

Rapport de stage de L3

Nicolas ROCHER

Encadré par Pierre Dehornoy (Institut Fourier)

Pavages du plan et norme de Thurston



1

Introduction

Remerciements. Ce rapport est un bref résumé du travail que j'ai effectué sous la direction de Pierre Dehornoy² au sujet des pavages et de la norme de Thurston, pendant les 6 à 8 semaines que j'ai passé entre Lyon (E.N.S) et Grenoble (Institut Fourier). Je tiens à le remercier avant de commencer. Que ce soit lors du groupe de lecture qu'il a encadré et que j'ai suivi au cours du deuxième semestre de L3 à l'E.N.S Lyon, ou durant ce stage, son enthousiasme communicatif, sa disponibilité et sa sympathie m'ont énormément motivé et conforté dans mon envie de faire des maths et de les partager. Il m'a également invité à assister aux séminaires hebdomadaires de topologie et de géométrie à l'Institut Fourier : la frustration d'être perdu un peu trop vite lors des premiers exposés m'a motivé à apprendre de nouvelles notions et Pierre a été là pour répondre à mes questions et me conseiller de bonnes références. Ainsi, parallèlement au travail principal effectué sur les pavages, j'ai eu l'occasion de me familiariser un peu avec la théorie des nœuds et des tresses, et de compléter mes connaissances vues en groupe de lecture au sujet des 3-variétés et des nœuds hyperboliques. J'espère que ce rapport saura montrer mon enthousiasme à l'issue de ce stage.

Contenu du rapport. Savoir si un ensemble fini \mathcal{P} de polygones du plan - ou ensemble de *tuiles* - peut "paver le plan", c'est-à-dire savoir s'il existe une partition du plan en copies de ces tuiles - un

1. Reptiles, M. C. Escher, 1943

2. <https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~dehornop/>

pavage - est un problème qui remonte à l'Antiquité. De manière rigoureuse, un pavage du plan formé à partir de \mathcal{P} est une collection $\mathcal{T} = \{t_i\}_{i \in I}$ telle que :

- chaque t_i est une copie translaturée d'un élément de \mathcal{P} .
- $\forall i, j \in I, i \neq j, \text{int}(t_i) \cap \text{int}(t_j) = \emptyset$ où $\text{int}(\cdot)$ désigne l'intérieur.
- si t_i et t_j s'intersectent, c'est selon leurs arêtes ou leurs sommets. (*)
- $\bigcup_{i \in I} t_i = \mathbb{R}^2$.

On note $\Omega_{\mathcal{P}}$ l'ensemble de ces pavages : avec cette notation, \mathcal{P} pave le plan si et seulement si $\Omega_{\mathcal{P}}$ est non vide. On peut également considérer des tuiles colorées et imposer que les arêtes recollées de t_i et t_j dans (*) soient de même couleur.

Les angles d'attaque pour l'étude des pavages sont variés : on peut utiliser des méthodes algébriques et étudier les groupes de pavages, on peut voir un pavage et ses isométries comme un système dynamique et utiliser la théorie ergodique, etc. Ici, on utilise des méthodes provenant de la topologie : on présente un théorème démontré par J-R. Chazottes, J-M. Gambaudo, et F. Gautero dans [Chazottes et al., 2012], qui caractérise la pavabilité d'un ensemble de tuiles \mathcal{P} au moyen d'une norme "asymptotique" sur le deuxième groupe d'homologie d'une surface branchée construite à partir des éléments de \mathcal{P} .

L'article manquant d'exemples à mon goût, j'ai décidé avec l'approbation de P. Dehornoy, de passer du temps à trouver des illustrations plus ou moins élaborées d'utilisation de ce théorème. C'est pourquoi, après avoir introduit les notions nécessaires à sa compréhension, on se consacrera principalement à l'étude de ces exemples concrets. Nous commencerons par étudier des pavages périodiques, avant de s'attarder aux cas des pavages apériodiques plus élaborés : on en présentera un en détail, construit avec un algorithme substitutif avant d'ouvrir des perspectives sur des conjectures récentes formulées entre autres par Thierry Monteil.

Table des matières

Introduction	1
Remerciements	1
Contenu du rapport	1
1. Le théorème de Chazottes-Gautéro-Gambaudo	3
1.1. Le complexe d'Anderson et Putnam	3
1.2. La norme de Thurston asymptotique	3
1.3. Le théorème CGG	4
2. Exemples périodiques	5
2.1. Le pavage carré et le pavage hexagonal	6
2.2. Le pavage hexagone-carré-octogone	7
3. Exemples apériodiques	8
3.1. Un pavage substitutif	9
3.2. Les conjectures de Thierry Monteil - Conclusion	10
Références	11

1. Le théorème de Chazottes-Gautéro-Gambaudo

Comme indiqué en introduction, le premier objectif de ce document est de présenter le théorème démontré dans [Chazottes et al., 2012], que nous appellerons désormais théorème CGG. On commence par introduire les notions nécessaires à sa compréhension.

1.1. Le complexe d'Anderson et Putnam. En 1998, J. E. Anderson et I. F. Putnam associent à un ensemble fini $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ de tuiles colorées (polygones du plan dont les arêtes sont colorées), un CW-complexe noté $AP_{\mathcal{P}}$, de la manière suivante :

Définition 1.1 (Complexe AP)

$AP_{\mathcal{P}}$ est un 2-complexe : à chaque polygone $p_i \in \mathcal{P}$ est associé une 2-cellule, et deux arêtes a_i et a_j sont recollées si et seulement si elles sont de même couleur et s'il existe une translation du plan qui envoie l'une sur l'autre.

Un tel complexe est appelé *surface branchée*, en raison de son aspect visuel au voisinage des recollements. On a représenté $AP_{\mathcal{P}}$ en Figure 1. dans le cas $\mathcal{P} = \{c, t\}$ où c est un carré de côté 1, et t un triangle équilatéral de côté 1, non colorés, et tels qu'ils possèdent eux deux un côté horizontal.

On peut alors, comme classiquement en homologie simpliciale, orienter les 2-cellules arbitrairement (disons dans le sens trigonométrique si l'on représente le complexe à plat comme ci-contre), considérer les espaces de chaînes $C_i(AP_{\mathcal{P}}, \mathbb{R})$ et les applications de bord ∂_i , et calculer les groupes d'homologie $H_i(AP_{\mathcal{P}}, \mathbb{R})$. En particulier, comme $AP_{\mathcal{P}}$ est de dimension 2, la troisième application de bord est nulle, et $H_2(AP_{\mathcal{P}}, \mathbb{R}) = \text{Ker} \partial_2$. Toujours dans l'exemple $\mathcal{P} = \{c, t\}$, on a $\partial_2(c) = a - b - a + b = 0$ et $\partial_2(t) = e - f + b$ d'où $H_2(AP_{\mathcal{P}}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}.c$.

Les éléments des H_i seront classiquement appelés des *i-cycles*. Dans toute la suite, on ne s'intéressera qu'à H_2 . On notera $H_2^+(AP_{\mathcal{P}}, \mathbb{R})$ l'ensemble des 2-cycles à coefficients positifs, et $S_2^+(AP_{\mathcal{P}}, \mathbb{R})$ le sous-ensemble convexe de $H_2^+(AP_{\mathcal{P}}, \mathbb{R})$, formé de ses éléments de norme l_1 unitaire. Dans notre exemple, $H_2^+(AP_{\mathcal{P}}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^+.c$, et $S_2^+(AP_{\mathcal{P}}, \mathbb{R})$ est réduit au singleton $\{c\}$.

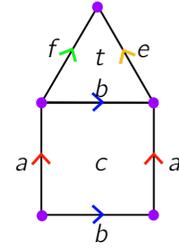


Figure 1. $AP_{\{c,t\}}$

1. L'homologie

C'est une notion fondamentale en topologie algébrique. L'idée est d'associer à un objet topologique une suite de groupes abéliens, notés H_i , chacun décrivant comment des variétés de dimension i sont "contenues" dans cet objet. Il y a plusieurs théories homologiques suivant la nature de l'objet considéré : si c'est un complexe simplicial, on parlera d'homologie simpliciale, si c'est un espace topologique, on parlera d'homologie singulière, etc. Dans ce document, on ne parlera que de la première. Pour se familiariser avec ces notions, on pourra se référer à [Hatcher, 2002].

1.2. La norme de Thurston asymptotique. Soit \mathcal{F} une surface orientée compacte, formée à partir d'un recollement de polygones notés t_1, \dots, t_s . On choisit l'orientation de telle sorte qu'elle soit induite par celles des polygones, tous orientés dans le sens trigonométrique. Supposons qu'il existe un plongement local $\pi : \mathcal{F} \rightarrow AP_{\mathcal{P}}$ avec, pour chaque t_i , un entier $k(i) \in \{1, \dots, n\}$ tel que les intérieurs de t_i et $p_{k(i)}$ peuvent s'envoyer l'une sur l'autre. On définit la 2-chaîne à coefficients entiers

$$c(\mathcal{F}) := \sum_{i=1}^n |\{1 \leq j \leq s \mid k(j) = i\}| p_i,$$

où $|\cdot|$ désigne le cardinal.

Étant donné un élément $c \in H_2^+(AP_p, \mathbb{Z})$, on note $[c]$ l'ensemble des surfaces \mathcal{F} qui vérifient $c(\mathcal{F}) = c$. La norme de Thurston de c est alors définie comme la "complexité minimale" des surfaces contenues dans $[c]$:

Définition 1.2 (Norme de Thurston)

Avec les notations ci-dessus :

$$\|c\| := \min_{\mathcal{F} \in [c]} |\chi(\mathcal{F})| \text{ si } c \neq 0 ; 0 \text{ si } c = 0,$$

où χ désigne la caractéristique d'Euler.

Les surfaces orientables compactes \mathcal{F} étant des surfaces de genre $g \in \mathbb{N}$, elles ont pour caractéristique d'Euler $\chi(\mathcal{F}) = 2 - 2g$. Ainsi, si $\|c\| = 0$ et $c \neq 0$ alors il existe $\mathcal{F} \in [c]$ telle que $\chi(\mathcal{F}) = 0$, et par suite \mathcal{F} est un tore. A l'inverse, plus $\|c\|$ est grand, plus le genre minimal des surfaces contenues dans $[c]$ est grand, d'où le terme de "complexité minimale" introduit plus haut. Le nom de norme est ainsi un peu abusif puisqu'elle ne vérifie pas $\|c\| = 0 \Rightarrow c = 0$. De même, si $k \in \mathbb{N}$, $\|kc\| \leq k\|c\|$ et à priori l'égalité d'homogénéité n'est pas assurée. Pour l'obtenir, on étend cette "norme" en ce qu'on appelle la norme de Thurston asymptotique :

2. Classification des surfaces

En 1907, Dehn et Heegaard montrent qu'une surface fermée est soit orientable et homéomorphe à une somme connexe de tores - surface de genre $g \in \mathbb{N}$ - soit elle ne l'est pas et est homéomorphe à une somme connexe de plans projectifs. Leur preuve repose sur l'existence d'une triangulation. Pour distinguer les sommes connexes entre elles, on utilise la caractéristique d'Euler χ . Dans un cadre général, si l'on dispose d'un objet topologique X sur lequel on a défini les groupes d'homologie, on définit $\chi(X) := \sum_{i \in \mathbb{N}^*} (-1)^i \dim(H_i(X, \mathbb{Z}))$. Pour le cas d'une surface \mathcal{F} triangulée par S sommets, A arêtes, et F faces, on a $\chi(\mathcal{F}) = S - A + F$. On démontre alors que $\chi(\mathcal{F})$ ne dépend pas de la triangulation choisie et si Σ_g désigne une surface de genre g , alors $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$, en obtenant Σ_g à partir d'un polygone à $4g$ côtés dont les arêtes appariées sont recollées. Une référence classique à ce sujet est [Gramain, 1971]. Pour une référence plus récente et interactive, on peut consulter [de Saint Gervais, 2017].

Définition 1.3 (Norme de Thurston asymptotique)

$$\| \|c\| := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \|nc\|.$$

En revanche, $\| \|c\| = 0$ n'implique plus que $[c]$ contient un tore, comme on le verra dans les exemples apériodiques à la fin de ce document. Comme on a l'homogénéité, on peut étendre $\| \|$ à $H_2^+(AP_p, \mathbb{Q})$ par $\| \|c\| = \frac{1}{k} \| \|kc\| \|$ pour $k \in \mathbb{N}$ tel que kc est à coefficients entiers, puis par densité à $H_2^+(AP_p, \mathbb{R})$, mais il faut d'abord s'assurer de sa continuité. Ceci est fait en détail dans [Chazottes et al., 2012], où il est même montré que $\| \|$ est lipschitzienne sur $H_2^+(AP_p, \mathbb{Q})$.

1.3. **Le théorème CGG.** Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème attendu :

Théorème 1.1 (CGG)

Un ensemble \mathcal{P} de tuiles pave le plan si et seulement si $H_2^+(AP_p, \mathbb{R}) \neq \{0\}$ et s'il existe un 2-cycle normalisé $c \in S_2^+(AP_p, \mathbb{R})$ tel que $\| \|c\| \| = 0$.

Bien que ce théorème apporte un point de vue nouveau sur les pavages du plan comme on le verra, il ne faut pas penser qu'il fournisse une méthode efficace pour décider de la pavabilité d'un ensemble de tuiles (sens indirect). En effet, le problème du Domino, qui consiste à déterminer la pavabilité

d'un ensemble de tuiles carrées colorées de côté 1 - on parle de *tuiles de Wang*³ - a été démontré indécidable par Robert Berger⁴ en 1966. A fortiori, le problème général avec des tuiles polygonales colorées est indécidable également. Comme le théorème fournit une équivalence, on s'attend donc à ce que la proposition de droite, à savoir le calcul de la norme de Thurston asymptotique, soit difficile en général, et qu'il faille procéder au cas par cas. S'il y a un cycle tel que $\|c\| = 0$ alors $\|c\| = 0$ par sous-linéarité. En revanche, si l'on veut trouver $c \in S_2^+(AP_{\mathcal{P}}, \mathbb{R})$ tel que $\|c\| = 0$ mais qu'il n'y a pas de cycle tel que $\|c\| = 0$, ce qui sera le cas dans les exemples apériodiques, il faut trouver une suite $(\mathcal{F}_n)_n$ de surfaces qui se plongent dans $AP_{\mathcal{P}}$ comme décrit ci-dessus, calculer leurs caractéristiques d'Euler $(\chi(\mathcal{F}_n))_n$, et vérifier que les suites $\frac{|\chi(\mathcal{F}_n)|}{|c(\mathcal{F}_n)|}$ et $\frac{c(\mathcal{F}_n)}{|c(\mathcal{F}_n)|}$ convergent respectivement vers 0 et c . C'est ce que l'on va faire dans les parties suivantes : vérifier le sens direct du théorème CGG après avoir pris connaissance du pavage.

2. Exemples périodiques

Un pavage périodique T est un pavage tel qu'il existe deux vecteurs a et b de \mathbb{R}^2 , linéairement indépendants, tels que T soit invariant par a et b , i.e. $T + a = T = T + b$. Avant d'étudier des exemples d'utilisation du théorème CGG, on va en donner une version périodique et la démontrer.

Théorème 2.1 (CGG périodique)

Une ensemble \mathcal{P} de tuiles pave périodiquement le plan si et seulement si $H_2^+(AP_{\mathcal{P}}, \mathbb{R}) \neq \{0\}$ et s'il existe un 2-cycle $c \in H_2^+(AP_{\mathcal{P}}, \mathbb{R})$ tel que $\|c\| = 0$.

À la différence du théorème général, ici on demande que la norme **non** asymptotique soit nulle, et le cycle choisi n'est en général pas normalisé.

La preuve en question repose sur la notion de *domaine fondamental* : un domaine fondamental pour un pavage périodique T avec les notations ci-dessus est un polygone Δ du plan tel que :

- $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{k,l \in \mathbb{Z}} \Delta + ka + lb$.
- $\text{int}(\Delta + ka + lb) \cap \text{int}(\Delta + k'a + l'b) = \emptyset$ pour $(k, l), (k', l') \in \mathbb{Z}^2$ distincts.

Un domaine fondamental n'est donc rien d'autre qu'un "motif" de base pour le pavage périodique, qui se répète dans les deux directions non colinéaires définies plus haut.

Démonstration : Si \mathcal{P} pave le plan, soit $T = \{t_i\}_{i \in I}$ un pavage formé à partir de \mathcal{P} et a, b deux vecteurs de \mathbb{R}^2 linéairement indépendants comme dans la définition ci-dessus. Quitte à translater un peu T , on peut supposer que l'origine de \mathbb{R}^2 coïncide avec le sommet d'une tuile t_i . On veut construire un domaine fondamental Δ .

On définit le parallélogramme $F = \{ta + sb, 0 \leq t, s \leq 1\}$. Ses côtés parallèles $\{ta, 0 \leq t \leq 1\}$ et $\{ta + b, 0 \leq t \leq 1\}$ rencontrent respectivement les tuiles translattées $t_{i_1}^a, \dots, t_{i_s}^a$ et $\{\tilde{t}_{i_1}^a, \dots, \tilde{t}_{i_s}^a\}$ (par rencontre, on entend que les tuiles doivent au moins avoir un point intérieur dans F). Comme $T + a = T$ par définition, $t_{i_k}^a$ et $\tilde{t}_{i_k}^a$ sont les translattées d'une même tuile de \mathcal{P} . De même, $\{tb, 0 \leq t \leq 1\}$ rencontre $t_{j_1}^b, \dots, t_{j_r}^b$, $\{tb + a, 0 \leq t \leq 1\}$ rencontre $\{\tilde{t}_{j_1}^b, \dots, \tilde{t}_{j_r}^b\}$ et $t_{j_k}^b$ et $\tilde{t}_{j_k}^b$ sont les translattées d'une même tuile de \mathcal{P} .

On définit Δ comme le polygone formé des $t_i \in T$ situées à l'intérieur du parallélogramme F (au sens large : tels qu'aucune arête de t_i ne sorte de F , un arête d'une tuile t_i pouvant être sur le bord de F), ainsi que pour chaque i_k ($1 \leq k \leq s$), au choix $t_{i_k}^a$ ou $\tilde{t}_{i_k}^a$, et pour chaque j_k ($1 \leq k \leq r$), au choix $t_{j_k}^b$ ou $\tilde{t}_{j_k}^b$ (en faisant un choix cohérent si certains $t_{i_k}^a, t_{j_l}^b, \tilde{t}_{i_k}^a, \tilde{t}_{j_l}^b$ coïncident). Pour y voir plus clair, on peut regarder la Figure 2.

On note t_{i_1}, \dots, t_{i_m} les tuiles formant Δ , qui est par construction un tore, une fois qu'on a recollé ses côtés appariés. En outre, $c(\Delta) = t_{i_1} + \dots + t_{i_m}$ est dans $H_2^+(AP_{\mathcal{P}}, \mathbb{R})$ et est de norme de Thurston nulle, puisqu'on peut le réaliser par un tore. En le normalisant, on obtient bien un cycle $c = \frac{c(\Delta)}{|c(\Delta)|} \in S_2^+(AP_{\mathcal{P}}, \mathbb{R})$ tel que $\|c\| = 0$, par sous-linéarité de $\|\cdot\|$.

Réciproquement, soit $c \in H_2^+(AP_{\mathcal{P}}, \mathbb{R})$ tel que $\|c\| = 0$. Alors il existe un tore \mathcal{T} , formé à partir de

3. Du nom de Hao Wang (1921-1995), mathématicien chinois.

4. Étudiant de H. Wang.

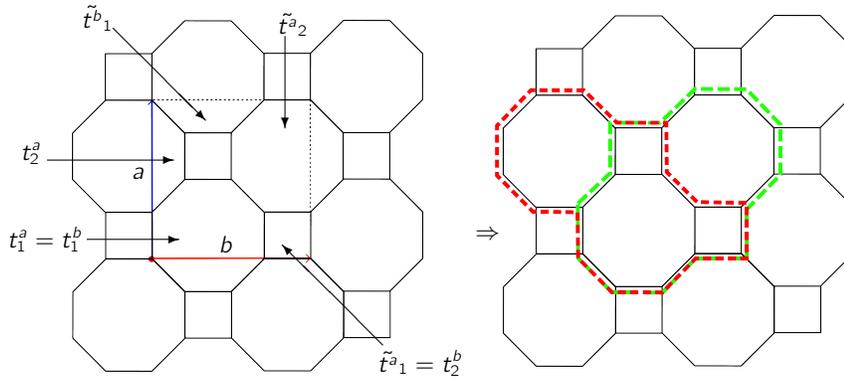


Figure 2. Construction du domaine fondamental

polygones t_1, \dots, t_s , copies de tuiles de \mathcal{P} , tel que $c(\mathcal{T}) = c$. Soit P un point de \mathcal{T} , qui soit aussi un sommet d'un des polygones t_i . On considère d_p et d_m respectivement un parallèle et un méridien de \mathcal{P} , se coupant en P . On peut déformer continuellement d_p et d_m en \tilde{d}_p et \tilde{d}_m sur \mathcal{T} de sorte qu'ils ne passent que par des cotés des t_i . En "découpant" \mathcal{T} le long de ces courbes polygonales par morceau \tilde{d}_p et \tilde{d}_m , on obtient un polygone noté Δ , formé à partir de copies de tuiles de \mathcal{P} et qui pave le plan par construction puisqu'il se recolle en un tore. ■

3. Les pavages réguliers

Les pavages réguliers sont très bien connus de nos jours : il en existe 17 types. Pour définir le domaine fondamental, on a introduit deux vecteurs a et b qui laissent invariant le pavage. On peut généraliser cette idée en introduisant, pour un pavage \mathcal{T} , un groupe noté $G(\mathcal{T})$ constitué des isométries de \mathbb{R}^2 qui le laissent invariant. Si a et b sont choisis de norme minimale, $z \in \mathbb{R}^2 \mapsto z + a$ et $z \in \mathbb{R}^2 \mapsto z + b$ génèrent le sous-groupe des translations de $G(\mathcal{T})$ et définissent un réseau $\mathbb{Z}.a + \mathbb{Z}.b$ sur lequel agit $G(\mathcal{T})$, qui peut aussi contenir des rotations, des symétries, etc. La classification de tels groupes $G(\mathcal{T})$ - appelés *groupes cristallographiques* - constitue le *théorème de Fedorov* (1891). On peut en apprendre plus dans [De Rop, 2012]. Bien que ce théorème soit tardif, les 17 pavages réguliers étaient déjà connus empiriquement depuis longtemps, notamment dans l'art islamique traditionnel : certains disent qu'on peut tous les trouver sur les mosaïques du palais de l'Alhambra (Grenade).

Dans les exemples qui suivent, on va appliquer le sens direct du théorème CGG périodique, c'est à dire trouver différents domaines fondamentaux pour des ensembles concrets de tuiles.

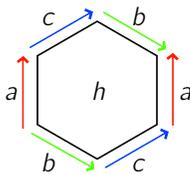


Figure 3. $AP_{\{h\}}$

2.1. Le pavage carré et le pavage hexagonal. Le premier exemple est celui du pavage trivial correspondant au jeu de tuiles $\mathcal{P} = \{c\}$ où c est un carré non coloré. En reprenant l'exemple de la Figure 1. sans le triangle, on a $H_2^+(AP_{\{c\}}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^+.c$. Si \mathcal{T} désigne le tore plat construit à partir d'un recollement de c , l'application π est l'identité de \mathcal{T} vers $AP_{\mathcal{P}}$. Ainsi, $c(\mathcal{T}) = c$ avec $\|c(\mathcal{T})\| = 0$.

Le deuxième exemple est quasi similaire : ici, $\mathcal{P} = \{h\}$ où h est un hexagone non coloré. Il correspond du pavage hexagonal, que l'on rencontre par exemple dans les ruches d'abeilles. Comme on le voit en Figure 3, $\partial_2(h) = a - b - c - a + b + c$ et $S_2^+(AP_{\{c\}}, \mathbb{R}) = \{h\}$. Cette fois-ci, \mathcal{T} construit à partir du recollement de h comme en Figure 4 n'est plus un tore plat, mais un tore hexagonal. En revanche π est toujours l'identité, et on conclut de la même manière.

2.2. Le pavage hexagone-carré-octogone. On étudie maintenant plus en détail les pavages périodiques associés à un jeu de tuiles non trivial : $\mathcal{P} = \{c, h, o\}$ où c est un carré, h un hexagone et o un octogone, tous de côtés 1 et non colorés, l'hexagone étant tel qu'un de ses côtés soit vertical. On tracera un graphique représentant $S_2^+(AP_{\mathcal{P}}, \mathbb{R})$ et ses éléments de norme asymptotique nulle pour avoir une compréhension globale de ce jeu de tuiles.

Toujours comme précédemment, comme les bords de c, h et o sont recollés dans $AP_{\mathcal{P}}$, on a $H_2^+(AP_{\mathcal{P}}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ \cdot c + \mathbb{R}^+ \cdot h + \mathbb{R}^+ \cdot o$.

Commençons par décrire complètement $\Omega_{\{c,o\}} \subset \Omega_{\mathcal{P}}$.

Le pavage carré étudié en 2.1 y est contenu. Le pavage classique octogone-carré est également présent, dont un domaine fondamental peut être construit comme en Figure 2. Le cycle associé au domaine fondamental représenté est $2c + 2o$ qui correspond au cycle normalisé de norme de Thurston nulle $\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}o$. En outre, on remarque que si un pavage de $\Omega_{\{c,o\}}$ contient des tuiles copies de c et de o , alors il y a la même proportion de chacune. En effet, au dessus d'une copie de o , si l'on met un autre octogone, l'angle formé par les deux côtés obliques adjacents aux côtés horizontaux appariés vaut $\frac{\pi}{2}$, ce qui ne laisse la place ni pour un octogone ni pour un carré. Ainsi, il y a forcément une copie de c au dessus de chaque copie de o . Réciproquement, il y a toujours une copie de o en dessous de chaque copie de c . Supposons le contraire, c'est à dire l'existence d'un pavage contenant au moins une copie de o , et avec deux copies de c verticalement adjacentes. A partir de ces copies, on construit un chemin le long de copies de c jusqu'à une copie de o . On aboutit à l'une des obstructions représentées en Figure 4 (ou leur symétrique), qui ne sont pas réalisables pour un pavage valide, ce qui conclut. Par ailleurs il n'y a pas de pavage formé uniquement avec des copies de o , pour la même raison de mesure d'angle que ci-dessus. Finalement $\Omega_{\{c,o\}}$ est constitué uniquement du pavage carré et du pavage octogone-carré. Étudions maintenant $\Omega_{\{h,o\}} \subset \Omega_{\mathcal{P}}$. Il contient le pavage hexagonal mentionné en 2.1, et c'est en fait le seul, car en dessous d'une copie de o , on ne peut en mettre qu'une autre, ce qui ne laisse la place ni pour un nouvel octogone si pour un hexagone.

Combinons maintenant toutes les tuiles. On commence par un pavage de base octogone-hexagone-carré dont un domaine est représenté en Figure 5 à gauche pour $N = 0$. Ce domaine est associé au cycle normalisé de norme nulle $\frac{1}{3}c + \frac{1}{3}h + \frac{1}{3}o$. A partir de ce pavage, on peut en construire une infinité d'autres en augmentant ou diminuant la proportion de tuiles hexagonales : des domaines fondamentaux et leurs cycles associés sont également présents ci-dessous.

Résumons la situation. Si un triplet (x, y, z) représente les coordonnées selon c, o et h respectivement, d'un point $c \in S_2^+(AP_{\mathcal{P}}, \mathbb{R})$, on a vu que les points extrémaux $A = (1, 0, 0)$ et $B = (0, 0, 1)$ sont de norme de Thurston nulle, et que A est le seul point correspondant à un pavage périodique dans le demi-plan $\{(x, y, z) \mid x > y\}$. Par ailleurs, si $C = (0, 1, 0)$, le point $H = (1/2, 1/2, 0)$ est aussi un point du segment $[AC]$ correspondant à un pavage périodique. De plus, la famille infinie de pavages mentionnés en Figure 5 correspond à des cycles du segment $[BH]$. Pour finir, par sous-linéarité de $||\cdot||$, le simplexe $ABHO$ est de norme asymptotique nulle. En revanche, $CBHO$ ne l'est pas : on peut s'en convaincre partiellement en remarquant que $[HC]$ n'est pas de norme nulle, auquel cas cela contredirait ce qu'on a dit sur la proportion de carrés et d'octogones. On obtient le graphique représenté en Figure 6 :

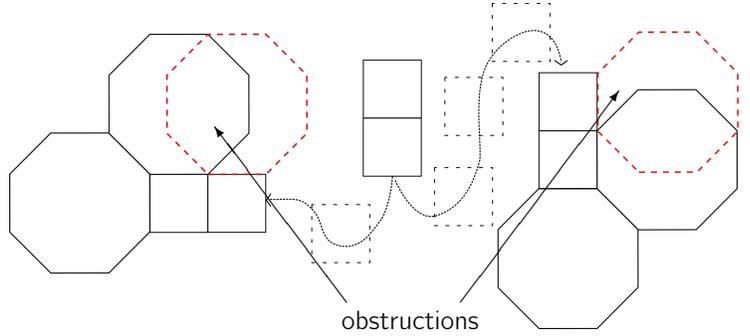


Figure 4. Chemins de copies de c jusqu'à une obstruction

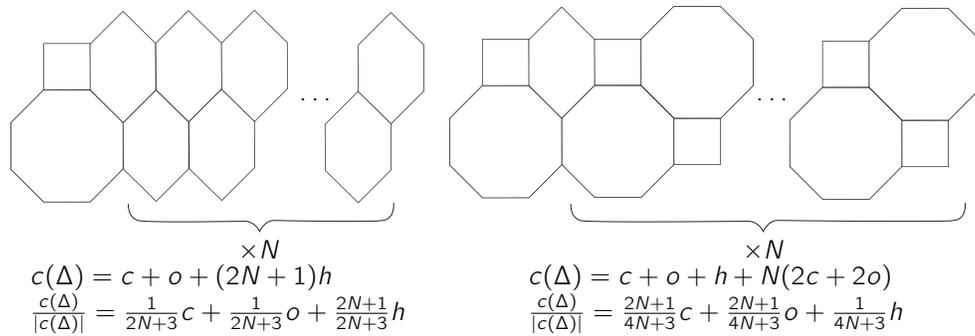


Figure 5. Famille de domaines fondamentaux de pavages de $\Omega_{\{c,o,h\}}$

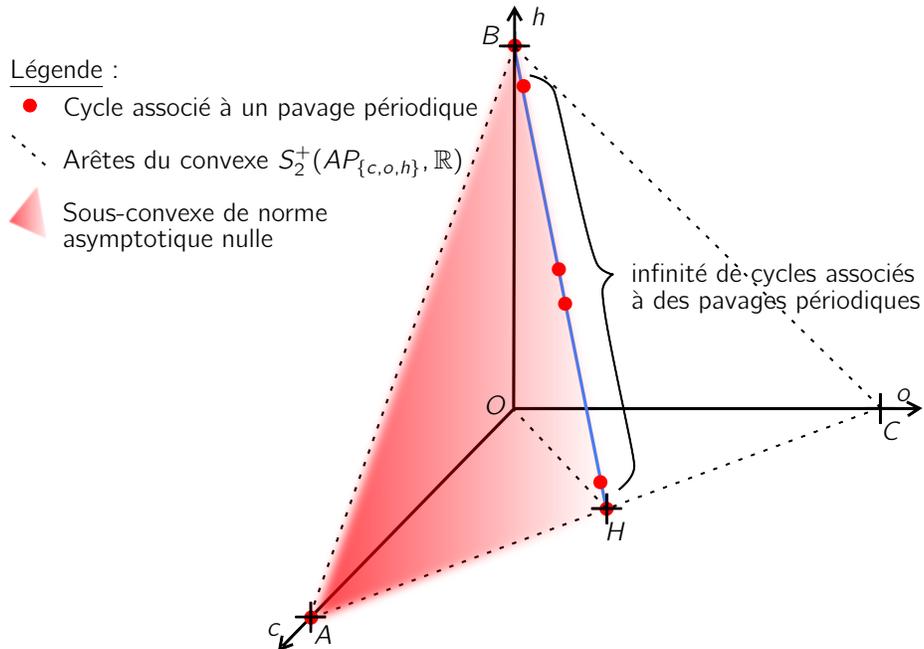


Figure 6. $S_2^+(AP_{\{c,o,h\}}, \mathbb{R})$ et des éléments de norme asymptotique nulle

3. Exemples apériodiques

Nous abordons maintenant les pavages apériodiques, c'est-à-dire pour lesquels il n'existe pas de domaine fondamental. Comme on l'a remarqué en 1.3, la situation est bien plus délicate puisqu'on ne pourra pas trouver de cycles de norme nulle, mais seulement de norme asymptotique nulle. On verra toutefois que le point de vue apporté par le théorème de CGG y est plus intéressant, car finalement, dans les cas périodiques précédents, le théorème CGG périodique n'apporte rien d'autre qu'une reformulation du concept de domaine fondamental. Comme précédemment, on ne va parler que du sens direct du théorème : en fait c'est le seul sens intéressant, puisqu'il est en général impossible d'appliquer le sens indirect sans une bonne connaissance du pavage, et la démarche naturelle est donc d'appliquer le sens direct à un pavage déjà connu pour en avoir un point de vue supplémentaire. La compréhension actuelle des relations entre la plupart des pavages apériodiques et le théorème CGG est encore largement lacunaire : on va surtout se contenter de donner un exemple de pavage apériodique substitutif et formuler certaines conjectures, en ouvrant notamment des perspectives sur des travaux récents de Thierry Monteil.

3.1. **Un pavage substitutif.** L'exemple choisi est celui d'un pavage substitutif apériodique très simple. Ici, \mathcal{P} est constitué des quatre tuiles p_1, p_2, p_3 et p_4 suivantes :

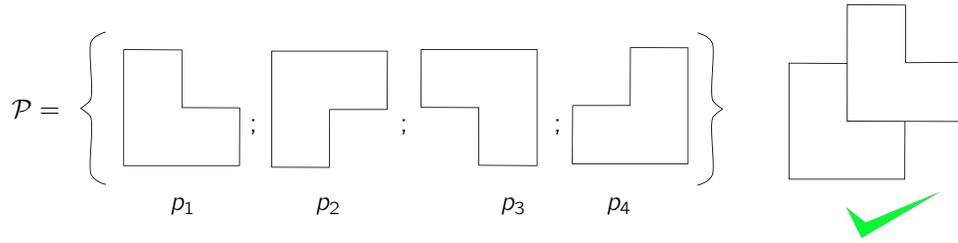


Figure 7. Polygone en L

Les grands cotés de ces tuiles sont divisés en deux de sorte qu'on puisse "imbriquer" deux copies de L ensemble, comme à droite de la figure ci-dessus. Pour construire le pavage en question, la règle substitutive est la suivante, représentée en Figure 8 : on part d'une copie de p_1 ; on la dilate d'un facteur 2 ; on en substitue certaines parties par des copies de p_1, p_2 et p_4 ; la figure obtenue est un "L" en même position que la tuile de départ, constitué de copies des éléments de \mathcal{P} , qui prend le rôle de la copie de p_1 dans l'itération suivante.

En répétant cet algorithme indéfiniment, on obtient un pavage du plan apériodique, représenté lui

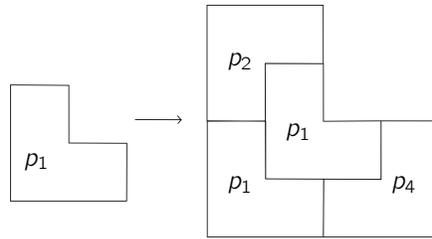


Figure 8. Substitution

en Figure 10. L'apériodicité est facile à voir puisque le pavage présente des portions de carrés de plus en plus grands : aucune translation n'envoie un carré sur un carré de côté plus grand, et on ne peut donc pas construire de domaine fondamental pour ce pavage.

En revanche, on peut trouver une suite de "L" de plus en plus grands, correspondant à une suite de surfaces fermées orientées $(\mathcal{F}_n)_n$ qui se plongent dans $AP_{\mathcal{P}}$ comme précédemment (cf. Figure 10). Elles sont toutes de genre 2, car elles peuvent être triangulées par $S = 1$ sommet, $A = 9$ arêtes et $F = 6$ faces d'où $\chi = S - A + F = 1 - 9 + 6 = -2$ (cf. Figure 9). En outre, \mathcal{F}_n est composée de 4^n copies d'éléments de \mathcal{P} - la substitution représentée en Figure 8 multiplie par 4 le nombre de tuiles contenues dans le motif de départ - d'où

$$\frac{|\chi(\mathcal{F}_n)|}{|c(\mathcal{F}_n)|} = \frac{2}{4^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. (*)$$

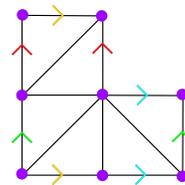


Figure 9. Triangulation des surfaces \mathcal{F}_n

La suite $\left(\frac{c(\mathcal{F}_n)}{|c(\mathcal{F}_n)|}\right)_n$ étant à valeurs dans $S_2^+(AP_{\mathcal{P}}, \mathbb{R})$ qui est fermé et borné pour la norme l_1 , donc compact, on peut en extraire une sous-suite qui converge vers $c \in S_2^+(AP_{\mathcal{P}}, \mathbb{R})$, et pour laquelle (*) est toujours vérifiée. Par suite, c est de norme asymptotique nulle, ce qui montre le sens direct du théorème CGG général.

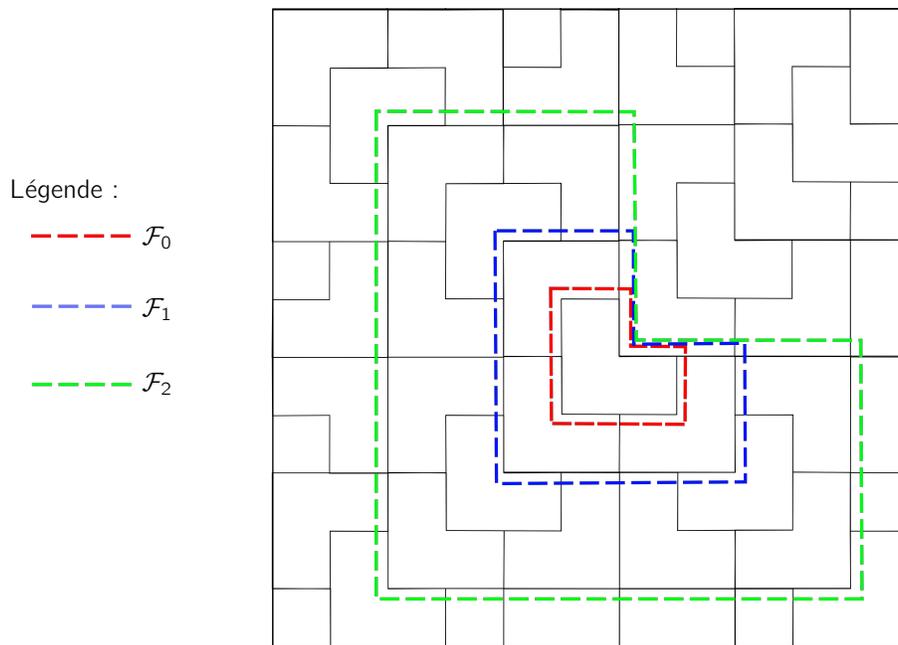


Figure 10. Portion du pavage final et premiers termes de la suite $(\mathcal{F}_n)_n$

4. À la recherche des pavages apériodiques minimaux

Parmi les pavages apériodiques pour lesquels on ne sait pas appliquer le théorème CGG, il y a le pavage de Culik, présenté dans [Culik, 1996]. Il est constitué à partir d'un jeu de 13 tuiles pouvant paver apériodiquement le plan, mais pas périodiquement : ce n'est par exemple pas le cas du jeu de tuiles du pavage substitutif étudié, qui peut paver périodiquement le plan (deux "L" tête-bêches forment un domaine fondamental). La recherche d'un tel jeu de tuiles minimal a fait l'objet de nombreux travaux : le problème est résolu depuis 2015, dans [Rao and Jeandel, 2015]. Les auteurs y exhibent un jeu minimal de 11 tuiles répondant à la question. Un des auteurs Michael Rao^a, et Nathalie Aubrun^b qui travaille aussi autour du sujet, ont été disponibles pour répondre à mes questions à ce sujet et me guider vers les travaux de Thierry Monteil. Je les en remercie.

a. perso.ens-lyon.fr/michael.rao/

b. perso.ens-lyon.fr/nathalie.aubrun/

3.2. Les conjectures de Thierry Monteil - Conclusion. Le pavage précédent est certes apériodique, mais assez simple dans sa construction : il existe des pavages apériodiques bien plus complexes, comme par exemple le pavage de Culik, qui est formé à partir d'un jeu de 13 tuiles de Wang (cf. [Culik, 1996]). Sa construction nécessite les notions d'automate, de suite de Beatty, et de commensurabilité : il est loin d'être un simple pavage substitutif. On ne sait pas encore à ce jour comment lui appliquer le sens direct du théorème CGG. En revanche, il est clair que si on y parvient prochainement, les surfaces \mathcal{F}_n comme ci-dessus nous permettront, suivant leur genre, de conclure quant au caractère substitutif ou non du pavage de Culik. Cependant, pour assurer la limite

$$\frac{|\chi(\mathcal{F}_n)|}{|c(\mathcal{F}_n)|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

il faudra que $|\chi(\mathcal{F}_n)|$ soit négligeable devant $|c(\mathcal{F}_n)|$. Plus précisément, dans [Monteil, 2017], Thierry Monteil⁵ a introduit une notion plus fine que la norme de Thurston asymptotique pour mesurer la vitesse de convergence de la limite ci-dessus, en se restreignant aux pavages de Wang. On interprète ces travaux en terme des notions manipulées dans ce rapport.

Considérons un pavage de Wang $\mathcal{T} \in \Omega_{\mathcal{P}}$, et $n \in \mathbb{N}^*$ un entier.

Définition 3.1 (Genre d'ordre n d'un pavage de Wang)

Le genre d'ordre n du pavage \mathcal{T} est la complexité minimale des surfaces fermées orientées \mathcal{F} se plongeant dans $AP_{\mathcal{P}}$ et telles que $c(\mathcal{F})$ soit de l'ordre de n . On le note $g_n(\mathcal{T})$.

Le théorème CGG pour les tuiles de Wang se reformule ainsi : un ensemble \mathcal{P} de tuiles de Wang pave le plan si et seulement si il existe $\mathcal{T} \in \Omega_{\mathcal{P}}$ tel que $g_n(\mathcal{T}) = o(n)$.

Pour les pavages périodiques, on a vu que $g_n(\mathcal{T}) = 0$ à partir d'un certain rang, et pour les pavages substitutifs, $g_n(\mathcal{T}) = O(1)$. Thierry Monteil affirme que le théorème CGG n'est pas optimal : un pavage vérifie en fait $g_n(\mathcal{T}) = O(\sqrt{n})$.

Les questions liées à l'ordre de grandeur de $g_n(\mathcal{T})$ sont ouvertes pour la plupart des pavages \mathcal{T} : par exemple, on ne sait pas s'il existe un pavage avec $g_n(\mathcal{T}) = \Omega(\sqrt{n})$, ni s'il existe des ordres de grandeurs intermédiaires entre $\Omega(1)$ et $O(\sqrt{n})$. Après avoir classifié les pavages périodiques au XIX^{ème} siècle, on peut donc imaginer que les prochains travaux sur la norme de Thurston asymptotique et le genre d'un pavage pourront aider à une compréhension plus fine des classes de complexité des pavages apériodiques.

Références

- [Chazottes et al., 2012] Chazottes, J., Gambaudo, J., and Gautéro, F. (2012). Tilings of the plane and thurston semi-norm. *Geometriae Dedicata*.
- [Culik, 1996] Culik, K. (1996). An aperiodic set of 13 wang tiles. *Discrete Mathematics*.
- [De Rop, 2012] De Rop, Y. (2012). Les pavages réguliers du plan. <http://hdl.handle.net/2268/18837>. Document pédagogique en ligne.
- [de Saint Gervais, 2017] de Saint Gervais, H. (2017). Analysis situs - topologie des variétés. <http://analysis-situs.math.cnrs.fr/>.
- [Gramain, 1971] Gramain, A. (1971). *Topologie des surfaces*. Presses Universitaires de France (PUF).
- [Hatcher, 2002] Hatcher, A. (2002). *Algebraic Topology*. Cambridge University Press.
- [Monteil, 2017] Monteil, T. (2017). Down with hierarchy. http://www.crm.umontreal.ca/2017/Pavages17/pdf/Rao2_slides.pdf. Slides présentés durant une colloque.
- [Rao and Jeandel, 2015] Rao, M. and Jeandel, E. (2015). An aperiodic set of 11 wang tiles. *Arxiv*. Prépublication en ligne.

5. <http://monteil.perso.math.cnrs.fr/>