Universités de Marseille,
Licence de Mathématiques
Mesure et intégration
Partiel, 11 mars 2005

Exercice 1

Soit (E, T) un espace mesurable.

1. Soit m une application σ-additive de T dans $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $m(\emptyset) = 0$.
   (b) On définit l'intégrale par rapport à m d'une fonction caractéristique 1_A d'un élément A de T par $\int 1_A dm = m(A)$. On définit ensuite l'intégrale d'une fonction étagée positive $f = \sum_{i=1,N} \alpha_i 1_{A_i}$ par $\int f dm = \sum_{i=1,N} \alpha_i m(A_i)$. Cette définition a-t-elle un sens (justifier brièvement)? Peut-on alors définir l'intégrale des fonctions mesurables positives par passage à la limite?

2. On suppose maintenant que m est une mesure positive sur T. Pour chacune des hypothèses suivantes sur f :
   (a) $f \in \mathcal{E}_+$,
   (b) $f \in \mathcal{M}_+$,
   (c) $f \in \mathcal{M}$,
   (d) $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$,
   (e) $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$,

   examiner la véracité de chacune des assertions suivantes (justifier brièvement les réponses) :

$$\int f dm = 0 \text{ si et seulement si } f = 0. \tag{1}$$

$$\int f dm = 0 \text{ si et seulement si } f = 0 \text{ p.p.} \tag{2}$$

$$\int |f| dm = 0 \text{ si et seulement si } f = 0. \tag{3}$$

$$\int |f| dm = 0 \text{ si et seulement si } f = 0 \text{ p.p.} \tag{4}$$

Exercice 2

Soit m une mesure sur la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on note $I + x = \{y \in \mathbb{R}; \exists z \in I; y = z + x\}$.. On suppose que la mesure m est telle que :

$$\text{Pour tout intervalle } I \text{ de } \mathbb{R} \text{ et tout } x \in \mathbb{R}, m(I) = m(I + x) \tag{5}$$

et

$$m([0, 1]) = 1 \tag{6}$$

1. Montrer que $m(\{x\}) = m(\{y\})$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2. En déduire que $m(\{x\}) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $m([0, \frac{1}{n}]) = \frac{1}{n}$.
4. En déduire que m est la mesure de Lebesgue.

Exercice 3

Soit (E, T, m) un espace mesuré. Pour $f \in \mathcal{M}$, on pose $A_f = \{C \in \mathbb{R}, |f| \leq C \text{ p.p.}\}$. Si $A_f \neq \emptyset$, on pose $\|f\|_\infty = \inf A_f$. Si $A_f = \emptyset$, on pose $\|f\|_\infty = \infty$.

1. Soit $f \in \mathcal{M}$ t.q. $A_f \neq \emptyset$. Montrer que $|f| \leq \|f\|_\infty$ p.p. et donc que $\|f\|_\infty \in A_f$.
2. Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ et $f \in \mathcal{M}$.
   (a) On suppose, dans cette question, que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ quand $n \to \infty$. Montrer que $f_n \to f$ presque uniformément.
   (b) En donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement (E, T, m), $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et f), montrer qu'on peut avoir $f_n \to f$ presque uniformément, quand $n \to \infty$, et $\|f_n - f\|_\infty \not\to 0$.

Exercice 4

Soient (E, T, m) un espace mesuré fini, f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \{x \in E, |f(x)| \geq n\}$ et $B_n = \{x \in E, n \leq |f(x)| < n + 1\}$.
Montrer que :

$$\int |f| dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(B_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) < +\infty. \tag{7}$$