEHORNOY

MÉMOIRE DE MASTÈRE 2 RECHERCHE DE MATHÉMATIQUES
SOUS LA DIRECTION D'ÉTIENNE GHYS

1. INTRODUCTION

Les nœuds de Lorenz ont été introduits en 1983 par J. Birman et R. Williams dans [1]. Dans cet article, les auteurs montrent que l'attracteur étrange de Lorenz, défini par les équations

$$(1.1) \quad \dot{x} = -10x + 10y, \dot{y} = rx - y - xz, \dot{z} = -8/3z + xy,$$

où r est un paramètre réel qu'on choisit aux environs de 24, admet des orbites périodiques, et que celles-ci admettent une description combinatoire particulièrement élégante, à l'aide d'un objet simple : le *patron de Lorenz*.

Les nœuds de Lorenz ont fait une nouvelle apparition en 2006 avec la découverte de É. Ghys montrant que ces mêmes nœuds apparaissent comme orbites périodiques du flot modulaire défini sur la surface $SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z})$ ([8], [9]). Cette découverte mettant en relation des objets d'origine *a priori* très différentes (les orbites périodiques d'un système d'équations différentielles dans \mathbb{R}^3 et les orbites périodiques du flot modulaire d'origine plus arithmétique) a relancé l'intérêt autour des nœuds de Lorenz.

Ce mémoire a pour but d'étudier quelques propriétés des nœuds de Lorenz. Dans un premier temps on va redéfinir ces nœuds et donner quelques statistiques effectuées à l'aide de programmes écrits avec les langages Ocaml et Mathematica. Ensuite nous ferons une excursion arithmétique exhibant une bijection inattendue entre classes d'idéaux d'un corps quadratique et nœuds de Lorenz. Enfin, nous étudierons les signatures, et même les ω -signatures, des nœuds de Lorenz. Ceci nous permettra de montrer que, modulo une restriction sur les nœuds considérés, chaque nœud n'apparaît qu'un nombre fini de fois comme orbite périodique du flot défini sur le patron de Lorenz (théorèmes 6.6 et 7.5).

2. DESCRIPTION COMBINATOIRE DES NŒUDS DE LORENZ

Nous définissons les nœuds de Lorenz et en donnons une description combinatoire simple.

Date: 1er septembre 2007.

Key words and phrases. knot, Lorenz attractor, braid, quadratic field, signature.

Merci à Étienne Ghys de m'avoir accueilli, encadré, conseillé lors de ce passionnant stage de M2.

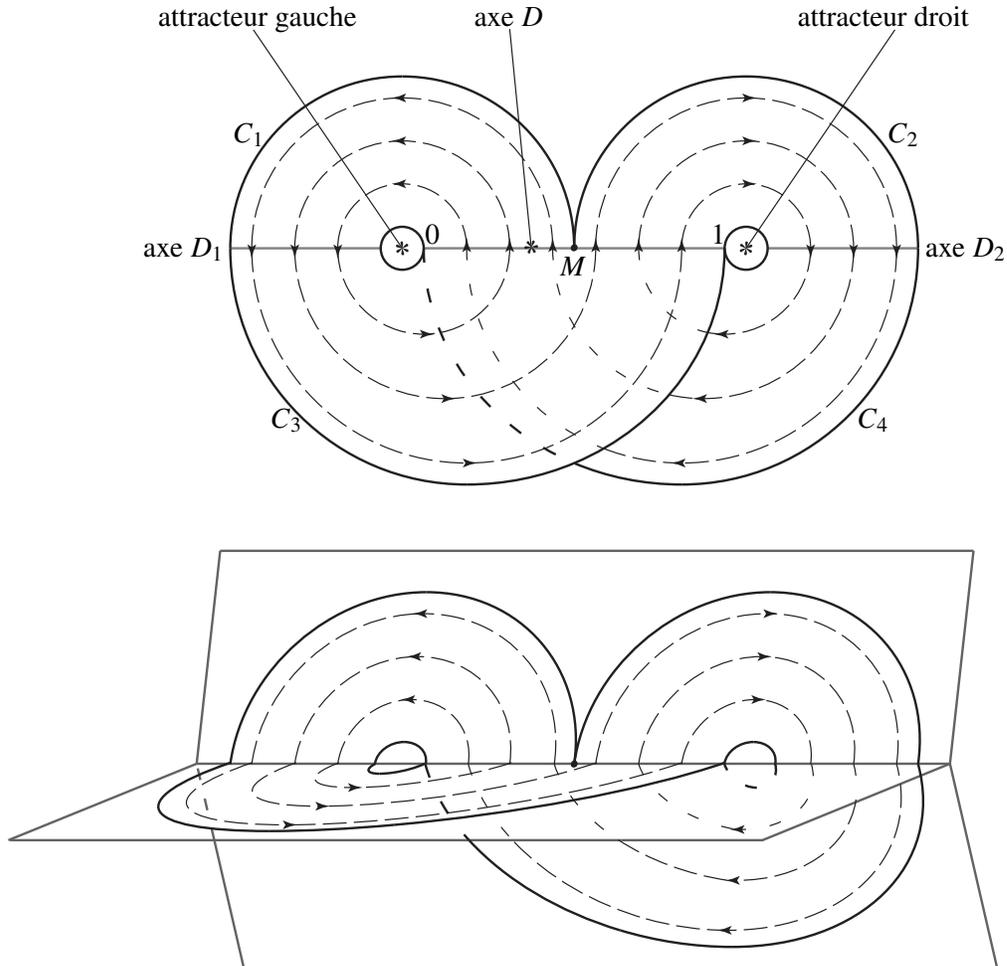


FIG. 1.1. Le patron de Lorenz. Le dessin du haut représente le patron vu dans un plan horizontal. Les segments D, D_1 et D_2 sont les axes de recollement des demi-couronnes C_1, \dots, C_4 , le segment D étant l'axe de branchement du patron. Le flot de Lorenz est figuré en pointillés. L'abscisse du point M est $1/2$, la surface s'y sépare et le flot n'y est pas défini. Le dessin du bas montre le patron sous forme de livre à trois pages.

2.1. Le patron de Lorenz. Le *patron de Lorenz* est la surface de \mathbb{R}^3 montrée sur la figure 1.1. On l'obtient à partir de 4 demi-couronnes ouvertes C_1, \dots, C_4 , munies chacune d'un flot orthoradial. On les recolle le long de 3 axes D, D_1 et D_2 . La surface obtenue est ouverte, branchée le long de l'axe D , et munie d'un flot appelé *flot de Lorenz*. Celui-ci est défini en tout point, sauf au point M où la surface se sépare. En suivant le flot à partir d'un point x de l'axe D différent de M , on recoupe D après un temps fini. On peut alors identifier l'axe D au segment $]0, 1[$ de sorte que l'abscisse de M soit $1/2$ et que l'application de premier retour sur l'axe D en suivant le flot soit $x \mapsto 2x \pmod{1}$. On la notera *pr*.

En partant du point de D d'abscisse $1/7$ on remarque que le flot fait le tour de l'attracteur gauche du patron, passe par le point $2/7$, puis repasse par la boucle gauche pour arriver au point $4/7$, puis suit la boucle droite, et revient enfin au point $1/7$. Plus généralement nous allons voir que le flot de Lorenz contient une infinité d'orbites périodiques. Sur la figure 1.1 sont représentées les orbites partant des points d'abscisses $1/7$ et $3/7$.

Définition 2.1. Un nœud K est appelé *nœud de Lorenz* s'il existe une orbite périodique γ du flot de Lorenz sur le patron de Lorenz isotope à K . On appelle *période* de l'orbite γ le nombre d'intersections de γ avec l'axe D du patron.

Remarque 2.2. La classe d'isotopie d'une orbite périodique du flot de Lorenz dépend du plongement dans \mathbb{R}^3 du template. Par exemple si les demi-couronnes C_1, \dots, C_4 sont imbriquées les unes dans les autres, les classes d'isotopies des orbites ne sont pas les mêmes que pour le plongement représenté sur la figure 1.1. Dans ce mémoire, et plus généralement quand on parle de nœuds de Lorenz, on ne s'intéresse qu'au plongement du patron de Lorenz montré sur la figure 1.1.

Soit γ une orbite coupant l'axe D en n points et soit x l'abscisse d'un point d'intersection de γ avec D . Alors la condition $pr^n(x) = x$ se reformule en $2^n x = x \pmod{1}$, soit $x = \frac{p}{2^n - 1}$ pour un certain p entier. Les abscisses des points d'intersection de γ avec l'axe D sont alors les $\frac{2^i p}{2^n - 1} \pmod{1}$.

Proposition 2.3. Si on suit une orbite γ du flot de Lorenz à partir du point de l'axe D d'abscisse x et si on définit s comme la suite finie de 0 et de 1 obtenue en notant 0 lorsqu'on fait le tour de l'attracteur de gauche et 1 lorsqu'on contourne celui de droite, alors $\overline{0, sss \dots}^{(2)}$ coïncide avec le développement dyadique de x .

Exemple 2.4. En partant du point $1/7$, le flot fait deux fois le tour de l'attracteur gauche et passe par les points $2/7$ et $4/7$, puis fait le tour de l'attracteur droit et retourne au point $1/7$. Le nœud obtenu coupe 3 fois l'axe D et on a bien $7 = 2^3 - 1$. La suite s obtenue est 001, et le développement dyadique de $1/7$ est bien $\overline{0, 001001001 \dots}^{(2)}$. Notons que le nœud obtenu est le nœud trivial. Le premier exemple de nœud non trivial est obtenu en partant du point $5/31$. On passe alors par les points $10/31, 20/31, 9/31, 18/31$ avant de retomber sur $5/31$. Nous verrons plus loin que le nœud obtenu est le nœud de trèfle.

On remarque le fait suivant. Le développement en base 2 de x est périodique de période n , le développement de l'abscisse du i -ième point d'intersection $pr^i(x)$ de γ avec l'axe D est obtenu à partir de celui de x en appliquant i fois l'opération shift, c'est-à-dire en décalant la virgule de i chiffres vers la droite, et en tronquant la partie entière. Le fait que le développement de x est de période n est cohérent avec l'égalité $pr^n(x) = x$.

Nous avons alors un moyen combinatoire pour engendrer les nœuds de Lorenz. On parcourt de manière systématique l'ensemble des suites finies de 0 et de 1, et pour chaque suite s on considère le nœud obtenu à partir du point d'abscisse $\overline{0, sss \dots}^{(2)}$. Bien sûr les orbites correspondant à toutes les puissances s^2, s^3, \dots de s sont les mêmes que celles de s , tout comme les orbites correspondant à toutes les suites obtenues à partir de s par permutation circulaire.

Dans la suite, plutôt que de parler de 0 et de 1 qu'on pourrait confondre avec d'autres notations, nous parlerons de x et de y pour décrire des tours autour de l'attracteur gauche ou autour de l'attracteur droit.

Définition 2.5. Un mot w sur l'alphabet $\{x, y\}$ est dit *de Lorenz* si w est un mot fini, w n'est pas décomposable, c'est-à-dire puissance d'un sous-mot w' , et w est inférieur à tous ses shifts pour l'ordre lexicographique.

Par exemple le mot de Lorenz correspondant au point $1/7$, et donc à l'orbite partant de ce point, est xyx , le mot correspondant au point $5/31$ est $xyxyxy$.

2.2. Tresses de Lorenz. Une question naturelle est de décrire les nœuds de Lorenz obtenus. D'après un théorème de Markov, tout nœud peut se décrire comme la clôture d'une tresse, et, avec le dessin du patron de la figure 1.1, une première tresse apparaît naturellement. On appelle *tresse de permutation* une tresse dont tous les croisements sont positifs, et dont deux brins quelconques se coupent une fois au plus.

Proposition 2.6. Soit K est un nœud de Lorenz coupant n fois l'axe D et coupant p fois la partie $]0, 1/2[$ de cet axe. Alors K est la clôture d'une tresse de permutation à n brins, dite *tresse de Lorenz*. La permutation π associée, dite *permutation de Lorenz*, est telle que

$$\pi(1) < \pi(2) < \dots < \pi(p) = n > \pi(n) > \pi(n-1) > \dots > \pi(p+1) = 1.$$

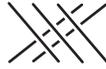


FIG. 2.1. La tresse de Lorenz associée au point $5/31$ et au mot $xyxyxy$. On a $n = 5$ et $p = 3$. La permutation π correspondante est (13524) . Le nœud correspondant est le nœud de trèfle.

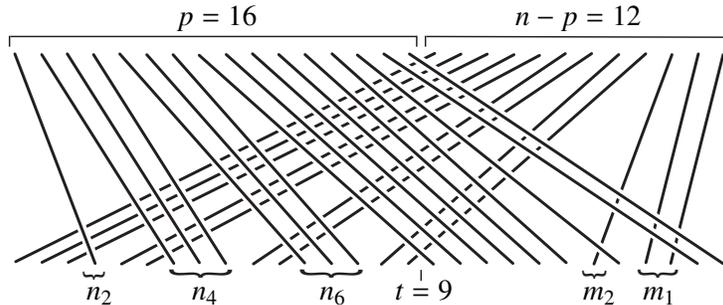


FIG. 2.2. Un exemple de tresse de Lorenz. Les p premiers brins vont vers la droite et les $n - p$ derniers vont vers la gauche en passant sous les premiers. Le pas est le nombre de brins du premier groupe qui finissent dans le second groupe. L'indice n_i est le nombre de brins du premier groupe qui passent sur $i + 1$ brins du second groupe, l'indice m_j est le nombre de brins du second groupe qui passent sous $j + 1$ brins du premier groupe.

Nous sautons la démonstration (voir [1]) qui ne présente pas de difficulté, il s'agit de décrire en termes de tresses la partie centrale de patron de Lorenz tel qu'il est représenté sur la figure 1.1

2.3. Tresses de Birman-Williams. En pratique la tresse de Lorenz décrite dans le théorème 2.6 n'est pas optimale pour les calculs car elle a beaucoup de brins et relativement peu de croisements. Pour chaque orbite γ tracée sur le patron de Lorenz associée à un nœud K , en déformant un peu le patron comme sur la figure 2.3, on voit apparaître une autre tresse dont la clôture est K . Pour la décrire on doit d'abord définir ce qu'est le pas d'une orbite de Lorenz.

Définition 2.7. Soit γ une orbite spécifiée par un mot de Lorenz w , on appelle *pas* de l'orbite γ le nombre de syllabes xy dans w .

Sur la figure 2.2 le pas correspond au nombre de brins traversant, dans chaque sens, la ligne imaginaire séparant les p premiers brins des $n - p$ derniers. Le théorème suivant améliore la proposition 2.6, au sens où la tresse obtenue a (un peu) moins de croisements et beaucoup moins de brins que la tresse de Lorenz. La démonstration (voir [1]) donne une description de l'image de la tresse de Lorenz, montrée sur la figure 2.2, quand on la déforme selon le schéma indiqué sur la figure 2.3.

Théorème 2.8. Soit γ une orbite périodique du flot de Lorenz de pas t et de permutation associée π , soit K le nœud associé. On note Δ_t^2 la tresse $(\sigma_1 \dots \sigma_{t-1})^t$ correspondant à un tour complet des brins sur eux-mêmes. Soit b la tresse à t brins définie par

$$(2.1) \quad \Delta_t^2 \prod_{i=1}^{t-1} (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_i)^{n_i} \prod_{i=t-1}^1 (\sigma_{t-1} \dots \sigma_i)^{m_{t-i}},$$

où les exposants valent

$$(2.2) \quad n_i = \text{card}\{j \mid \pi(j) - j = i + 1 \text{ et } \pi(j) < \pi^2(j)\}$$

$$(2.3) \quad m_i = \text{card}\{j \mid j - \pi(j) = i + 1 \text{ et } \pi(j) > \pi^2(j)\}.$$

Alors la clôture \hat{b} de la tresse b est isotope à K .

La tresse ainsi obtenue est appelée *tresse de Birman-Williams*.

Exemple 2.9. Revenons à l'orbite partant du point 5/31. Le mot associé est $xyxy$, le pas vaut donc 2. La permutation est (13524), le seul indice non nul dans la tresse de Birman-Williams est alors n_1 qui vaut 1, et donc la tresse de Birman-Williams associée est σ_1^3 , dont la clôture est le nœud de trèfle. On en déduit que l'orbite partant du point 5/31 est un nœud de trèfle.

De la façon dont il est défini, le pas d'une orbite pourrait dépendre de l'orbite et non de son type d'isotopie, c'est-à-dire que deux orbites distinctes pourraient avoir le même type d'isotopie sans avoir le même pas. En fait il n'en est rien comme l'affirme le théorème suivant dû à Franks et Williams (voir [6] et la section 5).

Théorème 2.10. Soit K un nœud qui est la clôture d'une tresse positive b à t brins et contenant un facteur Δ_t^2 . Alors l'indice de tresse de K est égal à t , c'est-à-dire que toute tresse dont la clôture est K a au moins t brins.

La démonstration de ce théorème fait l'objet de la section 5. Il s'applique ici aux tresses de Birman-Williams, on en déduit que le pas d'une orbite est égal à l'indice de tresse du nœud correspondant.

Corollaire 2.11. Le pas est un invariant des nœuds de Lorenz.

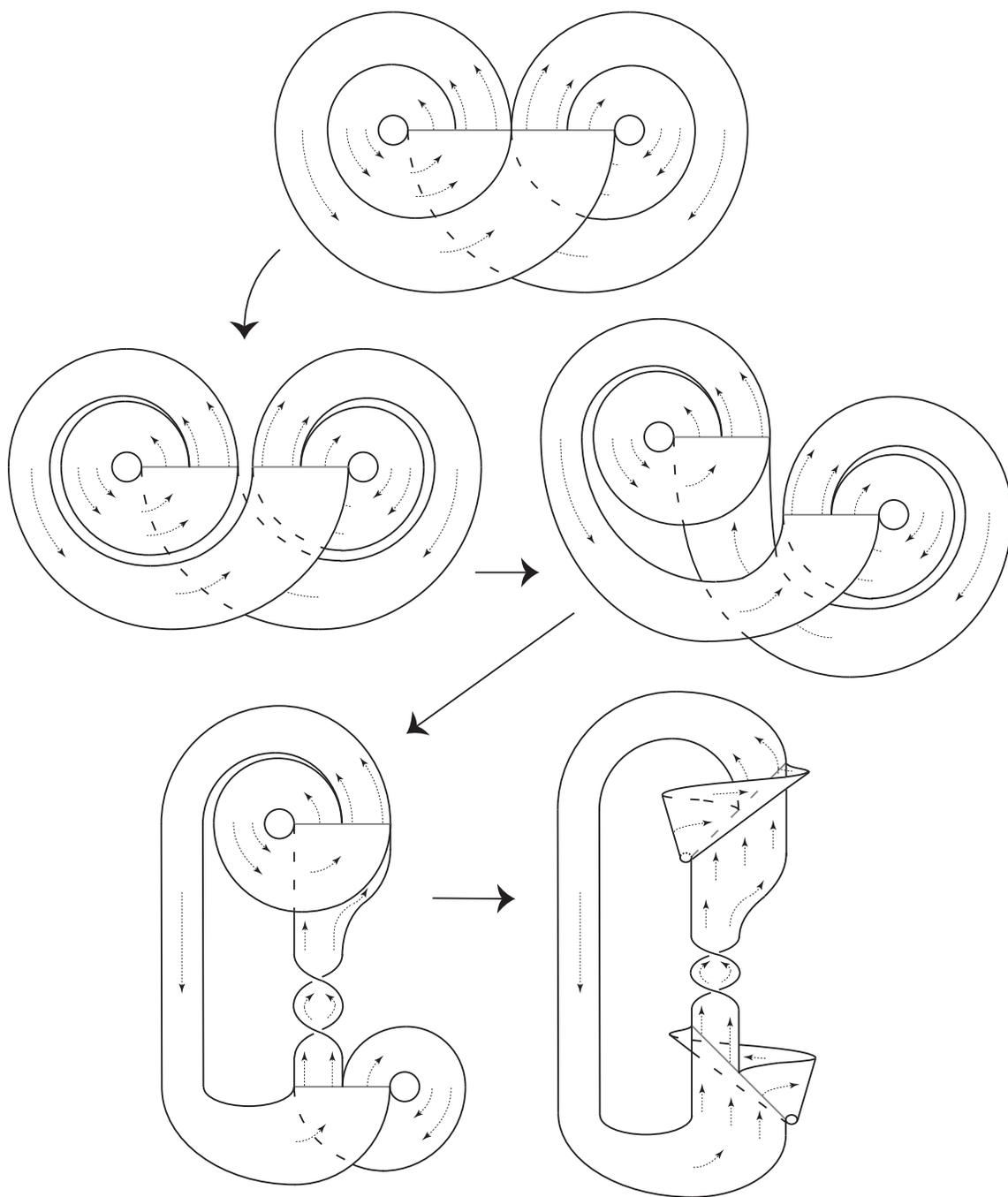


FIG. 2.3. Le patron de Lorenz déformé pour que le flot soit ascendant sur la branche droite et descendant sur la branche gauche.

2.4. Mots de Lorenz minimaux. On introduit ici la notion de mot de Lorenz minimal qui permet de restreindre le nombre de mots à considérer pour étudier de manière systématique, en particulier informatique, les nœuds de Lorenz.

Le mouvement de Markov sur une tresse b à n brins consistant à rajouter un $n + 1$ -ième brin et un croisement $\sigma_n^{\pm 1}$ sans changer le nœud considéré (voir figure 5.2) peut s'appliquer sur les tresses de Lorenz. En effet si b est une tresse de Lorenz à n brins, $b\sigma_n$ est une tresse de Lorenz à $n + 1$ brins dont la clôture est la même que celle de b . On peut de même faire un mouvement de Markov à gauche, en notant \tilde{b} la tresse b où tous les indices ont été augmentés de 1, la tresse $\tilde{b}\sigma_1$ est aussi une tresse de Lorenz dont la clôture est la même que celle de b . Ces mouvements de Markov reviennent à rajouter une petite boucle faisant le tour d'un des deux points attractifs de l'attracteur de Lorenz à la partie de l'orbite passant le plus près de ce point attractif. Cela augmente la période de 1 sans changer le nœud considéré. Sur la permutation de Lorenz, cela revient à rajouter un $n \mapsto n + 1$ en queue de la permutation et à transformer le $n \mapsto i$ en $n + 1 \mapsto i$ dans le premier cas, et à rajouter un $1 \mapsto 2$ en tête et à incrémenter tous les indices dans le second cas. On voit que la tresse de Birman-Williams considérée est inchangée, puisque les formules donnant les m_i et les n_i pour $i \geq 1$ sont inchangées par ces opérations, et que seuls m_0 et n_0 sont modifiés, mais ils n'interviennent pas dans (2.1). Pour décrire l'opération correspondant sur les mots de Lorenz, on a besoin d'introduire un ordre sur les lettres d'un mot de Lorenz.

Définition 2.12. Soit w un mot de Lorenz, on dit qu'une lettre l_1 de w est inférieure à une lettre l_2 dans l'ordre des shifts si le mot w_1 obtenu par permutation circulaire des lettres de w et commençant par la lettre l_1 est inférieur dans l'ordre lexicographique au mot w_2 obtenu par permutation circulaire et commençant par la lettre l_2 .

On obtient ainsi un ordre sur les lettres d'un mot de Lorenz. Par exemple sur les mots $x_1x_3y_5x_2y_4$ et $x_1x_2x_3x_5y_9x_6y_{10}y_8x_4y_7$, on a indiqué en indice l'ordre des lettres relativement à l'ordre des shifts. On note que le dernier y de $xyxy$ dans l'ordre des shifts est le premier et non le dernier dans le sens de lecture du mot. Remarquons que si on ne garde que les indices et on supprime les x et les y dans la notation précédente, on retrouve la permutation de Lorenz. Si on remplace les x par des 0 et les y par des 1, on rappelle que l'abscisse des points d'intersection de l'orbite γ correspondante au mot w sont les $\overline{0, sww \dots}^{(2)}$, où s est un suffixe de w . L'ordre des shifts sur les lettres correspond à l'ordre selon lequel on rencontre les points d'intersection de γ avec D quand on parcourt le segment D de 0 à 1.

L'invariance des nœuds de Lorenz par les mouvements de Markov décrits précédemment se traduit en terme de mots de Lorenz.

Proposition 2.13. Soit w un mot de Lorenz, on ne change pas la classe d'isotopie de l'orbite de Lorenz correspondante en ajoutant une (et donc autant qu'on veut) lettre x à l'emplacement de la première lettre de w dans l'ordre des shifts. De même on ne change pas la classe d'isotopie de l'orbite en insérant une (et donc plusieurs) lettre y à l'emplacement de la dernière lettre de w dans l'ordre des shifts.

Par exemple le nœud correspondant à $xyxy$ (nœud de trèfle) est le même que celui correspondant à $xxxyxy$, $xxxxxyxy$, $xyyyxy$ ou encore $xxxxxyyyxy$.

Comme on peut ajouter indéfiniment des x et des y à un mot de Lorenz sans changer le type de nœud correspondant, on en déduit que tout nœud apparaissant comme nœud de Lorenz apparaît

une infinité de fois comme orbite périodique du flot de Lorenz. Cependant, pour éviter les redondances on considère désormais uniquement les mots de Lorenz ayant une propriété de minimalité au sens suivant.

Définition 2.14. Un mot de Lorenz w est dit *minimal* si, quand on ôte soit le premier x , soit le dernier y dans l'ordre des shifts, le mot n'est plus admissible ou l'ordre lexicographique des shifts change.

Par exemple le mot $xyxyxy$ n'est pas minimal, puisque si on lui ôte son dernier y dans l'ordre des shifts, on obtient $xyxyx$, et les permutations associées sont (135624) et (13524), la seconde étant obtenue à partir de la première en ôtant l'indice 6. De même le mot $xxxyxy$ n'est pas minimal, puisque si on lui ôte le premier x , on obtient le mot $xyxyx$, et les permutations associées sont (124635) et (13524), la seconde étant obtenue à partir de la première en ôtant l'indice 1 et en diminuant les autres de 1. Par contre $xyxyxy$ est minimal, puisque $xyxy = (xy)^2$ n'est plus un mot de Lorenz admissible et $xxxy$ n'admet pas le même ordre des shifts, en effet la permutation associée à $x_1x_3y_5x_2y_4$ est (13524) alors que celle qui est associée à $x_1x_2x_3y_4$ est (1234), et elle n'est pas déduite de (13524) en en supprimant un chiffre.

En ne considérant que des mots de Lorenz minimaux, on supprime pour chaque nœud de Lorenz nombre d'apparitions du nœud comme orbite périodique qui ne sont qu'échos d'apparitions correspondant à des mots minimaux. La question de savoir si un nœud apparaît une infinité de fois se repose, d'où la définition suivante.

Définition 2.15. On appelle *bande d'apparition* d'un nœud K l'ensemble des entiers l pour lesquels il existe un mot de Lorenz minimal de longueur l ayant K pour nœud de Lorenz associé.

Nous montrerons à la section 6 que la bande d'apparition de tout nœud de Lorenz est finie. Cela montre en particulier que tout nœud n'apparaît sous forme minimale qu'un nombre fini de fois comme orbite périodique du flot de Lorenz.

3. STATISTIQUES

Nous avons fait des calculs sur les nœuds de Lorenz. À l'aide d'un premier programme écrit en Ocaml, nous avons engendré les 29550 mots de Lorenz minimaux de longueur inférieure ou égale à 21, puis calculé la permutation correspondante, et la tresse de Birman-Williams associée. Ensuite, à l'aide du package KnotTheory de Mathematica, nous avons calculé trois invariants des nœuds associés : la signature, le polynôme d'Alexander Δ_K et le polynôme de Jones V_K . Nous avons ainsi obtenu un atlas de nœuds. Dans cet atlas, consultable sur internet [4], des nœuds indistingables par les trois invariants précédents apparaissent confondus. Les résultats sont présentés sous une forme de dictionnaire, où pour chaque nœud, on a indiqué sa signature, son polynôme d'Alexander, son polynôme de Jones, puis l'ensemble des mots de Lorenz minimaux associés, et pour chaque mot la trace de la classe de conjugaison de matrices de $SL_2(\mathbb{Z})$ associée, c'est-à-dire la longueur de la géodésique associée de la surface modulaire – voir la partie 4 pour plus d'explications sur les matrices et la surface modulaire.

3.1. Résultats des calculs. Comme l'atlas a une taille de plus de 2,6 Mo, il est impossible de le reproduire ici. Les principaux résultats statistiques qu'on a pu en extraire sont résumés dans les 5 tableaux ci-dessous.

Sur les 2981 nœuds obtenus, seuls 3 polynômes d'Alexander sont partagés par 2 nœuds, et 24 polynômes de Jones sont partagés par 2 nœuds. Quant à la signature, elle est paire et varie de 2 à 54. La ligne du tableau 3.1 sur l'exposant minimal du polynôme de Jones montre une progression quadratique remarquable.

Proposition 3.1. *L'exposant minimal du polynôme de Jones d'un nœud de pas t est supérieur ou égal à $t(t - 1)/2$.*

Démonstration. Un mot correspondant à ce nœud est $x(xy)^t$, la tresse correspondante est alors $(\sigma_1 \dots \sigma_{t-1})^{t+1}$, et les relations d'écheveau calculant le polynôme de Jones montrent que l'exposant minimal du polynôme de Jones est bien $t(t - 1)/2$. Or la tresse $(\sigma_1 \dots \sigma_{t-1})^{t+1}$ est la plus courte tresse positive possible pour un nœud de pas t , et donc tous les exposants apparaissant dans le polynôme de Jones d'un nœud de pas t sont supérieurs ou égaux à $t(t - 1)/2$. \square

pas	2	3	4	5	6	7	8	9	10
nombre de nœuds	9	56	319	873	1045	537	122	15	1
largeur max de la bande d'apparition	1	3	5	4	4	4	3	2	1
exposant minimal de Δ_K	-9	-17	-24	-30	-35	-39	-42	-44	-45
exposant maximal de Δ_K	9	17	24	30	35	39	42	44	45
nombre moyen de monômes de Δ_K	11.0	16.9	23.1	29.6	35.1	39.5	41.3	42.5	19
moyenne des coefficients de Δ_K	1.0	1.5	1.6	1.6	1.6	1.5	1.3	1.0	1.0
moyenne des coeff maximaux de Δ_K	1.0	2.5	3.0	3.3	3.2	2.8	2.2	1.3	1.0
exposant minimal de V_K	1	3	6	10	15	21	28	36	45
exposant maximal de V_K	28	37	49	59	66	73	77	79	64
nombre moyen de monômes de V_K	11.0	9.4	16.0	15.3	20.9	18.9	24.1	14.6	11.0
moyenne des coefficients de V_K	1.0	1.6	1.7	1.9	1.8	1.7	1.6	1.0	1.0
moyenne des coeff maximaux de V_K	1.0	2.0	2.9	3.7	3.8	3.5	2.9	1.2	1.0

FIG. 3.1. Caractéristiques des nœuds de Lorenz en fonction du pas. Δ_K désigne le polynôme d'Alexander, V_K le polynôme de Jones.

largeur de la bande d'apparition	1	2	3	4	5	6
nombre de nœuds	1338	894	670	72	3	0

FIG. 3.2. Nombre de nœuds de Lorenz de période inférieure ou égale à 21 ayant une largeur d'apparition donnée.

À partir de nos statistiques, on peut aussi faire des graphes d'apparition des nœuds de Lorenz : pour chaque nœud, on note l'ensemble des mots minimaux correspondants et leurs longueurs. Cela permet de construire le graphe de la figure 3.3, construit en choisissant 5 nœuds aléatoirement. L'opération répétée conduit à des graphes toujours du même type : la largeur de la bande d'apparition des nœuds n'excède pas 5, et leur répartition dans cette bande a toujours des allures de cloche. Nous prouverons dans la partie 6.2 que la largeur de la bande d'apparition est toujours finie.

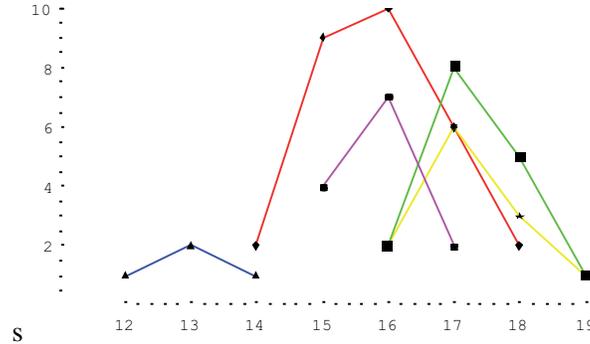


FIG. 3.3. Bande d'apparition de 5 noeuds de Lorenz choisis aléatoirement. En abscisses la longueur des mots minimaux, en ordonnées le nombre de mots engendrant un même noeud.

3.2. Comparaison entre noeuds de Lorenz et noeuds aléatoires. Dans les tableaux suivants on compare certaines caractéristiques des polynômes des noeuds de Lorenz avec ceux de noeuds correspondant à des tresses aléatoires comparables : on a regroupé des noeuds de Lorenz dans les catégories suivantes : pas allant de 3 à 5 (correspondant à des tresses à 3, 4 et 5 brins), puis nombre de croisements dans la tresse de Lorenz égal à 10, 20, 30 ou 40 (à 5 près). Pour chacune de ces 12 catégories, on a choisi aléatoirement 100 tresses positives ayant les mêmes caractéristiques, et 100 tresses positives commençant par un facteur Δ_7^2 . Les résultats figurent dans les tableaux 3.4, 3.5 et 3.6.

On remarque sur ces tableaux que, si le nombre de monômes des polynômes des noeuds qui apparaissent n'est pas franchement plus faible pour les noeuds de Lorenz par rapport à des noeuds aléatoires, la taille des coefficients qui apparaissent est significativement plus faible. Pour le polynôme d'Alexander comme pour le polynôme de Jones, la taille maximale des coefficients tourne autour de 3, alors que pour des tresses aléatoires, elle augmente pour atteindre plusieurs centaines pour des noeuds à 40 croisements. Il y a donc ici une caractéristique très particulière des noeuds de Lorenz, qui ne se réduit pas à être des tresses positives contenant un facteur Δ_7^2 .

4. NŒUDS DE LORENZ, CLASSES DE SIMILITUDE ET CLASSES D'IDÉAUX

Dans cette partie on explique d'une part le lien entre classes d'idéaux dans l'anneau des entiers d'un corps quadratique et matrices 2×2 entières, décrit dans [2], et d'autre part le lien entre matrices 2×2 entières et noeuds de Lorenz décrit dans [8] et [9].

Soit α un nombre algébrique de degré 2 sur \mathbb{Q} et f le polynôme minimal de α . Si f est unitaire à coefficients entiers, on peut lui associer l'ensemble \mathcal{M}_f des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ annulant f , c'est-à-dire, pour $f(x) = x^2 - t \cdot x + d$, l'ensemble \mathcal{M}_f des matrices entières de trace t et de déterminant d .

Si le discriminant $t^2 - 4d$ est positif, les matrices de \mathcal{M}_f sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et il n'y a donc qu'une classe de conjugaison sous l'action de $SL_2(\mathbb{R})$. Par contre sous l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$, les choses sont plus compliquées.

4.1. Classes de conjugaison dans $SL_2(\mathbb{Z})$. On va déterminer les classes de conjugaison dans $SL_2(\mathbb{Z})$. Pour cela on part d'une présentation simple du groupe $PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm Id\}$.

Nœuds de Lorenz				
nombre de croisements	6-15	16-25	26-35	36-45
nombre de nœuds de Lorenz	7	30	18	1
nombre moyen de monômes de Δ_K	8,7	16,2	20,9	25
moyenne des valeurs absolues des coefficients de Δ_K	1,2	1,7	1,4	1
moyenne des valeurs absolues des coeff max de Δ_K	1,6	2,8	2,3	1,0
nombre moyen de monômes de V_K	5,3	10,9	8,7	5,0
moyenne des valeurs absolues des coefficients de V_K	1,1	1,8	1,5	1,0
moyenne des valeurs absolues des coeff max de V_K	1,1	2,3	1,9	1,0
Nœuds aléatoires contenant un tour complet				
nombre de croisements	10	20	30	40
nombre de nœuds	0	100	100	100
nombre moyen de monômes de Δ_K		14,4	21,8	29,3
moyenne des valeurs absolues des coefficients de Δ_K		1,5	2,9	11,6
moyenne des valeurs absolues des coeff max de Δ_K		7,1	10,2	48,7
nombre moyen de monômes de V_K		7,1	10,2	13,4
moyenne des valeurs absolues des coefficients de V_K		1,5	3,7	17,1
moyenne des valeurs absolues des coeff max de V_K		2,0	7,3	43,1
Nœuds aléatoires				
nombre de croisements	10	20	30	40
nombre de nœuds	100	100	100	100
nombre moyen de monômes de Δ_K	7,5	14,7	22,4	29,4
moyenne des valeurs absolues des coefficients de Δ_K	1,2	2,1	8,1	13,0
moyenne des valeurs absolues des coeff max de Δ_K	1,4	4,1	26,2	54,7
nombre moyen de monômes de V_K	5,7	8,5	12,5	14,5
moyenne des valeurs absolues des coefficients de V_K	1,1	2,1	10,0	19,4
moyenne des valeurs absolues des coeff max de V_K	1,1	3,3	22,9	48,2

FIG. 3.4. Nœuds de pas 3 vs. tresses aléatoires à 3 brins ; Δ_K désigne le polynôme d'Alexander, V_K le polynôme de Jones.

Théorème 4.1. On a $PSL_2(\mathbb{Z}) = \langle a, b \mid a^2 = b^3 = 1 \rangle$, où $a = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $b = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Appelons *mot réduit* un mot en les lettres a et b ne contenant aucun sous-mot a^2 ou b^3 . Le théorème 4.1 implique que tout élément de $PSL_2(\mathbb{Z})$ est représenté par un unique mot réduit.

Lemme 4.2. Soit g un élément de $PSL_2(\mathbb{Z})$ qui n'est conjugué ni à a , ni à b , ni à b^2 , alors g est conjugué à un élément dont le représentant réduit commence par b et finit par a .

Démonstration. Par conjugaison on peut permuter cycliquement l'ordre des facteurs. Si g a un représentant réduit contenant des lettres a et b , alors on peut en permuter les facteurs afin que b soit en tête, et a en queue. Or les seuls représentants réduits qui ne comportent pas des a et des b à la fois sont a , b et b^2 . □

Posons $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On en déduit une caractérisation des classes de conjugaison.

Nœuds de Lorenz			
nombre de croisements	16-25	26-35	36-45
nombre de nœuds de Lorenz	21	151	130
nombre moyen de monômes de Δ_K	14,1	20,9	26,3
moyenne des valeurs absolues des coefficients de Δ_K	1,4	1,7	1,5
moyenne des valeurs absolues des coeff max de Δ_K	2,2	3,2	3,1
nombre moyen de monômes de V_K	11,2	15,5	17,0
moyenne des valeurs absolues des coefficients de V_K	1,6	1,8	1,6
moyenne des valeurs absolues des coeff max de V_K	2,2	3,1	3,0
Nœuds aléatoires contenant un tour complet			
nombre de croisements	20	30	40
nombre de nœuds	100	100	100
nombre moyen de monômes de Δ_K	13,3	22,4	30,5
moyenne des valeurs absolues des coefficients de Δ_K	1,5	5,1	23,3
moyenne des valeurs absolues des coeff max de Δ_K	2,2	12,2	56,6
nombre moyen de monômes de V_K	10,8	17,9	24,9
moyenne des valeurs absolues des coefficients de V_K	1,7	5,7	25,9
moyenne des valeurs absolues des coeff max de V_K	2,6	14,7	80,5
Nœuds aléatoires			
nombre de croisements	20	30	40
nombre de nœuds	100	100	100
nombre moyen de monômes de Δ_K	15,8	24,3	32,7
moyenne des valeurs absolues des coefficients de Δ_K	7,0	41,3	175,0
moyenne des valeurs absolues des coeff max de Δ_K	15,6	110,4	573,3
nombre moyen de monômes de V_K	13,6	20,8	27,6
moyenne des valeurs absolues des coefficients de V_K	7,0	43,0	188,9
moyenne des valeurs absolues des coeff max de V_K	15,5	123,4	655,4

FIG. 3.5. Nœuds de pas 4 vs. tresses aléatoires à 4 brins ; Δ_K désigne le polynôme d'Alexander, V_K le polynôme de Jones.

Corollaire 4.3. *Tout élément de $SL_2(\mathbb{Z})$ de trace strictement supérieure à 2 est conjugué à un élément s'écrivant comme un produit positif en X et Y , défini à permutation circulaire des facteurs près.*

Démonstration. Les classes de $PSL_2(\mathbb{Z})$ contenant les éléments a , b et b^2 ont pour traces associées $0, \pm 1$ et ± 1 . Or on a $\mp X = ba$ et $\mp Y = b^2a$, donc tout élément hyperbolique, c'est-à-dire de trace strictement supérieure à 2, de $SL_2(\mathbb{Z})$ est conjugué à plus ou moins un produit de X et de Y . Or la trace d'un produit de X et de Y est positive, donc pour un élément de trace positive, le signe associé est nécessairement $+$. Comme on peut permuter cycliquement les termes du produit par conjugaison, le produit est défini à permutation cyclique des facteurs près. Remarquons que les éléments de ayant pour traces associées ± 2 sont les classes de X^m et Y^n pour m et n entiers relatifs quelconques. On en déduit que le produit associé à un élément hyperbolique contient à la fois des termes X et Y . \square

Nœuds de Lorenz			
	16-25	26-35	36-45
nombre de croisements	16-25	26-35	36-45
nombre de nœuds de Lorenz	1	42	371
nombre moyen de monômes de Δ_K	9,0	20,2	27,3
moyenne des valeurs absolues des coefficients de Δ_K	1,0	1,5	1,7
moyenne des valeurs absolues des coeff max de Δ_K	1,0	2,6	3,5
nombre moyen de monômes de V_K	5,0	11,7	15,1
moyenne des valeurs absolues des coefficients de V_K	1,0	1,4	2,0
moyenne des valeurs absolues des coeff max de V_K	1,0	1,8	3,9
Nœuds aléatoires contenant un tour complet			
nombre de croisements	20	30	40
nombre de nœuds	0	100	100
nombre moyen de monômes de Δ_K		18,8	28,6
moyenne des valeurs absolues des coefficients de Δ_K		1,8	4,9
moyenne des valeurs absolues des coeff max de Δ_K		1,8	11,7
nombre moyen de monômes de V_K		10,5	16,4
moyenne des valeurs absolues des coefficients de V_K		1,5	4,4
moyenne des valeurs absolues des coeff max de V_K		2,2	9,9
Nœuds aléatoires			
nombre de croisements	20	30	40
nombre de nœuds	100	100	100
nombre moyen de monômes de Δ_K	15,1	23,7	32,9
moyenne des valeurs absolues des coefficients de Δ_K	5,2	28,0	124,6
moyenne des valeurs absolues des coeff max de Δ_K	11,7	75,5	450,5
nombre moyen de monômes de V_K	12,8	18,9	25,4
moyenne des valeurs absolues des coefficients de V_K	5,1	30,5	139,8
moyenne des valeurs absolues des coeff max de V_K	10,7	88,1	499,0

FIG. 3.6. Nœuds de pas 5 vs. tresses aléatoires à 5 brins ; Δ_K désigne le polynôme d'Alexander, V_K le polynôme de Jones.

Les classes de conjugaison hyperboliques de trace positive de $SL_2(\mathbb{Z})$ sont donc représentées par les mots positifs en X et Y , à permutation cyclique des lettres près. On peut déjà voir le lien avec les nœuds de Lorenz se dessiner en pointillés légers.

Dans la suite nous nous intéresserons à des classes un peu plus grosses. On note $SL_2^\pm(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de déterminant ± 1 . On s'intéresse à la conjugaison par des matrices de $SL_2^\pm(\mathbb{Z})$. Il est évident que si deux matrices sont conjuguées via des matrices de $SL_2(\mathbb{Z})$ elles le sont via des matrices de $SL_2^\pm(\mathbb{Z})$ puisque $SL_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $SL_2^\pm(\mathbb{Z})$.

On remarque que toute matrice de déterminant -1 est le produit d'une matrice de $SL_2(\mathbb{Z})$ par la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit qu'il suffit de connaître le résultat de l'action de la matrice T par conjugaison sur X et Y pour connaître les classes de conjugaison. Or $TXT^{-1} = Y$ et $TYT^{-1} = X$, donc conjuguer par T revient à intervertir les lettres X et Y . Le résultat suivant résume ce qui précède.

Proposition 4.4. *Les classes de conjugaison hyperboliques de $SL_2(\mathbb{Z})$ sous l'action de $SL_2^\pm(\mathbb{Z})$ sont représentées par les mots positifs en X et Y , à permutation cyclique des lettres près et à interversion des lettres X et Y près.*

4.2. Classes d'idéaux et classes de conjugaison. Nous allons maintenant établir une correspondance classique en théorie des nombres entre classes d'idéaux d'un ordre dans un corps quadratique et classes de conjugaison de déterminant non nul dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ sous l'action de $SL_2^\pm(\mathbb{Z})$. Les résultats s'étendent à des corps de degré supérieurs et des matrices de taille supérieures (voir le premier appendice de [2]), mais ils s'énoncent plus facilement dans le cas particulier de la taille 2 qui nous intéresse ici. Tout d'abord voici quelques définitions.

Soit F un corps quadratique, c'est-à-dire $\mathbb{Q}[\alpha]$ pour α nombre algébrique de degré 2. Soit \mathcal{O} son anneau des entiers, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de F admettant un polynôme minimal unitaire à coefficients entiers. Un résultat classique affirme que \mathcal{O} est un réseau bidimensionnel de $\mathbb{Q}[\alpha]$, c'est-à-dire une copie de \mathbb{Z}^2 dans $\mathbb{Q}[\alpha]$. Un ordre o est un sous-anneau de \mathcal{O} contenant l'élément 1 et non réduit à \mathbb{Z} , c'est alors un sous-réseau bidimensionnel de \mathcal{O} contenant 1.

Exemple 4.5. Dans le corps $\mathbb{Q}[i\sqrt{5}]$ l'anneau des entiers \mathcal{O} est $\mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{5}}{2}]$. Un exemple d'ordre est $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ qui est d'indice 2 dans \mathcal{O} , ou encore $\mathbb{Z}[\frac{1+3\sqrt{5}}{2}]$ qui est d'indice 3.

La notion d'idéal d'un ordre est la même que pour un anneau : un idéal \mathcal{I} d'un ordre o est un sous-groupe additif de o stable par multiplication par les éléments de o . Soit (ω_1, ω_2) une \mathbb{Z} -base de o . Tout idéal \mathcal{I} de o admet une \mathbb{Z} -base (α_1, α_2) , où α_1 et α_2 sont deux éléments du réseau engendré par ω_1 et ω_2 . La matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ est dite idéale pour \mathcal{I} par rapport aux bases précédentes si on a $X \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$. Soit $\mathcal{I}, \mathcal{I}'$ deux idéaux de o . On dit que \mathcal{I} et \mathcal{I}' sont dans la même classe s'il existe $a, a' \in o$ tels que $(a)\mathcal{I} = (a')\mathcal{I}'$. Il s'agit d'une relation d'équivalence entre idéaux. Par exemple la classe contenant l'idéal (1) contient exactement l'ensemble des idéaux principaux de o . On peut énoncer le résultat principal, qui relie le nombre de classes d'idéaux d'un ordre $\mathbb{Z}[\alpha]$ à un nombre de classes de matrices 2×2 entières.

Théorème 4.6. *Soit $P(x) = x^2 - t \cdot x + d$ un polynôme irréductible à coefficients entiers, et soit α une racine de P . Alors le nombre de classes sous l'action de $SL_2^\pm(\mathbb{Z})$ de matrices 2×2 entières vérifiant $P(A) = 0$ est égal au nombre de classes d'idéaux de l'ordre $\mathbb{Z}[\alpha]$.*

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que $P(A) = 0$. Alors A a α et d/α pour valeurs propres et P pour polynôme caractéristique. Le vecteur propre correspondant à α est unique à multiplication par un scalaire près et peut être choisi dans $\mathbb{Z}[\alpha]$. Soit (α_1, α_2) ses coordonnées. Alors, par définition, on a $A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$. Par conséquent, pour tout polynôme p à coefficients entiers, on a $p(A) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = p(\alpha) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$. Cela montre que (α_1, α_2) est une \mathbb{Z} -base pour un certain idéal de $\mathbb{Z}[\alpha]$. Comme (α_1, α_2) est défini à multiplication par un élément de $\mathbb{Z}[\alpha]$ près, cet idéal est défini à un facteur multiplicatif près. Par conséquent, seule sa classe d'idéaux ne dépend que de A . Si on considère une autre matrice $S^{-1}AS$ à la place de A , alors la droite caractéristique est engendrée par $S^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$. Si S est prise dans $SL_2^\pm(\mathbb{Z})$, cela donne le même idéal, mais dans une base différente.

Réciproquement, soit (β_1, β_2) une base d'un idéal \mathcal{I} de $\mathbb{Z}[\alpha]$. Alors on a $\alpha\beta_1 = b_{11}\beta_1 + b_{12}\beta_2$ et $\alpha\beta_2 = b_{21}\beta_1 + b_{22}\beta_2$, où les b_{ij} sont des entiers. Par conséquent, la matrice $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ a α pour valeur propre et $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ pour vecteur propre associé. Comme B est entière, donc de trace entière, son autre valeur propre α' est égale à $n - \alpha$, pour un certain n dans \mathbb{Z} . On a alors $\det B = \alpha(n - \alpha) = n\alpha - \alpha^2 = n\alpha - (t\alpha - d)$. Or $\det B$ est entier, donc $n - t = 0$, et donc α' est le conjugué de α . Par conséquent, la matrice B vérifie $P(B) = 0$. Si on choisit une autre base $T \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, avec $T \in SL_2^\pm(\mathbb{Z})$, alors la matrice B est remplacée par la matrice TBT^{-1} . On a donc bien associé à tout idéal de l'ordre $\mathbb{Z}[\alpha]$ une classe de conjugaison de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ sous l'action de $SL_2^\pm(\mathbb{Z})$.

On a donc défini deux applications, réciproques l'une de l'autre, entre classes de matrices $S^{-1}AS$ annihilant P et classes d'idéaux sur l'ordre $\mathbb{Z}[\alpha]$. \square

Exemple 4.7. Intéressons-nous aux matrices de trace 10 et de déterminant 1. Le polynôme du second degré associé est $P(x) = x^2 - 10x + 1$, dont les racines sont $5 + 2\sqrt{6}$ et $5 - 2\sqrt{6}$. Le corps quadratique associé est $\mathbb{Q}[\sqrt{6}]$, dont l'anneau des entiers est $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$, mais nous nous intéressons ici aux classes d'idéaux de l'ordre $\mathbb{Z}[2\sqrt{6}]$. Il y a 3 classes de conjugaisons de matrices entières de trace 10 et de déterminant 1, correspondant aux mots X^8Y, X^4Y^2 et X^2YXY .

La question est maintenant de calculer concrètement la bijection décrite dans la démonstration du théorème 4.6, à savoir, à partir des matrices, de calculer des éléments des classes d'idéaux correspondants.

Théorème 4.8. Soit $P(x) = x^2 - t.x + d$ un polynôme unitaire irréductible de degré 2, toute matrice $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ telle que $P(A) = 0$ est de la forme $A = X_{\mathcal{I}}C_P X_{\mathcal{I}}^{-1}$, où $X_{\mathcal{I}}$ est une matrice idéale pour un idéal \mathcal{I} dans la classe d'idéaux correspondant à la classe de conjugaison $S^{-1}AS$ et C_P est la matrice compagnon $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -d & t \end{pmatrix}$ du polynôme P . Réciproquement toute matrice 2×2 entière X telle que $X^{-1}AX = C_P$ est la matrice idéale d'un idéal \mathcal{I} dans la classe d'idéaux correspondant à A .

Démonstration. On a

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ t\alpha - d \end{pmatrix},$$

donc la matrice C_P correspond à la base $(1, \alpha)$, où α est une racine de P , de l'ordre $\mathbb{Z}[\alpha]$.

Dans la démonstration du théorème 4.6 on a associé à la matrice A une base (α_1, α_2) d'un idéal \mathcal{I} de l'ordre $\mathbb{Z}[\alpha]$. La matrice idéale $X_{\mathcal{I}}$ correspondante, relativement à la base $(1, \alpha)$ de $\mathbb{Z}[\alpha]$ et à la base (α_1, α_2) de \mathcal{I} , est telle que

$$X_{\mathcal{I}} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$X_{\mathcal{I}}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix},$$

d'où

$$C_P X_{\mathcal{I}}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = C_P \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix},$$

et donc

$$X_I C_P X_I^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha X_I \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent on a bien $A = X_I C_P X_I^{-1}$.

Pour la réciproque, soit (α_1, α_2) une base de l'idéal correspondant à A , on a donc

$$A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Soit X telle que $X^{-1}AX = C$, alors on a

$$XCX^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix},$$

d'où

$$CX^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha X^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Comme α est une valeur propre simple de C , le vecteur $X^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ est propre, et donc il existe $k \in \mathbb{Q}(\alpha)$ tel que

$$X^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

En remplaçant le vecteur $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ par le vecteur $\begin{pmatrix} k^{-1}\alpha_1 \\ k^{-1}\alpha_2 \end{pmatrix}$, on obtient

$$X^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix},$$

et donc

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix},$$

d'où $X = X_I$ pour un certain idéal I bien choisi dans sa classe d'idéaux. \square

Remarque 4.9. La démonstration du théorème 4.8 montre en particulier que la classe des idéaux principaux de $\mathbb{Z}[\alpha]$ correspond à la classe de matrices engendrée par la matrice compagnon C_P du polynôme caractéristique P de α . On remarque également que dans le cas $P(x) = x^2 + t.x + 1$, la classe des idéaux principaux correspond également à la classe de matrices engendrée par la matrice $X^{t-2}Y$, puisque $X^{t-2}Y$ est conjuguée à C_P par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, qui est dans $SL_2^\pm(\mathbb{Z})$.

Exemple 4.10. Revenons aux matrices de trace 10 et de déterminant 1, lesquelles sont représentées par les mots X^8Y , X^4Y^2 et X^2YXY . Les matrices associées à ces mots sont $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$.

Or on vient de voir que la classe de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ correspond à la classe des idéaux principaux, donc $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ correspondent aux deux autres classes d'idéaux non principaux. Comme les matrices conjuguant ces deux éléments à C_P sont $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, et que la base de $\mathbb{Z}[2\sqrt{6}]$

associée à C_P est $(1, \alpha) = (1, 5 + 2\sqrt{6})$, on en déduit au passage que les idéaux $(2, 4 + 2\sqrt{6})$ et $(3, 4 + 2\sqrt{6})$ sont représentants des deux classes d'idéaux non principaux de $\mathbb{Z}[2\sqrt{6}]$.

4.3. Nœuds de Lorenz et classes de conjugaison. Dans [9], Etienne Ghys montre (visuellement) que les nœuds de Lorenz apparaissent aussi comme orbites périodiques du flot modulaire défini sur la variété $SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z})$. Celui-ci est engendré par la multiplication à gauche par la matrice $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$. Plus précisément, soit Λ un réseau de \mathbb{R}^2 dont la maille est d'aire 1, et soit (b_1, b_2) une base de Λ , c'est-à-dire deux vecteurs de \mathbb{R}^2 dont la norme du produit vectoriel vaut 1. Pour tout t , les vecteurs $b_{1t} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} b_1$ et $b_{2t} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} b_2$ ont encore un produit vectoriel de norme 1, et donc forment une base d'un réseau dont la maille a pour aire 1, et qui ne dépend que de Λ . On définit $\phi^t(\Lambda)$ comme le réseau engendré par les vecteurs b_{1t} et b_{2t} . Si les vecteurs b_{1t_0} et b_{2t_0} sont deux éléments de Λ , alors on a $\phi^{t_0}(\Lambda) = \Lambda$ et l'application $t \mapsto \phi^t(\Lambda)$, définie sur l'intervalle $[0, t_0]$, est un lacet fermé, donc un nœud, sur la variété $SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z})$.

La variété $SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z})$ peut aussi être vue comme le fibré tangent unitaire du quotient $\mathcal{H}/PSL_2(\mathbb{Z})$, où \mathcal{H} est le demi-plan de Poincaré muni de sa métrique hyperbolique standard, et l'action de $PSL_2(\mathbb{Z})$ sur \mathcal{H} est l'action classique $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$. Le fibré tangent est alors naturellement muni d'une métrique riemannienne g , et le flot modulaire défini précédemment coïncide avec le flot géodésique défini par la métrique g . Ainsi les orbites périodiques sous l'action du flot modulaire coïncident avec les géodésiques périodiques pour la métrique hyperbolique g sur le quotient $\mathcal{H}/PSL_2(\mathbb{Z})$.

On a donc obtenu de manière naturelle des nœuds sur la variété modulaire. Or les nœuds sont surtout étudiés plongés dans \mathbb{R}^3 , et notre variété n'est hélas pas plongée. En fait un plongement naturel existe, nous allons le décrire. Des coordonnées pour décrire un réseau de \mathbb{R}^2 ont été introduites par Gauss. Identifions \mathbb{R}^2 avec \mathbb{C} , et posons $g_2(\Lambda) = 60 \sum_{z \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{z^4}$ et $g_3(\Lambda) = 140 \sum_{z \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{z^6}$.

On vérifie facilement que les sommes g_2 et g_3 convergent et que Λ est entièrement décrit par les valeurs des fonctions g_2 et g_3 , c'est-à-dire que l'application $\Lambda \mapsto (g_2(\Lambda), g_3(\Lambda))$ est injective. De plus la non dégénérescence de Λ impose la condition $g_3^2 - 27g_2^2 \neq 0$. Enfin le fait que la maille de Λ soit d'aire 1 impose la condition $|g_2(\Lambda)|^2 + |g_3(\Lambda)|^2 = 1$. Cette dernière condition permet d'identifier l'image de (g_2, g_3) à une partie de la sphère \mathbb{S}^3 , qui se trouve être le complémentaire d'un nœud de trèfle dans \mathbb{S}^3 . On a alors obtenu une bijection entre $\mathbb{S}^3 \setminus \bigcirc$ et la variété modulaire $SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z})$.

Cette bijection nous permet donc de plonger les nœuds modulaires de manière naturelle dans \mathbb{S}^3 , et donc dans \mathbb{R}^3 par projection stéréographique. Dans [8] et [9], É. Ghys montre et démontre respectivement que la correspondance entre nœuds modulaires plongés et nœuds de Lorenz est parfaite : à chaque mot de Lorenz sont associés d'une part un nœud modulaire et d'autre part un nœud de Lorenz, lesquels sont isotopes.

Exemple 4.11. Revenons au cas des idéaux de $\mathbb{Z}[2\sqrt{6}]$. On a vu qu'il y a trois classes d'idéaux, dont trois représentants sont $(1, 5 + 2\sqrt{6})$, $(2, 4 + 2\sqrt{6})$ et $(3, 4 + 2\sqrt{6})$. Les trois nœuds de Lorenz associés sont les nœuds correspondants aux mots X^8Y , X^4Y^2 et X^2YXY , c'est-à-dire le nœud trivial, le nœud trivial et le nœud de trèfle.

On a maintenant une application naturelle associant à une classe d'idéaux dans un corps quadratique une unique classe de mots en X et Y , à laquelle est associé un unique noeud de Lorenz. La question est donc de savoir si certaines propriétés intéressantes peuvent être déduites de cette bijection...

En particulier, il existe une structure de groupe sur les classes d'idéaux d'un ordre dans un corps quadratique. Plus précisément soit F un corps quadratique, \mathcal{O} l'anneau des entiers et o un ordre d'indice n dans \mathcal{O} , et soit \mathcal{I}_1 et \mathcal{I}_2 deux idéaux de o . Alors la classe de l'idéal \mathcal{I} engendré par les produits d'éléments de \mathcal{I}_1 et \mathcal{I}_2 ne dépend pas du choix de \mathcal{I}_1 et \mathcal{I}_2 dans leurs classes respectives. Par conséquent, l'opération de multiplication est bien définie sur les classes d'idéaux. On vérifie facilement que la classe des idéaux principaux est un élément neutre pour cette opération, donc l'ensemble des classes d'idéaux forme un monoïde. De plus toute classe contenant au moins un idéal \mathcal{I} dont la norme $N(\mathcal{I})$ est première avec l'indice n admet un inverse pour cette opération, c'est-à-dire qu'il existe \mathcal{I}' tel que $\mathcal{I}\mathcal{I}'$ est un idéal principal (voir [3], p. 122). L'ensemble de ces classes est stable par produit, par conséquent l'ensemble des classes contenant au moins un idéal \mathcal{I} dont la norme est première avec n forme un groupe, appelé *groupe des classes*. Comme on a associé à chaque classe un noeud de manière canonique, une question se pose : l'opération de groupe a-t-elle un pendant du côté des noeuds ? La question est ouverte. Dans les cas les plus simples les exemples suivants montrent qu'il n'y a rien d'évident.

Exemple 4.12. Revenons une dernière fois aux idéaux de $\mathbb{Z}[2\sqrt{6}]$. L'idéal $(1, 5 + 2\sqrt{6})$ est un représentant de la classe des idéaux principaux. Quant à $(2, 4 + 2\sqrt{6})$, on vérifie facilement que tout élément de sa classe a une norme qui est multiple de 2. Or l'indice de $\mathbb{Z}[2\sqrt{6}]$ dans $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ est 2, donc cette classe n'apparaît pas dans le groupe des classes. On vérifie effectivement que $(2, 4 + 2\sqrt{6})^2 = (2)(2, 4 + 2\sqrt{6})$, donc si cette classe était dans le groupe des classes, elle en serait l'élément neutre, or cette position est déjà occupée par les idéaux principaux. Enfin la norme de $(3, 4 + 2\sqrt{6})$ est 3, et sa classe apparaît dans le groupe des classes. Le groupe des classes de $\mathbb{Z}[2\sqrt{6}]$ est donc $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, le noeud associé au neutre $\bar{0}$ est le noeud trivial. On vérifie que c'est toujours le cas, la classe des idéaux principaux correspondant toujours à la classe de conjugaison de la matrice compagnon du polynôme minimal, celle-ci contenant la matrice $X^{t-2}Y$, qui correspond au noeud trivial. Le noeud associé à l'élément $\bar{1}$ est le noeud de trèfle.

Un autre exemple est donné à partir des matrices de trace 22 et de déterminant 1. L'ordre associé est $\mathbb{Z}[2\sqrt{30}]$, qui compte 6 classes d'idéaux, correspondant aux matrices $X^{20}Y, X^{10}Y^2, X^5Y^4, X^6YXY, X^4YX^2Y$ et $X^2YX^2Y^2$. Les noeuds associés sont le noeud trivial pour les trois premières classes, le noeud de trèfle pour les deux suivantes, et le noeud torique $[5, 2]$ pour la dernière. Cependant les 2e et 5e classes n'apparaissent pas dans le groupe des classes. Le groupe des classes de $\mathbb{Z}[2\sqrt{30}]$ est $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, l'élément neutre a pour noeud associé le noeud trivial, et les trois autres éléments du groupe sont associés au noeud trivial, au noeud de trèfle et au noeud torique $[5, 2]$.

5. LE POLYNÔME HOMFLY, VARIANTE ET TRESSSES POSITIVES

Dans cette partie nous allons prouver le théorème 2.10 de Franks et Williams. L'outil utilisé est une variante du polynôme HOMFLY – des noms, Hoste, Ocneanu, Millett, Freyd, Lickorish et Yetter, de quelques-uns de ses codécouvreurs – définie pour les entrelacs qui sont clôtures de tresses positives. L'indice de tresse d'un entrelacs, c'est-à-dire le plus petit nombre de brins d'une tresse représentant cet entrelacs, se lit directement sur cette variante de HOMFLY. Dans le cas qui nous intéresse, celui des tresses positives à n brins contenant au moins un facteur Δ_n^2 , la notion

d'arbre de calcul permet de montrer, *via* notre variante d'HOMFLY, que l'indice de tresse de l'entrelacs est n .

5.1. Le polynôme HOMFLY et les arbres de calcul. Le polynôme de Jones est un invariant polynomial de nœud, introduit par V. Jones en 1984. Il a rapidement été généralisé en un polynôme à deux variables, le polynôme HOMFLY, lequel admet une définition simple en terme de projection planaire.

Soit K un entrelacs et K_+ une projection planaire régulière de K , c'est-à-dire avec un nombre fini de points multiples, qui sont tous des points doubles. Choisissons un point double M de K_+ . Définissons K_- comme l'entrelacs admettant la même projection que K_+ , sauf au point M , où les brins du dessus et du dessous sont échangés, et K_0 comme l'entrelacs où le croisement en M a été supprimé (figure 5.1). Les polynômes d'HOMFLY des trois entrelacs associés sont alors reliés par la relation $x P_{K_+} + x^{-1} P_{K_-} + y P_{K_0} = 0$, dite relation d'écheveau. Désignons par \bigcirc le nœud trivial. En imposant $P(\bigcirc) = 1$, le polynôme P est alors entièrement défini, et de manière unique. On note que la relation d'écheveau impose $P(\bigcirc^k) = \left(-\frac{x + x^{-1}}{y}\right)^{k-1}$, où \bigcirc^k désigne k nœuds triviaux deux à deux non enlacés. On retrouve le polynôme de Jones original en posant $y = 1$.

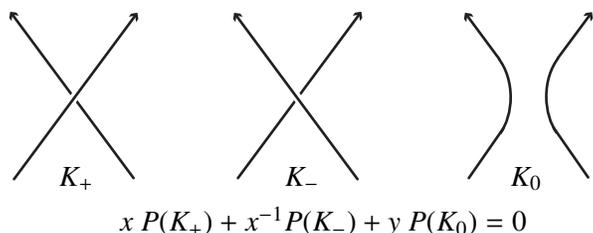


FIG. 5.1. La relation d'écheveau définissant le polynôme HOMFLY.

Les arbres de calcul décrivent le calcul du polynôme HOMFLY par itération des relations d'écheveau. La question est de choisir les points successifs où 5.1 est invoqué. Un choix naïf du croisement auquel on opère la chirurgie peut mener à une boucle, par exemple si on choisit deux fois de suite le même point, alors on retombe sur le nœud de départ, on n'a donc pas progressé. Par contre, on va voir que, pour autant qu'on change de point d'application à chaque étape, le processus de calcul converge en un nombre fini d'étapes.

Un théorème célèbre dû à Markov stipule que si b et b' sont deux tresses dont les clôtures sont des entrelacs isopes, alors b' s'obtient à partir de b par une suite finie de mouvements de Markov, lesquels consistent soit à remplacer la tresse considérée par une tresse conjuguée gbg^{-1} dans le groupe \mathbf{B}_n des tresses à n brins, soit à rajouter un brin supplémentaire suivant le schéma de la figure 5.2, soit à supprimer un brin superflu suivant le schéma réciproque.

En fait on va utiliser une version plus faible des mouvements de Markov qui se comportent mieux lorsqu'on s'intéresse à des tresses positives, et qui conservent plus d'information. Bien que plus particuliers que les mouvements de Markov généraux, ces mouvements sont suffisants pour caractériser l'isotopie de nœuds qui sont des clôtures de tresses positives. Dans la suite de cette section, on note (b, n) une tresse b à n brins.

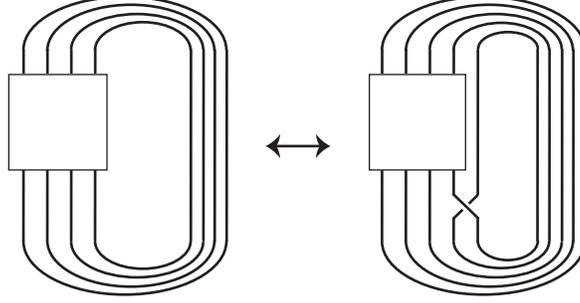


FIG. 5.2. Un mouvement de Markov : la tresse $b \in \mathbf{B}_n$ est remplacée par la tresse $b\sigma_n^{\pm 1} \in \mathbf{B}_{n+1}$.

Définition 5.1. Un mouvement de Markov invariant sur (b, n) consiste à

- (i) Remplacer (b, n) par (b', n) , où b' est conjuguée à b dans \mathbf{B}_n , ou
- (ii) Remplacer $(b\sigma_{n-1}^{\pm 1}, n)$ par $(b, n-1)$ si b ne contient aucun $\sigma_{n-1}^{\pm 1}$, ou
- (iii) L'inverse de (ii).

Ainsi on interdit à dessein dans cette définition les mouvements de Markov type $(b\sigma_{n-1}^{-1}, n) \leftrightarrow (b, n-1)$. Si on note c le nombre de croisements positifs dans b moins le nombre de croisements négatifs, on note que $n - c$ est invariant sous chacun des mouvements de Markov invariants (d'où leur nom). Afin de suivre le schéma de calcul suggéré par la relation d'écheveau de la figure 5.1, Conway introduit au niveau des tresses une relation qui en est la contrepartie : le scindement de Conway.

Définition 5.2. Un scindement de Conway sur une tresse (b, n) , où $b = \alpha\sigma_i^{\epsilon}\beta$ et $\epsilon = \pm 1$ est l'opération qui produit deux nouvelles tresses (b_0, n) et (b_-, n) , où $b_0 = \alpha\beta$ et $b_- = \alpha\sigma_i^{-\epsilon}\beta$.

Dorénavant on travaille sur les tresses. On introduit une nouvelle notation pour désigner notre variante d'HOMFLY pour les tresses. Soit (b, n) est une tresse, on note $P_{(b,n)}$ le polynôme HOMFLY de sa clôture. Conformément à la relation d'écheveau, on a $P_{(b,n)} = p_0P_{(b_0,n)} + p_-P_{(b_-,n)}$, où $p_0 = -x^{-\epsilon}y$ et $p_- = -x^{-2\epsilon}$. On peut alors définir un arbre de calcul pour le polynôme P , qui représente un algorithme de calcul de HOMFLY.

Définition 5.3. Un arbre de calcul invariant est arbre binaire, orienté, fini, dont chaque sommet est étiqueté par un mot de tresse, et dont chaque arête est étiquetée par un monôme de $\mathbb{Z}[x, x^{-1}, y, y^{-1}]$, satisfaisant les propriétés suivantes :

- (i) Si N est un sommet de \mathcal{A} qui n'est pas une feuille, étiqueté (b, n) , et si N_0 et N_1 sont ses fils étiquetés respectivement (b_0, n_0) et (b_1, n_1) , alors (b_0, n_0) et (b_1, n_1) s'obtiennent à partir de (b, n) en faisant d'abord une suite de mouvements de Markov invariants puis un scindement de Conway.
- (ii) Si de plus les arêtes reliant N à N_0 et N_1 sont étiquetées p_0 et p_1 respectivement, alors on a $P_{(b,n)} = p_0P_{(b_0,n_0)} + p_1P_{(b_1,n_1)}$.
- (iii) Chaque feuille f est étiquetée par une tresse triviale sur un certain nombre de brins $c(f)$ (qui peut dépendre de la feuille).

Si, pour une tresse donnée (b, n) , un arbre de calcul invariant existe, il est clair qu'il fournit une stratégie pour déterminer le polynôme HOMFLY de la clôture de (b, n) en itérant la relation

d'écheveau 5.1. En effet, soit \mathcal{F} l'ensemble des feuilles de l'arbre de calcul invariant \mathcal{A} . Pour une feuille f dans \mathcal{F} , notons $p(f)$ le produit des monômes rencontrés sur les arêtes de \mathcal{A} le long du chemin de la racine à f . Si P est le polynôme HOMFLY de (b, n) , on a alors

$$P(x, y) = \sum_{f \in \mathcal{F}} p(f) \left(-\frac{x + x^{-1}}{y} \right)^{c(f)-1}.$$

Un arbre de calcul invariant permet donc bien de calculer le polynôme HOMFLY. Par contre, il n'est pas évident a priori qu'un tel arbre de calcul existe pour toute tresse positive initiale. En fait nous allons montrer maintenant que c'est bien le cas. On commence par un résultat technique sur les mouvements de Markov invariants pour prouver l'existence, pour tout nœud, d'un arbre de calcul invariant.

Lemme 5.4. *Soit (b, n) une tresse positive. Par une suite de mouvements de Markov invariants on peut transformer (b, n) en (b', n') , où b' est soit le mot vide, soit de la forme $\alpha\sigma_i^2$ pour un certain i .*

Démonstration. On définit le poids π d'une tresse positive par $\pi(\sigma_i) = i$ et $\pi(ab) = \pi(a) + \pi(b)$. Soit b de poids k . Nous allons prouver le résultat par récurrence sur k . La seule tresse de poids nul est la tresse triviale pour laquelle le résultat est vrai.

Sinon, soit m le plus grand entier tel que σ_m apparaît dans b . Si σ_m n'apparaît qu'une fois dans b , alors b est conjuguée à une tresse de la forme $a\sigma_m$, où a est une tresse positive. Un mouvement de Markov invariant supprime alors le σ_m final. Comme $\pi(a) < \pi(b)$, par hypothèse de récurrence, le résultat est vrai pour a , et donc pour b .

Sinon on peut supposer que σ_m apparaît au moins deux fois. Soit $\sigma_m a_0 \sigma_m$ un sous-mot de b tel que a_0 ne contienne aucun σ_m . Il y a alors trois cas possibles :

Premier cas : σ_{m-1} n'apparaît pas dans a_0 . Alors σ_m commute avec a_0 , donc $\sigma_m a_0 \sigma_m$ est conjuguée à $a_0 \sigma_m^2$, et donc b est conjuguée à la tresse $a\sigma_m^2$.

Deuxième cas : σ_{m-1} apparaît une fois exactement dans a_0 , alors $\sigma_m a_0 \sigma_m$ est équivalente à $a'_0 \sigma_m \sigma_{m-1} \sigma_m a''_0$. Mais, d'après les relations de tresse, cette dernière tresse est équivalente à $a'_0 \sigma_{m-1} \sigma_m \sigma_{m-1} a''_0$, dont le poids est inférieur. L'hypothèse de récurrence s'applique alors.

Troisième cas : σ_{m-1} apparaît au moins deux fois dans a_0 . Alors on en extrait un sous-mot de la forme $\sigma_{m-1} a_1 \sigma_{m-1}$, avec a_1 ne contenant aucun σ_{m-1} , et on recommence le processus à partir de ce sous-mot, à la recherche de la lettre σ_{m-2} . On répète de processus autant de fois que nécessaire, sachant qu'à chaque étape, soit le poids décroît, soit l'indice m décroît. Par conséquent le processus s'achève. \square

Nous n'utiliserons dans la suite que les arbres de calcul invariants dont la racine est étiquetée par une tresse positive, mais le résultat général affirmant l'existence d'arbres de calcul invariants pour toute racine n'est pas beaucoup plus dur à prouver, donc nous allons le faire.

Théorème 5.5. *Pour toute tresse (b, n) il existe un arbre de calcul invariant \mathcal{A} dont la racine est étiquetée par (b, n) .*

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur la longueur k de la tresse b . Si b est la tresse triviale, il suffit de prendre un arbre n'ayant qu'un sommet et le résultat est trivial.

L'idée est de se ramener au cas des tresses positives que nous traiterons en dernier. Soit \tilde{b} la tresse obtenue en rendant tous les croisements de (b, n) positifs. En effectuant un scindement de Conway sur la tresse (b, n) en un croisement négatif, on produit deux fils au sommet étiqueté

(b, n) . L'un est étiqueté (b_0, n) , et comme b_0 a moins de k croisements, on sait, par hypothèse de récurrence, qu'on peut compléter cette branche de l'arbre. L'autre est étiqueté (b_-, n) , où b_- a autant de croisements que b , mais b_- a plus de croisements positifs. En itérant le procédé un nombre fini de fois, on arrive à un arbre dont toutes les branches sont complétées, sauf celle qui part d'un sommet étiqueté (\tilde{b}, n) .

Il reste donc à remplir la branche de l'arbre de calcul partant d'un sommet étiqueté par une tresse positive. C'est ici qu'on utilise le lemme 5.4 : la tresse positive (\tilde{b}, n) peut être convertie par une suite de mouvements de Markov invariants en (b', n') , où b' est soit la tresse triviale, soit de la forme $a\sigma_i^2$. Dans le premier cas (b', n') est une feuille et il n'y a rien à faire. Dans le second cas, on utilise un scindement de Conway sur un des deux croisements σ_i , et les deux fils sont alors étiquetés $(a\sigma_i, n')$ et (a, n') . Ces mots ont tous deux une longueur inférieure à k , donc l'hypothèse de récurrence est satisfaite, et on peut donc compléter notre arbre de calcul. \square

Remarquons que tous les scindements de Conway utilisés pour construire le sous-arbre descendant du nœud (\tilde{b}, n) sont utilisés avec $\epsilon = 1$. Par conséquent toutes les branches gauches de ce sous-arbre sont étiquetées $-x^{-1}y$ et toutes les branches droites $-x^{-2}$.

On peut alors introduire une variante du polynôme HOMFLY qui se comporte bien vis-à-vis des arbres de calcul et des tresses positives.

Théorème 5.6. *Il existe un polynôme en trois variables $J(R, C, T)$ associé à toute tresse positive (b, n) tel que*

- (i) $J(R, C, T)$ est à coefficients entiers positifs,
- (ii) Si $P(x, y)$ est le polynôme HOMFLY associé à (b, n) , alors on a

$$P(x, y) = J\left(-x^{-2}, -x^{-1}y, -\frac{x + x^{-1}}{y}\right),$$

- (iii) Réciproquement $J(R, C, T)$ ne dépend que de $P(x, y)$ et peut être calculé à partir de P ,
- (iv) Si on donne à R, C et T les degrés 1, 2 et -1 respectivement, alors $J(R, C, T)$ est homogène de degré $1 - n + l$, où l est la longueur du mot de tresse b ,
- (v) On a $J(0, C, T) = C^p T^q$, où q est égal au nombre de composants de l'entrelacs représenté par (b, n) moins 1,
- (vi) Si n_0 est l'indice de tresse de (b, n) , alors $n_0 - 1$ est supérieur ou égal à l'exposant maximal de T dans $J(R, C, T)$.

Démonstration. Nous allons reprendre les arbres de calcul invariants déjà construits, mais nous allons modifier l'étiquetage des arêtes. Soit \mathcal{A} un arbre de calcul invariant associé à la tresse positive (b, n) comme dans la démonstration du théorème 5.5. Alors toutes les arêtes allant vers un fils gauche de \mathcal{A} sont étiquetées par $-x^{-1}y$ et vers un fils droit par $-x^{-2}$. Nous allons remplacer ces étiquettes par R et C respectivement. On note \mathcal{F} l'ensemble des feuilles de \mathcal{A} , et pour f une feuille de \mathcal{A} on note $c(f)$ le nombre de composants du nœud (trivial) associé à f . On définit $j(f)$ comme le produit de toutes les étiquettes rencontrées le long du chemin allant de la racine à f . On pose alors

$$(5.1) \quad J(R, C, T) = \sum_{f \in \mathcal{F}} j(f) T^{c(f)-1}.$$

Pour le moment la valeur de $J(R, C, T)$ dépend de l'arbre de calcul choisi. C'est seulement lorsque nous prouverons le point (iii) que nous en déduirons que J est un invariant de nœud. Le

point (i) se déduit immédiatement de la définition de J . Le point (ii) vient de la définition des arbres de calcul invariants : comme un arbre de calcul invariant permet le calcul du HOMFLY, celui-ci se déduit de J .

Prouvons le point (iv). Pour (b, n) un mot de tresse positif, posons $\ell(b, n) = n - l$, où l est la longueur totale du mot b . Si on a une arête de (b, n) à (b', n') dans \mathcal{A} étiquetée par C , on a alors, par définition de l'arbre de calcul, $\ell(b, n) = \ell(b', n') - 2 = \ell(b', n') - \deg C$. De même si on a une arête étiquetée par R on a alors $\ell(b, n) = \ell(b', n') - 1 = \ell(b', n') - \deg R$. Par induction si la racine de \mathcal{A} est étiquetée par (b, n) et si une feuille f est étiquetée par (b', n') , alors on a

$$\ell(b, n) = \ell(b', n') - \deg j(f).$$

D'autre part si f est une feuille avec $c(f)$ composants, alors $n' = c(f)$ et donc $\ell(b', n') = c(f)$. Par conséquent on a

$$\ell(b, n) = c(f) - \deg j(f) = 1 - \deg(j(f)T^{c(f)-1}).$$

On en déduit que $J(R, C, T)$ est homogène de degré $1 - \ell(b, n) = 1 - n + l$.

Prouvons maintenant le point (iii). Revenons aux arbres de calcul invariants calculant le polynôme HOMFLY. On remarque que, si f est une feuille de \mathcal{A} , on a l'égalité $\deg j(f) = \deg_x p(f)$. Or, si (b, n) est l'étiquette de la racine de \mathcal{A} et si f est une feuille, on a $\ell(b, n) = c(f) + \deg j(f) = c(f) + \deg_x p(f)$. Par conséquent, il existe $s(f)$ tel que $p(f) = \pm y^{s(f)} x^{n-l-c(f)}$, d'où

$$p(f) \left(-\frac{x + x^{-1}}{y} \right)^{c(f)-1} = \pm y^{s(f)-c(f)+1} x^{n-l+1} (1 + x^{-2})^{c(f)-1}.$$

Posons $k = n - l - 1$. Par définition d'un arbre de calcul invariant, on a alors

$$P(x, y) = x^k \sum_{f \in \mathcal{F}} \pm y^{s(f)-c(f)-1} (1 + x^{-2})^{c(f)-1}.$$

Il existe par conséquent des entiers a_{ij} uniques tels que

$$P(x, y) = \sum_{ij} a_{ij} x^{k-j} y^{i+j} ((x + x^{-1})/y)^j = \sum_{ij} (-1)^{\frac{i-k}{2}} a_{ij} (-x^2)^{-\frac{i+k}{2}} (-y/x)^{i+j} (-(x + x^{-1})/y)^j.$$

En substituant $C = -x^2$, $R = -y/x$ et $T = -(x + x^{-1})/y$, on obtient

$$P(x, y) = \tilde{J}(R, C, T) = \sum_{ij} (-1)^{\frac{i-k}{2}} a_{ij} R^{i+j} C^{-\frac{i+k}{2}} T^j.$$

On voit que \tilde{J} est homogène de degré $-k$ si on donne à R , C et T les poids 1, 2 et -1 respectivement. Comme les a_{ij} sont uniques, \tilde{J} est l'unique polynôme homogène et se spécialisant en P . Or J a les mêmes propriétés, donc $\tilde{J} = J$, et J ne dépend donc que de P , et donc en particulier que du nœud de départ.

Pour ce qui est de (v), remarquons simplement que la seule branche de \mathcal{A} ne comportant aucun R est la branche la plus à droite de \mathcal{A} . Les tresses le long de cette branche s'obtiennent à partir de leur mère en déliant au maximum le scindement de Conway : si (b, n) est l'étiquette d'un nœud de la branche droite de \mathcal{A} et (b_1, n_1) l'étiquette de son fils droit, alors par construction de \mathcal{A} , la cloture de b est équivalente à celle de $b_1 \sigma_i^2$ pour un certain i . Or en supprimant un facteur σ_i^2 d'une tresse, on ne change pas le nombre de composants de sa clôture, donc les nœuds correspondant à la racine et à la feuille droite ont le même nombre de composants.

Enfin pour (vi), on revient à la formule 5.1, en notant que l'exposant maximal de T dans J est de la forme $c(f) - 1$ pour f une certaine feuille f de \mathcal{A} . Or le nombre maximal de composants d'un entrelacs associé à une feuille est borné par le nombre de brins d'une tresse ayant cet entrelacs pour clôture. Partant d'une tresse à n_0 brins, notre construction d'arbre de calcul invariant ne fait pas apparaître de tresse à plus de n_0 brins, d'où (vi). \square

Corollaire 5.7. *Soit (b, n) une tresse positive et \mathcal{A} un arbre de calcul invariant dont tous les sommets sont étiquetés par des tresses positives. Si \mathcal{A} a un sommet étiqueté par une tresse dont la clôture a n composants, alors l'indice de tresse de (b, n) est n .*

Démonstration. Soit (b_0, n) le sommet de \mathcal{A} dont l'entrelacs associé a n brins. Soit J_0 le polynôme associé à ce sommet de \mathcal{A} . D'après la propriété (v) du théorème 5.6, on sait que J_0 a au moins un monôme dont l'exposant de T est égal à $n - 1$. Soit J le polynôme associé à (b, n) , alors en utilisant l'arbre de calcul \mathcal{A} , on déduit $J = P_1 J_0 + P_2$, où P_1 et P_2 sont des polynômes à coefficients positifs. Par conséquent, J a au moins un terme ayant un degré en T au moins égal à $n - 1$. D'après la propriété (vi) de 5.6, on en déduit que l'indice de tresse de (b, n) est au moins n . D'un autre côté (b, n) est une tresse a n brins, donc l'indice de tresse de sa clôture est au plus n . De ces deux inégalités, on déduit que l'indice de tresse de (b, n) est n . \square

On peut enfin démontrer le résultat de Franks et Williams énoncé comme théorème 2.10.

Démonstration du théorème 2.10. D'après le corollaire 5.7 il suffit de montrer qu'il existe un arbre de calcul \mathcal{A} , dont la racine est étiquetée par (b, t) et qui contient un sommet étiqueté (Δ_t^2, t) , puisque la clôture de la tresse Δ_t^2 est un entrelacs (dit *de Hopf*) à t composants.

Nous allons montrer le résultat par récurrence sur la longueur du facteur a tel que $b = a\Delta_t^2$. Si a est de longueur nulle, le résultat est trivial.

Sinon on a $a = a'\sigma_i$ pour un certain $i < t$. Dans le groupe \mathbf{B}_t , l'élément Δ_t^2 admet plusieurs écritures comme mot positif en $\sigma_1, \dots, \sigma_{t-1}$. En particulier il est égal à $(\sigma_i \dots \sigma_{t-1} \sigma_1 \dots \sigma_{i-1})^t$. On note ce mot $D_t(i)$ et on a alors, dans le monoïde des tresses positives, l'égalité $a\Delta_t^2 = a'\sigma_i\Delta_t^2 = a'\sigma_i D_t(i) = a'\sigma_i^2 D'_t(i)$, où $D'_t(i)$ est défini par $D_t(i) = \sigma_i D'_t(i)$. En appliquant un scindement de Conway à ce dernier mot, l'un des fils du sommet (b, t) est étiqueté par la tresse $a'\sigma_i D'_t(i) = a' D_t(i) = a'\Delta_t^2$. Comme la longueur de a' est inférieure à celle de a , par hypothèse de récurrence, on peut compléter la branche de l'arbre sous le sommet étiqueté par $a'\Delta_t^2$ de sorte qu'un des sommets soit étiqueté par (Δ_t^2, t) . Comme le sommet étiqueté par $a\Delta_t^2$ est le père du sommet étiqueté par $a'\Delta_t^2$, on peut compléter sa branche de sorte qu'elle contienne un sommet étiqueté par (Δ_t^2, t) . \square

6. LES ω -SIGNATURES DES NŒUDS DE LORENZ

Le but de cette section est de montrer que la largeur de la bande d'apparition d'un nœud de Lorenz, définie en 2.15, est toujours finie. Dans le théorème 2.8, on a associé, à toute orbite γ de pas t du flot de Lorenz, des entiers $n_1, \dots, n_{t-1}, m_1, \dots, m_{t-1}$, que nous appellerons *coordonnées* de γ . La longueur du mot de Lorenz minimal correspondant à γ est une fonction affine de ses coordonnées. Pour borner les valeurs possibles de la longueur d'un mot de Lorenz minimal associé à une orbite périodique isotope à un nœud donné K , nous allons borner les coordonnées des orbites isotopes à K .

Soit ω un nombre complexe de module 1. La ω -signature est un invariant de nœud d'origine géométrique, généralisant la signature. Si la ω -signature d'une orbite périodique était une fonction affine de ses coordonnées, la donnée de la ω -signature d'un nœud K restreindrait l'ensemble des

valeurs possibles des coordonnées d'orbites périodiques isotopes à K à un hyperplan de l'espace des coordonnées. La donnée de $2t - 2$ ω -signatures linéairement indépendantes restreindrait alors l'ensemble des valeurs possibles des coordonnées à un point. En fait la ω -signature d'une orbite périodique n'est pas une fonction affine de ses coordonnées, mais on peut borner le défaut d'afinité. Si on fixe un nœud K , la donnée de sa ω -signature détermine une bande, c'est-à-dire un hyperplan épaissi, dans l'espace des coordonnées, de sorte que toute orbite périodique isotope à K a ses coordonnées dans cette bande. Nous allons voir qu'il est possible de trouver suffisamment de valeurs pour ω , de sorte que l'intersection des bandes associées à ces ω -signatures détermine un parallépipède borné dans l'espace des coordonnées.

6.1. La ω -signature. La ω -signature d'un nœud est définie dans l'article [7]. Rappelons tout d'abord ce que sont la signature et la ω -signature.

Soit K un nœud orienté plongé dans \mathbb{R}^3 , on appelle *surface de Seifert* une surface orientée S_K plongée dans \mathbb{R}^3 dont le bord (orienté) est K . Le premier groupe d'homologie $H_1(S_K, \mathbb{Z})$ est muni d'une forme bilinéaire B , appelée *forme de Seifert* de la manière suivante : soit x et y deux lacets orientés tracés sur S_K , on définit y_+ comme le lacet orienté dans \mathbb{R}^3 obtenu en poussant un peu y le long de la normale positive à S_K , de sorte que x et y_+ sont deux lacets disjoints, $B(x, y)$ est alors défini comme le nombre d'entrelacements entre x et y_+ (si on n'a pas poussé y_+ trop loin de y , ce nombre ne dépend pas de y_+). La forme bilinéaire B obtenue n'est pas symétrique, mais il suffit de tensoriser par \mathbb{R} et de poser $\tilde{B}(x, y) = B(x, y) + B(y, x)$ pour obtenir une forme bilinéaire symétrique réelle. On démontre que la signature de cette forme quadratique, c'est-à-dire le nombre de signes + moins le nombre de signes - dans une base orthonormale, ne dépend pas de la surface S_K choisie. De même, pour ω un nombre complexe de module 1, on obtient une forme hermitienne en tensorisant B par \mathbb{C} et en posant $\tilde{B}_\omega(x, y) = (1-\omega)B(x, \bar{y}) + (1-\bar{\omega})B(\bar{y}, x)$. Tout comme une forme quadratique réelle est diagonalisable, une forme hermitienne est diagonalisable avec une diagonale réelle. La signature de la forme hermitienne est aussi définie comme le nombre de coefficients positifs moins le nombre de coefficients négatifs, il s'agit d'un invariant de la forme hermitienne. Ici, la signature de la forme hermitienne \tilde{B} est encore indépendante du choix de la surface S_K .

Définition 6.1. On appelle *signature* d'un nœud K la signature de la forme quadratique \tilde{B} associée, on la note $sign(K)$. Pour ω un nombre complexe de module 1, on appelle *ω -signature* d'un nœud K la signature de la forme hermitienne \tilde{B}_ω associée, on la note $sign_\omega(K)$.

On remarque que la -1 -signature coïncide avec la signature.

Soit b une tresse à n brins, c'est-à-dire un élément du groupe de tresse \mathbf{B}_n . Si la permutation associée à b est un n -cycle, la clôture \hat{b} de b est un nœud. L'article [7] donne des formules précises pour le calcul des ω -signatures de la clôture d'une tresse. Dans la partie 5 de cet article sont calculées certaines ω -signatures. On extrait deux inégalités mettant en jeu la ω -signature dans le lemme suivant. On note $x \simeq_p y$ pour $|x - y| \leq p$.

Lemme 6.2. Soit $n \geq 2$ et $p \geq 1$ deux entiers et soit $\theta \in [0, 1[\cap\mathbb{Q}$. Soit $l_\theta \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $(l_\theta - 1)/n \leq \theta < l_\theta/n$. Soit a_n la fonction $(p, \theta) \mapsto (2(n - (2l_\theta - 1))\theta + 2l_\theta(l_\theta - 1)/n) \times p$. On a alors

$$sign_{exp(2i\pi\theta)}((\sigma_1 \cdots \widehat{\sigma_{n-1}})^p) \simeq_{n-1} a_n(p, \theta).$$

D'autre part pour deux tresses b_1, b_2 à au plus n brins et $\theta \in [0, 1[\cap\mathbb{Q}$ on a

$$sign_{exp(2i\pi\theta)}(\widehat{b_1 \cdot b_2}) \simeq_{2n} sign_{exp(2i\pi\theta)}(\hat{b}_1) + sign_{exp(2i\pi\theta)}(\hat{b}_2).$$

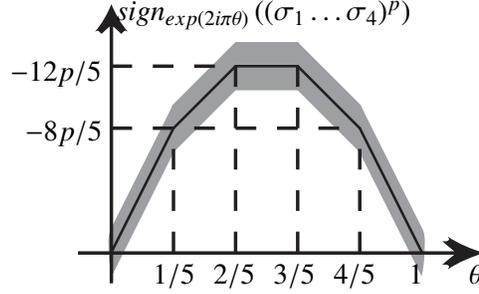


FIG. 6.1. La ω -signature de la clôture de la tresse $(\sigma_1 \dots \sigma_4)^p$ est dans la bande grise qui est un voisinage de largeur 8 autour de la fonction $a_5(p, \cdot)$.

Remarque 6.3. La fonction a_n est linéaire par rapport à la première variable p et affine par morceaux par rapport à la seconde variable θ , chacun de ces morceaux étant de largeur $1/n$ (voir la figure 6.1). Ceci implique que, pour $n, n' \geq 2, n \neq n'$ et pour tous $p, p' > 0$, les fonctions $a_n(p, \cdot)$ et $a_{n'}(p', \cdot)$ sont linéairement indépendantes sur l'espace des fonctions de $[0, 1[\cap \mathbb{Q}$ dans \mathbb{R} , et les vecteurs de \mathbb{R}^2 dont les coordonnées sont leurs évaluations en $1/n$ et $1/n'$ le sont également. Plus généralement, pour tous $p_2, \dots, p_k > 0$, les fonctions $a_2(p_2, \cdot), \dots, a_k(p_k, \cdot)$ sont linéairement indépendantes, et les vecteurs de \mathbb{R}^{k-1} dont les coordonnées sont leurs évaluations en $1/2, \dots, 1/k$ le sont également.

En combinant le lemme 6.2 et la formule (2.1) de Birman-Williams rappelée dans le théorème 2.8, on obtient le lemme suivant qui relie directement la ω -signature d'un nœud de Lorenz aux exposants n_i, m_i de la formule (2.1).

Lemme 6.4. Soit γ une orbite périodique du flot de Lorenz de coordonnées $n_1, \dots, n_{t-1}, m_1, \dots, m_{t-1}$ et soit $\theta \in [0, 1[\cap \mathbb{Q}$. Alors on a

$$\text{sign}_{\exp(2i\pi\theta)}(\gamma) \simeq_{3t^2+8t-13} \sum_{i=1}^{t-2} a_{i+1}(n_i + m_i, \theta) + a_t(n_{t-1} + m_{t-1} + t, \theta).$$

Démonstration. D'après la première partie du lemme 6.2 on a

$$\begin{aligned} \text{sign}_{\exp(2i\pi\theta)}(\Delta_t^2) &\simeq_{t-1} a_t(t, \theta), \\ \text{sign}_{\exp(2i\pi\theta)}((\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_i)^{n_i}) &\simeq_i a_{i+1}(n_i, \theta), \\ \text{sign}_{\exp(2i\pi\theta)}((\sigma_{t-1} \dots \sigma_i)^{m_{t-i}}) &\simeq_{t-i} a_{t-i+1}(m_{t-i}, \theta). \end{aligned}$$

En sommant ces approximations, on obtient

$$\text{sign}_{\exp(2i\pi\theta)}(K) \simeq a_t(t, \theta) + \sum_{i=1}^{t-1} a_{i+1}(n_i, \theta) + \sum_{i=1}^{t-1} a_{i+1}(m_i, \theta) = \sum_{i=1}^{t-2} a_{i+1}(n_i + m_i, \theta) + a_t(n_t + m_t + t, \theta),$$

où le terme d'approximation est la somme du terme d'approximation provenant de la première partie du lemme 6.2

$$(t-1) + \sum_{i=1}^{t-1} i + \sum_{i=t-1}^1 t-i = t-1 + 2 \frac{(t-1)t}{2} = t^2 - 1,$$

et du terme provenant du défaut d'additivité de la ω -signature provenant de la seconde partie du lemme 6.2

$$2t + \sum_{i=3}^t 2i + 2t + \sum_{i=t}^3 2i + 2t = 6t + 2 \cdot 2 \left(\frac{t(t+1)}{2} - 3 \right) = 2t^2 + 8t - 12.$$

Par conséquent l'approximation est à un terme $3t^2 + 8t - 13$ près. □

6.2. Largeur de la bande d'apparition d'un nœud. La ω -signature d'un nœud en étant un invariant, le lemme 6.4 implique des contraintes fortes sur les valeurs possibles des entiers $n_1, \dots, n_{t-1}, m_1, \dots, m_{t-1}$ pour que le nœud de Lorenz correspondant soit un nœud donné. Or le lemme suivant indique que la longueur d'un mot de Lorenz minimal donnant une tresse donnée est aussi une fonction affine de $n_1 + m_1, \dots, n_{t-1} + m_{t-1}$.

Lemme 6.5. *Soit f_t la fonction $(n_1 + m_1, \dots, n_{t-1} + m_{t-1}) \mapsto n_1 + \dots + n_{t-1} + m_1 + \dots + m_{t-1} + 2t$. Alors la longueur du mot de Lorenz minimal associé aux entiers $n_1, \dots, n_{t-1}, m_1, \dots, m_{t-1}$ est égale à $f_t(n_1 + m_1, \dots, n_{t-1} + m_{t-1})$.*

Démonstration. La longueur du mot de Lorenz minimal est le nombre de brins de la tresse de permutation de Lorenz minimale associée aux entiers $n_1, \dots, n_{t-1}, m_1, \dots, m_{t-1}$. La figure 2.2 montre alors le décompte : parmi les p premiers brins, il y en a $n_1 + \dots + n_{t-1}$ qui restent dans la partie gauche de la tresse, et t qui passent dans la partie droite, parmi les $n - p$ brins de droite, il y en a $m_1 + \dots + m_{t-1}$ qui restent à droite, et t qui passent à gauche. □

Nous sommes en mesure d'énoncer le théorème principal. L'idée de la démonstration est de choisir suffisamment de valeurs pour ω , afin de confiner les valeurs possibles des exposants de Birman-Williams dans un domaine borné, sur lequel la fonction affine f_t est également bornée.

Théorème 6.6. *Soit K un nœud de Lorenz et $P(K)$ le polytope de \mathbb{R}^{t-1} défini par*

$$(6.1) \quad P(K) = \left\{ (x_1, \dots, x_{t-1}) \mid \forall \theta \in \left\{ \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k} \right\}, \sum_{i=1}^{t-2} a_{i+1}(x_i, \theta) + a_t(x_{t-1} + t) \simeq_{3t^2+8t-13} \text{sign}_{\exp(2i\pi\theta)}(K) \right\}.$$

Alors $P(K)$ est un parallépipède borné, et les coordonnées n_i, m_i de toute orbite périodique γ du flot de Lorenz isotope à K sont telles que le $t-1$ -uplet $(n_1 + m_1, \dots, n_{t-1} + m_{t-1})$ est dans l'intérieur de $P(K)$.

Démonstration. Soit $a_{t,\omega}$ la fonction de \mathbb{N}^{t-1} dans \mathbb{R} définie par

$$a_{t,\omega}(n_1 + m_1, \dots, n_{t-1} + m_{t-1}) = \sum_{i=1}^{t-2} a_{i+1}(n_i + m_i, \arg \omega) + a_t(n_{t-1} + m_{t-1} + t, \arg \omega).$$

Alors le lemme 6.4 implique, pour les coordonnées n_i, m_i de toute orbite γ ,

$$\text{sign}_\omega(K) \simeq_{3t^2+8t-13} a_{t,\omega}(n_1 + m_1, \dots, n_{t-1} + m_{t-1}).$$

Par conséquent, pour chaque ω , le $t - 1$ -uplet $(n_1 + m_1, \dots, n_{t-1} + m_{t-1})$ appartient au domaine $P(K, \omega)$ déterminé par

$$P(K, \omega) = \left\{ (x_1, \dots, x_{t-1}) \mid \text{sign}_\omega(K) - (3t^2 + 8t - 13) \leq a_{t,\omega}(n_1 + m_1, \dots, n_{t-1} + m_{t-1}) \leq \text{sign}_\omega(K) + (3t^2 + 8t - 13) \right\}.$$

Choisissons $t - 1$ valeurs de ω deux à deux distinctes et telles que les fonctions affines $a_{t,\omega}$ en les variables $n_1 + m_1, \dots, n_{t-1} + m_{t-1}$ sont linéairement indépendantes, par exemple $\omega_1 = \exp(2i\pi/2), \dots, \omega_{t-1} = \exp(2i\pi/t)$. Posons

$$P'(K) = P(K, \omega_1) \cap \dots \cap P(K, \omega_{t-1}).$$

Alors les coordonnées $n_1 + m_1, \dots, n_{t-1} + m_{t-1}$ appartenant à chacun des $P(K, \omega)$, elles appartiennent à leur intersection $P'(K)$. Or $P'(K)$ coïncide avec $P(K)$. Donc les coordonnées n_i, m_i de toute orbite périodique γ du flot de Lorenz isotope à K sont telles que le $t - 1$ -uplet $(n_1 + m_1, \dots, n_{t-1} + m_{t-1})$ est dans l'intérieur de $P(K)$.

Il s'agit d'un parallépipède dans \mathbb{N}^{t-1} , borné car, d'après la remarque 6.3, les normales aux hyperplans le bornant sont linéairement indépendantes. \square

Corollaire 6.7. *Soit d la fonction associant à un nœud K de Lorenz*

$$\max_{p \in P(K)} f_t(p) - \min_{p \in P(K)} f_t(p).$$

Alors la largeur de la bande d'apparition de tout nœud de Lorenz K est bornée par $d(K)$. De plus, d ne dépend que du pas de K .

Démonstration. D'après le théorème 6.6, la largeur de la bande d'apparition de K est bornée par la différence $\max_{p \in P(K)} f_t(p) - \min_{p \in P(K)} f_t(p)$. Pour tout ω , la fonction $a_{t,\omega}$ est affine, donc les parallépipèdes $P(K)$ et $P(K')$, définis par l'équation (6.1), correspondant à deux nœuds K et K' de même pas, sont images l'un de l'autre par translation. Donc la différence $d(K)$ ne dépend pas du nœud, mais seulement de son pas t , notons-la $d(t)$. Il s'agit alors d'un majorant de la largeur de la bande d'apparition d'un nœud de pas t . \square

Remarque 6.8. La fonction d surestime largement la largeur de la bande d'apparition : d'une part le crochet de Meyer, qui correspond au défaut d'additivité de la ω -signature, vaut rarement $2n$. D'autre part on peut probablement choisir des valeurs de ω pour lesquelles l'écart entre la signature d'un nœud torique $(\sigma_1 \dots \widehat{\sigma_{n-1}})^p$ et la fonction linéaire donnée dans le lemme 6.2 est plus faible. Par exemple, concernant les tresses à 3 brins, la largeur $d(3)$, donnée par le corollaire 6.7, est de 42, alors qu'en fait la largeur de la bande d'apparition d'un nœud de pas 3 n'excède pas 3, comme nous le verrons dans la prochaine partie.

7. LES ω -SIGNATURES DES NŒUDS DE PAS 3

Dans cette partie on considère les tresses de pas égal à 3. On présente une forme normale, exhibée par M. El-Rifai dans sa thèse (voir [5]). On calcule ensuite la ω -signature à partir de cette forme. Cela ne permet pas tout à fait de montrer que cette forme est normale, c'est-à-dire que deux formes normales différentes correspondent bien à des nœuds différents. Pour cela le calcul explicite du polynôme d'Alexander (fait dans [5]) est requis. Cependant le calcul de la i -signature

à partir de cette forme normale permet d'affiner les résultats de la partie précédente et montre que la largeur d'apparition d'un nœud de pas 3 est d'au plus 3.

7.1. Une forme normale pour les nœuds de pas 3. D'après l'article de Birman-Williams, les nœuds de pas 3 sont du type $(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^2\sigma_1^{n_1}(\sigma_1\sigma_2)^{n_2}\sigma_2^{m_1}(\sigma_2\sigma_1)^{m_2}$. Les contraintes sur n_1, n_2, m_1 et m_2 pour avoir affaire à un nœud et non à un entrelacs sont de nature arithmétique : il faut et il suffit que la permutation associée soit un cycle, soit $n_1 \equiv m_1 \pmod{2}$, et, si $n_1 \equiv m_1 \equiv 0 \pmod{2}$, alors $n_2 \not\equiv m_2 \pmod{3}$, et si $n_1 \equiv m_1 \equiv 1 \pmod{2}$, alors $n_2 + m_2 \not\equiv 1 \pmod{3}$. On remarque ensuite que $(\sigma_1\sigma_2)^3$ et $(\sigma_2\sigma_1)^3$ sont éléments du centre de \mathbf{B}_3 , donc on peut ramener les facteurs $(\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2)^r$ et les $(\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^r$ en tête de la tresse, donc, quitte à augmenter l'exposant (pair) de $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$, on suppose désormais $n_2, m_2 \leq 2$. Si $n_2 = 1$, quitte à réarranger $\sigma_1\dots\sigma_1(\sigma_1\sigma_2)\sigma_2\dots\sigma_2$ en $\sigma_1\dots\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_2\dots\sigma_2$, on peut supposer $n_2 = 0$. La même chose marche avec $m_2 = 1$, où il faut cette fois-ci décaler le $(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^{2r}$ dans l'écriture de la tresse, ce qui ne pose pas de problème puisqu'il s'agit d'un élément du centre de \mathbf{B}_3 , et considérer une permutation circulaire du mot de tresse, ce qui ne pose pas plus de problème, puisqu'on s'intéresse au nœud correspondant à la clôture de la tresse et non à la tresse elle-même. Si $n_2 = 2$, les contraintes arithmétiques sur n_2 et m_2 entraînent $m_2 = 0$ ou 1. On remarque alors que dans le monoïde des tresses positives on a $\sigma_1^{n_1}(\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2)\sigma_2^{m_1} = \sigma_1^{n_1+m_1+2}\sigma_2\sigma_1$, donc on s'est ramené au cas où il n'y a qu'un σ_2 en dehors de la puissance du centre. En résumant tout cela, on aboutit au résultat suivant :

Lemme 7.1. *Les tresses à 3 brins décrivant des noeuds de Lorenz de pas 3 peuvent être mises sous la forme $(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^{2r+2}\sigma_1^{2p+1}\sigma_2^{2q+1}$, où p, q, r sont des entiers positifs ou nuls, avec $r = \lfloor \frac{n_2}{3} \rfloor + \lfloor \frac{m_2}{3} \rfloor$ et $p + q = \frac{n_1}{2} + \frac{m_1}{2} + (n_2 - 3 \lfloor \frac{n_2}{3} \rfloor) + (m_2 - 3 \lfloor \frac{m_2}{3} \rfloor) - 1$, où n_1, n_2, m_1 et m_2 sont les exposants qui apparaissent dans la formule de Birman-Williams. Réciproquement pour chaque tresse de cette forme il existe un noeud de Lorenz correspondant.*

Remarque 7.2. Si ni n_2 , ni m_2 n'est congru à 2 mod 3, alors $p = 0$ ou $q = 0$. Donc comme les mots de Lorenz ayant 3 syllabes xy sont en bijection avec les quadruplets (n_1, n_2, m_1, m_2) , la moitié des noeuds de Lorenz qui apparaissent correspondent à des valeurs où ni n_2 , ni m_2 n'est congru à 2 mod 3, donc les mots de tresses correspondants sont en fait du type $(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^{2r+2}\sigma_1^{2p+1}\sigma_2$.

Le lemme suivant a été prouvé par M. El-Rifai dans sa thèse. La démonstration repose sur la calcul du polynôme d'Alexander à partir de la forme que l'on est en train de considérer. Celui-ci s'effectue facilement à partir de la représentation de Bureau de la tresse, et permet alors de distinguer deux nœuds dont la forme normale est différente.

Lemme 7.3. *Si $(p, q, r) \neq (p', q', r')$, avec $p \leq q$ et $p' \leq q'$, alors les noeuds de Lorenz correspondants, clôtures des tresses $(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^{2r+2}\sigma_1^{2p+1}\sigma_2^{2q+1}$ et $(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^{2r'+2}\sigma_1^{2p'+1}\sigma_2^{2q'+1}$, sont différents.*

7.2. Calcul de la signature standard des nœuds de pas 3. On se sert de la partie 4 de l'article [7] et on travaille à partir de la forme normale $(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^{2r+2}\sigma_1^{2p+1}\sigma_2^{2q+1}$ des tresses correspondant à des noeuds de pas 3 pour aboutir au lemme suivant.

Lemme 7.4. *La signature d'un nœud de Lorenz de pas 3 correspondant aux entiers n_1, n_2, m_1, m_2 est $-2 \left(\lfloor \frac{2n_2}{3} \rfloor + \lfloor \frac{2m_2}{3} \rfloor \right) - (n_1 + m_1) - 2$, sauf si $n_1 = m_1 = 0$ ou 1.*

Démonstration. D'abord on s'occupe du facteur $(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^{2r+2}$. Chaque $(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^4$ ajoute -8 à la signature, et comme $Meyer(g, id) = 0$ pour tout g , il n'y a pas de terme correctif. Si r est pair il reste un facteur $(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^2$ qui ajoute encore -4 à la signature, mais il faut alors calculer $Meyer(g, -id)$, où g correspond à une tresse de type $\sigma_1\dots\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_2$. On a $\mathcal{B}_{-1}(\sigma_1^{2p+1}\sigma_2^{2q+1}) = \begin{pmatrix} 1 & 2q+1 \\ -(2p+1) & 1-(2q+1)(2p+1) \end{pmatrix}$. Si $p = q = 0$, il s'agit d'un élément elliptique conjugué à une rotation d'angle $\pi/3$. Si $p = 1, q = 0$ ou $p = 0, q = 1$, il s'agit d'un élément elliptique conjugué à une rotation d'angle $2\pi/3$. Dans tous les autres cas il s'agit toujours d'un élément hyperbolique, d'où $Meyer(g, -id) = 0$. La signature de σ_1^{2p+1} est $-2p$, et celle de σ_2^{2q+1} est $-2q$. Or $Meyer\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(2p+1) & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2q+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$ car il s'agit de deux éléments paraboliques n'ayant pas de vecteur propre commun.

En somment tout cela on obtient, pour $(p, q) \neq (0, 0), (0, 1), (1, 0)$,

$$\begin{aligned} \text{sign}\left((\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^{2r+2}\sigma_1^{2p+1}\sigma_2^{2q+1}\right) &= -4r - 2p - 2q - 4 \\ &= -4\left(\left\lfloor\frac{n_2}{3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{m_2}{3}\right\rfloor\right) - 2\left(\frac{n_1}{2} + \frac{m_1}{2} + \left(n_2 - 3\left\lfloor\frac{n_2}{3}\right\rfloor\right) + \left(m_2 - 3\left\lfloor\frac{m_2}{3}\right\rfloor\right) - 1\right) - 4 \\ &= -2\left(\left\lceil\frac{2n_2}{3}\right\rceil + \left\lceil\frac{2m_2}{3}\right\rceil\right) - (n_1 + m_1) - 2. \end{aligned}$$

□

Ces résultats correspondent exactement aux valeurs numériques, l'honneur est sauf. Dans les cas $(p, q) = (0, 0), (0, 1)$ ou $(1, 0)$, correspondant au cas $n_1 = m_1 = 0$ ou 1 , il y a un terme -2 additionnel, correspondant au crochet de Meyer elliptique non nul.

7.3. La i -signature des nœuds de pas 3. Le calcul de la i -signature dans le cas $t = 3$ permet d'atteindre la borne optimale pour la largeur de la bande d'apparition d'un nœud de pas 3.

Soit b une tresse positive à 3 brins de longueur l . D'après le théorème 4.3 de [7], la i -signature de la clôture \hat{b} de b diffère de $l/2$ d'un terme au plus 1. Par conséquent, toute tresse positive b_1 à 3 brins dont la clôture est \hat{b} a une longueur comprise entre $l/2 - 1$ et $l/2 + 1$. Or, toujours d'après [7], le terme de différence entre les longueurs de b et b_1 est égal à la partie fractionnaire de la différence entre les arguments des déterminants $\mathcal{B}_i(b)$ et $\mathcal{B}_i(b_1)$. Comme le déterminant de $\mathcal{B}_i(\sigma_1)$ et de $\mathcal{B}_i(\sigma_2)$ vaut $-i$, l'argument du déterminant est fonction de période 4 de la longueur du mot de tresse, donc la longueur modulo 4 du mot b_1 est fixée. Comme elle est également fixée dans un intervalle de largeur 2 autour de $l/2$, on en déduit que la longueur du mot de tresse déterminant un nœud de pas 3 est un invariant du nœud.

Théorème 7.5. *La largeur de la bande d'apparition d'un nœud de pas 3 est au plus 3.*

Démonstration. On vient de montrer que la longueur d'une tresse positive à 3 brins décrivant un nœud de pas 3 est un invariant du nœud. Donc la quantité $3 \times (2r + 2) + (2p + 1) + (2q + 1)$ est fixée, donc $3r + p + q$ est fixé. D'après les formules du lemme 7.1, cela fixe $n_1 + n_2 + m_1 + m_2$ à un terme 2 près (correspondant aux arrondis des parties entières). □

Ce théorème est optimal comme le montre l'exemple du nœud [12, non alternant, 242] dans les tables de M. Thistlewaite, engendré par les mots $xyxyxxyy$, $xyyxxyxy$, $xxxyxxxyxy$, $xyxyxxyxy$, $xyxyxxyxy$, $xyxyxxyxy$, $xyxyxxyxy$ et $xyxyxxyxy$, dont les longueurs vont de 9 à 11.

RÉFÉRENCES

1. J. S. BIRMAN, R. F. WILLIAMS, *Knotted periodic orbits in dynamical systems–I : Lorenz’s Equations*, Topology, Vol. 22 (1983), no. 1, pp. 47-82.
2. H. COHN, *A classical invitation to algebraic numbers and class fields*, Universitext, Springer Verlag (1978).
3. H. COHN, *Advanced number theory*, Dover Publications (1980).
4. PI. DEHORNOY, *Atlas of Lorenz knots*, www.eleves.ens.fr/home/dehornoy/atlaslorenz.txt
5. E.-S. A. EL-RIFAI, *Positive braids and Lorenz links*, PhD. Thesis, University of Liverpool (1988).
6. J. FRANKS, R. F. WILLIAMS, *Braids and the Jones polynomial*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 303 (Sep. 1987), no. 1, pp. 97-108.
7. J.M. GAMBAUDO, E. GHYS, *Braids and signatures*, Bull. Soc. Math. France 133 (2005), no. 4, 541-579.
8. E. GHYS, *Knots and dynamics*, ICM 2006, Madrid.
9. E. GHYS, *Lorenz and modular flows : a visual introduction*, Feature Column, AMS (Nov. 2006), www.ams.org/featurecolumn/archive/lorenz.html
10. L. KAUFFMAN, *On knots*, Annals of Mathematics Studies 115 (1987), Princeton University Press.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS, ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 45 RUE D’ULM, 75005 PARIS, FRANCE
E-mail address: pierre.dehornoy@ens.fr