

**Université d'Aix Marseille 1 - L1 - PEIP**  
**Algèbre linéaire.**  
**Sur la résolution des systèmes linéaires**  
**et l'échelonnement des matrices**

Dans toute la suite, les lettres en gras représentent des vecteurs colonnes, les majuscules des matrices, et le reste des scalaires.

## 1 Matrices échelonnées

Le principe de l'échelonnement des matrices est une généralisation de la procédure d'élimination que vous connaissez pour la résolution des systèmes linéaires à  $n$  équations et  $n$  inconnues. Lorsqu'on utilise la procédure d'élimination pour un tel système, on remplace le système d'origine  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  par un système équivalent  $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ , où  $U$  est une matrice triangulaire supérieure, ce qui rend le système beaucoup plus facile à résoudre (si la matrice  $U$  est inversible). On va généraliser cette procédure d'élimination pour la résolution d'un système linéaire à  $n$  lignes et  $p$  colonnes, grâce aux matrices sous forme échelonnées. Si la matrice  $U$  obtenue par l'étape d'élimination évoquée ci-dessus est inversible, la procédure de "remontée" amène à la solution du problème, qui peut aussi s'écrire sous la forme  $Id_n\mathbf{x} = \mathbf{d}$ . Cette procédure de remontée se généralise par la recherche de la forme totalement échelonnée de la matrice de départ.

### Définition 1 (Matrice sous forme échelonnée)

On dit qu'une matrice  $n \times p$  est sous forme échelonnée si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. s'il existe des lignes de zéros alors elles sont toutes en bas de la matrice
2. si deux lignes successives sont non nulles, alors la seconde a plus de zéros à gauche que la première (dans le poly, on rajoute que le premier coefficient non nul de chaque ligne est égal à 1, mais ce n'est pas obligatoire).

### Exemple 2 (Matrice échelonnée)

- La matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  est sous forme échelonnée, alors que la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  ne l'est pas.
- Une matrice  $n \times n$  triangulaire supérieure (c.à.d. dont tous les coefficients  $a_{i,j}$ ,  $i > j$  sont nuls) est sous forme échelonnée.
- Les matrices nulles et  $Id_n$  sont échelonnées.

### Définition 3 (Matrice totalement échelonnée)

On dit qu'une matrice  $n \times p$  est sous forme totalement échelonnée si :

1. elle est échelonnée.
2. le premier coefficient non nul de chaque ligne est égal à 1
3. tous les éléments qui sont dans la colonne au dessus du premier terme non nul (et égal à 1) d'une ligne sont nuls.

### Exemple 4 (Matrice totalement échelonnée)

- Les matrices  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  sont sous forme totalement échelonnée.
- les matrices  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , ne le sont pas.
- Les matrices nulles et  $Id_n$  sont totalement échelonnées.

### Définition 5 (Colonnes pivotales)

On note  $r$  le nombre de lignes non nulles d'une matrice  $n \times p$  totalement échelonnée ( $i_{max}$  dans le poly et dans le DM2). On appelle **pivot** le premier terme non nul (et donc égal à 1) de chaque ligne non nulle de la matrice totalement échelonnée. On appelle colonnes pivotales d'une matrice totalement échelonnée les colonnes dans lesquelles apparaissent les pivots des lignes non nulles (attention ce ne sont pas forcément les  $r$  premières colonnes de la matrice). On note  $c_1, \dots, c_r$  les indices de ces colonnes.

On appelle colonnes non pivotales les autres colonnes, dont les indices sont notés  $c_{r+1}, \dots, c_p$ .

Enfin on appelle **rang** d'une matrice  $A$  le nombre  $r$  de lignes non nulles (ou de pivots) de sa forme totalement échelonnée.

### Exemple 6 (Matrices totalement échelonnées et colonnes pivotales)

– La matrice  $Id_n$  a  $n$  colonnes pivotales :  $r = n$

– La matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  a deux colonnes pivotales : la première,  $c_1 = 1$ , et la troisième :  $c_2 = 3$ , et une colonne non pivotale, la seconde :  $c_3 = 2$ .

– La matrice  $4 \times 6$  :  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  est sous forme totalement échelonnée, et a trois colonnes pivotales  $c_1 = 2, c_2 = 4, c_3 = 5$ , et trois colonnes non pivotales :  $c_4 = 1, c_5 = 3, c_6 = 6$ .

Notons que dans une forme totalement échelonnée, les pivots sont toujours égaux à 1.

Toute matrice  $A$  d'ordre  $n \times p$  peut se mettre sous forme échelonnée ou totalement échelonnée par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes qui sont les suivantes :

**Définition 7 (Opérations élémentaires)** Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice  $A$  d'ordre  $n \times p$  sont les suivantes :

1. Permutation de lignes,  $P_{ij}$  : on échange la ligne  $i$  avec la ligne  $j$  de la matrice, qu'on notera aussi  $\ell_i \leftrightarrow \ell_j$ .
2. Multiplication par un scalaire  $\alpha$ ,  $D_i(\alpha)$  : on multiplie la ligne  $i$  par le scalaire  $\alpha$ , ce qu'on note aussi :  $\ell_i \rightarrow \alpha \ell_i$ .
3. Addition d'un multiple d'une ligne à une autre,  $T_{ij}(\alpha)$  : on ajoute à la ligne  $i$   $\alpha$  fois la ligne  $j$ , ce qu'on note aussi :  $\ell_i \rightarrow \ell_i + \alpha \ell_j$ .

### Comment obtenir ces opérations élémentaires par produit de matrices ?

On a vu précédemment que la multiplication d'une matrice  $A$  d'ordre  $n \times p$  par une matrice  $C$  d'ordre  $n \times n$  à gauche (c.à.d. le produit  $CA$ , d'ordre  $n \times p$ ) agit sur les lignes de la matrice  $A$ ; les lignes de la matrice  $CA$  sont des combinaisons linéaires de la matrice  $A$ . On rappelle la définition de combinaison linéaire :

**Définition 8** On appelle **combinaison linéaire** de deux vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  de  $\mathbb{R}^n$  tout vecteur de la forme  $\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}$ , où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des réels; plus généralement une combinaison linéaire de  $k$  vecteurs  $\mathbf{u}_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  de  $\mathbb{R}^n$  est un vecteur de la forme  $\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{u}_k$  où  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  sont des réels.

On rappelle que lorsqu'on multiplie une matrice à **gauche** (par une matrice ou un vecteur), on effectue des combinaisons linéaires de **ses lignes**, alors que lorsqu'on la multiplie à droite, on effectue des combinaisons linéaires de **ses colonnes**.

Les opérations élémentaires décrites précédemment peuvent donc se décrire comme des produits matriciels, grâce aux matrices suivantes :

- **Permutation des lignes  $i$  et  $j$**  : Ceci revient à multiplier la matrice  $A$  à **gauche** par la matrice de permutation  $P_{ij}$  dont les coefficients sont tous nuls, sauf :
  - les coefficients diagonaux des lignes autres que  $i$  et  $j$ , égaux à 1,
  - les coefficients de la  $i$ -ème ligne  $j$ -ème colonne, et de la  $j$ -ème ligne  $i$ -ème colonne, égaux à 1.
- **Multiplication de la ligne  $i$  par un scalaire  $\alpha$**  : ceci revient à multiplier la matrice  $A$  à **gauche** par la matrice  $D_i(\alpha)$ , égale à la matrice identité (d'ordre  $n$ ), sauf pour l' $i$ -ème coefficient diagonal, égal à  $\alpha$ .
- **Addition de  $\alpha$  fois la ligne  $j$  à la ligne  $i$**  : ceci revient à multiplier la matrice  $A$  à **gauche** par la matrice  $T_{ij}(\alpha)$ , égale à l'identité, sauf pour la ligne  $i$ , où l'on remplace le 0 de la  $j$ -ème colonne par  $\alpha$ .

## 2 Echelonnement par l'algorithme de Gauss et Gauss-Jordan

On cherche à résoudre un système linéaire de la forme  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . L'échelonnement consiste à effectuer des opérations élémentaires sur la matrice  $A$  et le second membre  $\mathbf{b}$  de manière à se ramener à un système plus simple à résoudre :

1.  $U\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}$  où  $U$  est échelonnée (triangulaire supérieure dans le cas d'une matrice carrée,  $n = p$ )
2.  $R\mathbf{x} = \mathbf{d}$  où  $R$  est totalement échelonnée.

. Plutôt qu'un grand discours, le mieux est de procéder sur un exemple. On considère le système  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On écrit la matrice augmentée, constituée de la matrice  $A$  et du second membre  $\mathbf{b}$ .

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Allons y pour Gauss :

La première ligne a un 1 en première position (souligné dans la matrice), c'est donc un pivot. La deuxième équation a déjà un 0 dessous, donc on a rien besoin de faire. On veut ensuite dézinguer le premier coefficient de la troisième ligne. On ajoute donc la première ligne à la troisième :

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_3 \rightarrow \ell_3 + \ell_1} \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \underline{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La deuxième ligne a un terme non nul en deuxième position (2) : c'est un pivot. On va maintenant dézinguer le deuxième terme de la troisième ligne :

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \underline{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_3 \rightarrow \ell_3 - 1/2 \ell_2} \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \underline{2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{-1/2} & \underline{-1/2} \end{pmatrix}$$

On a ici obtenu une matrice sous forme échelonnée (en fait une matrice triangulaire supérieure car la matrice est carrée) à trois pivots, donc inversible et on peut donc faire la remontée pour obtenir la solution du système, et on obtient (en notant  $x_i$  les composantes de  $\mathbf{x}$ ) :  $x_3 = 1$  puis  $x_2 = 1$  et enfin  $x_1 = 1$ .

Mais on peut aussi continuer pour obtenir la forme totalement échelonnée de la matrice : c'est la partie "Jordan" de l'algorithme de Gauss-Jordan.

On multiplie la dernière ligne par -2 pour obtenir le pivot 1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_3 \rightarrow -2\ell_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis on dézingue le troisième coefficient de la deuxième ligne (à l'aide de la troisième) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_2 \rightarrow \ell_2 + \ell_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On multiplie la deuxième ligne par 1/2 pour obtenir le pivot 1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_2 \rightarrow 1/2 \ell_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On dézingue ensuite le troisième coefficient de la première ligne (toujours à l'aide de la troisième) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_1 \rightarrow \ell_1 - \ell_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On "lit" directement dans la forme totalement échelonnée ainsi obtenue  $x = 1$ ,  $y = 1$ ,  $z = 1$ .

La forme totalement échelonnée de la matrice  $A$  est ici la matrice identité : c'est le cas pour toute matrice inversible. La réciproque est également vraie : si la forme totalement échelonnée de la matrice  $A$  est l'identité,  $A$  est inversible (voir DM2).

La procédure qu'on vient de faire sur la matrice est l'algorithme de Gauss-Jordan, qu'on peut aussi appliquer à des matrices non inversibles (dans ce cas la matrice totalement échelonnée n'est pas l'identité) ou rectangulaires.

**Calcul de l'inverse d'une matrice** Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$  inversible, dont on veut calculer l'inverse. On cherche donc une matrice  $A^{-1}$  telle que  $AA^{-1} = Id_n$ . Les colonnes de  $Id_n$  sont les vecteurs (colonne)<sup>1</sup>  $e_i$  dont la  $i$ -ème composante est égale à 1 et toutes les autres nulles. Supposons qu'on connaisse  $A^{-1}$ . Quand on multiplie  $A$  par la première colonne de  $A^{-1}$ , on obtient la première colonne de  $AA^{-1} = Id_n$ , c.à.d. le vecteur  $e_1$ . De même, quand on multiplie  $A$  par la  $i$ -ème colonne de  $A^{-1}$ , on obtient la  $i$ -ème colonne de  $AA^{-1} = Id_n$ , c.à.d. le vecteur  $e_i$ . On a donc, en notant  $c_i(A^{-1})$  la  $i$ -ème colonne de  $A^{-1}$  :

$$A c_i(A^{-1}) = e_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Le calcul de  $A^{-1}$  peut donc s'effectuer en résolvant les  $n$  systèmes linéaires avec matrice  $A$ , inconnue  $c_i(A^{-1})$  et second membre  $e_i$ .

Remarquons donc tout de suite que l'inversion d'une matrice est beaucoup plus chère que la résolution d'un système linéaire ( $n$  fois, très précisément...). Il est donc idiot d'inverser une matrice pour résoudre un système linéaire. Par contre, il est intéressant de savoir comment on peut trouver l'inverse d'une matrice par la méthode de Gauss-Jordan, en s'inspirant de celle effectuée pour résoudre le système linéaire.

Au lieu d'introduire une matrice augmentée avec la matrice de départ et un vecteur second membre, on va introduire une matrice augmentée avec la matrice de départ et  $n$  vecteurs second membre (les vecteurs  $e_i$ ) ; ceci revient à considérer la matrice augmentée  $n \times 2n$  constituée de la matrice  $A$  et la matrice  $Id$  :

$$\tilde{A} = (A \quad Id_n).$$

En appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan on obtient la forme totalement échelonnée  $\tilde{R}$  de  $\tilde{A}$ . Si  $A$  est inversible, sa forme totalement échelonnée  $R$  est  $Id_n$ , et Gauss-Jordan sur  $\tilde{A} = (A \quad Id_n) = (A \quad e_1 \quad \dots \quad e_n)$  donne :

$$\tilde{R} = (R \quad c_1(A^{-1}) \quad \dots \quad c_n(A^{-1})) = (Id_n \quad A^{-1}).$$

**Exemple 9** Prenons une matrice  $2 \times 2$  :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

On écrit la matrice augmentée :  $\tilde{A} = (A \quad Id_2)$ .

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et on applique Gauss-Jordan :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_2 \rightarrow \ell_2 - 3\ell_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_1 \rightarrow \ell_1 - 2\ell_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Gauss Jordan donne donc  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ . On vérifie qu'on a bien  $AA^{-1} = Id_2$

---

1. Quand on dit vecteur sans préciser c'est toujours vecteur colonne ; de même, on identifie les éléments de  $\mathbb{R}^n$  à l'ensemble  $\mathcal{M}_{n,1}$  des matrices à  $n$  lignes et 1 colonne.

### 3 Résolution d'un système linéaire homogène et noyau de $A$

On rappelle la définition du noyau de  $A$  :

**Définition 10** Soit une matrice  $A$  d'ordre  $n \times p$ . On appelle noyau de  $A$ , noté  $\text{Ker}(A)$ , l'ensemble des  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$  tels que  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  (où  $\mathbf{0}$  désigne le vecteur colonne de  $\mathbb{R}^n$  dont toutes les composantes sont nulles).

On appelle système linéaire homogène un système linéaire dont le second membre est nul, c.à.d. un système de la forme  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Résoudre le système linéaire homogène  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  revient à déterminer le noyau de  $A$ .

Remarquons d'abord qu'un tel système admet toujours au moins une solution, le vecteur nul (de  $\mathbb{R}^p$ ) puisque  $A\mathbf{0}_p = \mathbf{0}_n$ .

D'autre part, lorsqu'on multiplie une matrice  $n \times p$  par un vecteur colonne  $p \times 1$ , on obtient un vecteur  $n \times 1$  qui est une combinaison linéaire des colonnes de  $A$ .

Donc, résoudre  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , c'est trouver les combinaisons linéaires des colonnes de  $A$  qui donnent un vecteur nul ; les composantes  $x_i$  des solutions  $\mathbf{x}$  sont les coefficients des combinaisons linéaires qui conviennent.

Voyons comment cela fonctionne sur quelques exemples :

1. Cas d'une matrice  $A$  carrée ( $n = p$ ) **inversible**. Dans ce cas, la forme totalement échelonnée de  $A$  est  $R = Id_n$ . Le système  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  est équivalent au système  $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , et on en déduit donc que  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  est **l'unique solution** du système linéaire  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . On a donc  $\text{Ker}(A) = \{\mathbf{0}\}$ .
2. Cas d'une matrice  $A$  carrée ( $n = p$ ) **non inversible**. Dans ce cas, la forme totalement échelonnée de  $A$  est  $R \neq Id_n$ , et  $r < n$  : la matrice augmentée  $R$  possède au moins une ligne de 0 (en bas), et la matrice  $\tilde{R}$  également (puisque le second membre est nul).

**Exemple 11** Considérons par exemple la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ , et cherchons à déterminer le noyau de  $A$ . C'est l'ensemble des  $\mathbf{x}$  tels que  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , c.à.d. les solutions du système :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

Faisons l'élimination :  $\ell_2 \rightarrow \ell_2 - 2\ell_1$ . On obtient :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation est toujours satisfaite, et donc il n'y a en fait qu'une seule équation. Le noyau de  $A$  est la droite d'équation  $x_1 + 2x_2 = 0$ .

Un moyen simple de décrire cette droite de solutions est de choisir un point de la droite (dite solution particulière). Alors les points de la droite sont tous des multiples de ce point (parce que la droite passe par  $\mathbf{0}$ ). Choisissons par exemple  $x_2 = 1$ , dans ce cas on a  $x_1 = -2$ , et donc une solution particulière est  $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Le noyau de  $A$  contient tous les multiples de  $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$$\text{Ker}(A) = \left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Cas général. Si on connaît une solution particulière  $\mathbf{s}$  de  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , alors tous les multiples de  $\mathbf{s}$  (c.à.d. les vecteurs de la forme  $\lambda\mathbf{s}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ ) sont solutions de  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

**Exemple 12** Le système linéaire à 1 inconnue et 3 équations  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ , s'écrit aussi  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  où  $A$  est une matrice à une ligne et 3 colonnes :  $A = (1 \ 1 \ 1)$ , dont la forme totalement échelonnée est  $R = (1 \ 1 \ 1)$ , qui n'a donc qu'un pivot ( $r = 1$ ). Le noyau de  $A$  est le plan  $\mathcal{P}$  de  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ , dont on peut trouver deux solutions particulières non co-linéaires, qu'on trouve en choisissant d'abord  $x_2 = 1$  et  $x_3 = 0$  puis  $x_2 = 0$  et  $x_3 = 1$  :

$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notons que les variables  $x_2$  et  $x_3$  sont arbitraires, ce sont des “degrés de liberté” (au sens où on peut les choisir comme on veut) mais une fois qu’ils sont choisis, la première (et unique) ligne de la matrice totalement échelonnée  $R$  nous donne  $x_1 = -x_2 - x_3$ .

La première colonne de  $A$  contient le pivot, et donc la première composante n’est pas un degré de liberté. On ne peut choisir des valeurs spéciales que pour les composantes correspondant aux colonnes non pivotales.

Remarquons enfin qu’à partir des solutions spéciales  $\mathbf{s}_1$  et  $\mathbf{s}_2$ , on peut obtenir, par combinaison linéaire, tout le plan  $\mathcal{P}$  d’équation  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ . En effet, pour n’importe quel vecteur  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  du plan  $\mathcal{P}$ , on peut écrire

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_2 \mathbf{s}_1 + x_3 \mathbf{s}_2,$$

grâce au fait que  $-x_2 - x_3 = x_1$ . On dira plus tard que les  $\mathbf{s}_1$  et  $\mathbf{s}_2$  “engendrent” le plan.

On peut donc décrire  $\text{Ker} A$  (le plan  $\mathcal{P}$ ) comme l’ensemble des combinaisons linéaires des solutions spéciales qu’on vient de calculer :

$$\text{Ker} A = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Les solutions spéciales de  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  peuvent en fait se calculer très simplement à partir de la forme totalement échelonnée  $R$  de  $A$  : Si on regarde comment sont faites les colonnes de  $R$ , on se rend compte qu’une colonne non pivotale peut s’écrire comme combinaison linéaire des colonnes pivotales précédentes. Et ce sont justement les coefficients de cette combinaison linéaire qui donnent une solution de  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  (qu’on appelle solution spéciale), puisque (rappel) le produit  $A\mathbf{x}$  est une combinaison linéaire des colonnes de  $A$  !

**Exemple 13** Prenons par exemple la matrice  $3 \times 4$  sous forme totalement échelonnée

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{2} & 0 & \mathbf{3} \\ 0 & \mathbf{0} & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

où on a écrit en gras les colonnes **non** pivotales. Notons  $\mathbf{c}_j(R)$ ,  $j = 1, \dots, 4$  les 4 colonnes de  $R$ .

Les deux colonnes pivotales sont  $\mathbf{c}_1(R)$  et  $\mathbf{c}_3(R)$ , et les deux non pivotales  $\mathbf{c}_2(R)$  et  $\mathbf{c}_4(R)$ .

Chercher  $\mathbf{x}$  tel que  $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$  revient à chercher  $x_1, \dots, x_4$  tels que  $\sum_{i=1}^4 x_i \mathbf{c}_i(R) = \mathbf{0}$ . Or la lecture de la matrice totalement échelonnée  $R$  donne

$$\mathbf{c}_2(R) = 2\mathbf{c}_1(R) \text{ et } \mathbf{c}_4(R) = 3\mathbf{c}_1(R) - \mathbf{c}_3(R)$$

ce qui s’écrit aussi (pour bien faire apparaître le produit matrice vecteur) :

$$-2 \mathbf{c}_1(R) + \mathbf{c}_2(R) + 0 \mathbf{c}_3(R) + 0 \mathbf{c}_4(R) = \mathbf{0} \text{ et } -3 \mathbf{c}_1(R) + 0 \mathbf{c}_2(R) + \mathbf{c}_3(R) + 0 \mathbf{c}_4(R) = \mathbf{0}.$$

On a donc trouvé ainsi deux solutions qui vérifient  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , qui sont

$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ici encore, on peut remarquer que tout vecteur  $\mathbf{x}$  qui vérifie  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  peut s’écrire comme combinaison

linéaire de  $\mathbf{s}_1$  et  $\mathbf{s}_2$ . En effet, pour n’importe quel vecteur  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$  vérifiant  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , on a :  $x_1 = -2x_2 - 3x_4$

et  $x_3 = x_4$ , et on peut donc écrire

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x_2 \mathbf{s}_1 + x_4 \mathbf{s}_2.$$

Ici encore, on dira que  $\mathbf{s}_1$  et  $\mathbf{s}_2$  “engendrent” l’espace des solutions de  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Le noyau de  $A$  (ou de manière équivalente, l’ensemble des solutions du système  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ) s’écrit alors :

$$\text{Ker}A = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Rappelons que si  $R$  est la forme totalement échelonnée de  $A$ , les systèmes  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  et  $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$  sont équivalents. Les noyaux de  $A$  et de  $R$  sont donc identiques : c’est l’ensemble des combinaisons linéaires des solutions spéciales obtenues comme expliqué dans l’exemple précédent à partir des colonnes non pivotales de la matrice  $R$ .

Il y a autant de solutions spéciales à  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  que de colonnes non pivotales, c.à.d.  $p - r$ . Dans l’exemple ci-dessus :  $p = 4$ ,  $r = 2$ , donc il y a 2 solutions spéciales.

**Cas d’une matrice  $n \times p$  avec  $p > n$**  Remarquons que dans le dernier exemple ci-dessus, on a une matrice rectangulaire “couchée”, c.à.d. avec plus d’inconnues que de lignes :  $p > n$ . Dans ce cas, le noyau de la matrice est forcément non réduit à  $\mathbf{0}$ . En effet le nombre  $r$  de pivots (ou de lignes non nulles) est forcément inférieur aux nombres de lignes,  $n$ . Comme  $p > n$ , il existe au moins une colonne non pivotale, et cette colonne est une combinaison linéaire d’autres colonnes de  $A$ . Ce qui montre qu’il existe  $\mathbf{s}$  non nul (ses composantes sont les coefficients de la combinaison linéaire écrite sous la forme “combinaison = 0”) tel que  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Il y a donc une infinité de solutions au système  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  (tous les multiples de  $\mathbf{s}$ ), voir l’exemple 13.

## 4 Résolution d’un système linéaire général

Soit le système linéaire à  $n$  équations et  $p$  inconnues :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \dots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,p}x_p = b_i \\ \dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

On met le système sous forme matricielle :  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , avec  $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$ , avec  $A \in \mathcal{M}_{n,p}$  une

matrice  $n \times p$ .

Rappelons que l’image d’une matrice  $A$  est l’ensemble des  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  tels qu’il existe  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$  tel que  $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ .

**Proposition 14** L’image d’une matrice  $A$  d’ordre  $n \times p$  (notée  $\text{Im}A$ ) est l’ensemble des combinaisons linéaires des colonnes de  $A$ .

Preuve : Par définition,  $y \in \text{Im}A$  ssi il existe  $x \in \mathbb{R}^p$  tel que  $y = Ax$ , ce qui revient à dire que  $y$  est une combinaison linéaire des colonnes de  $A$ , par définition du produit matrice vecteur.

Notons que résoudre  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , revient également à demander que  $\mathbf{b}$  soit une combinaison linéaire des colonnes de  $A$ ; en effet, le produit  $A\mathbf{x}$  s'écrit aussi  $x_1\mathbf{c}_1(A) + x_2\mathbf{c}_2(A) + \dots + x_N\mathbf{c}_N(A)$  où  $\mathbf{c}_i(A)$  désigne la  $i$ -ème colonne de  $A$ .

**Donc le système  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  admet une solution si et seulement si le second membre  $\mathbf{b}$  est dans  $\text{Im}A$ .**

**Exemple 15** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  Alors  $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Donc  $\text{Im}A$  est un plan dans  $\mathbb{R}^3$ . Pour un  $\mathbf{b}$  quelconque, il n'y a pas de raison qu'il y ait une solution au système  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , sauf si  $\mathbf{b}$  est dans le plan  $\text{Im}A$ . Par contre si  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , alors il y a une solution, car  $\mathbf{0} \in \text{Im}A$ .

**Exemple 16** Exemple : Déterminons l'image de la matrice pour les matrices suivantes :

$$\text{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Réponse :  $\text{Im}\text{Id}_2 = \mathbb{R}^2$ ,  $\text{Im}A$  est la droite des vecteurs de la forme  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} : \text{Im}A = \{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

$$\text{Im}B = \{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Dans le cas où  $\mathbf{b}$  est dans l'image de  $A$ , on sait qu'on a au moins une solution au système linéaire. Pour trouver les solutions d'un système linéaire  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , l'idée est de chercher une solution particulière  $\mathbf{x}_p$  par l'algorithme de Gauss-Jordan. Une fois cette solution calculée, on remarque ensuite que si on a une autre solution  $\mathbf{x}$  du même système  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , alors  $A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) = A\mathbf{x} - A\mathbf{x}_p = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$ . La différence  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_p$  est donc dans le noyau de  $A$ . On obtient donc toutes les solutions du système linéaire  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  sous la forme  $\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_n$ ,  $\mathbf{x}_n \in \text{Ker}(A)$ , et on a vu au paragraphe précédent comment on obtient  $\text{Ker}(A)$ .

Trouver une solution particulière  $\mathbf{x}_p$  du système  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  est facile à partir de sa forme totalement échelonnée : on met toutes les variables correspondant aux colonnes non pivotales à 0, et on résout le système inversible des variables pivotales : on obtient ainsi une solution particulière  $\mathbf{x}_p$ .

Soit  $\tilde{A}$  la matrice augmentée du système, d'ordre  $n \times (p + 1)$  ( $n$  lignes,  $p + 1$  colonnes), définie par

$$\tilde{A} = (A \ \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} & b_n \end{pmatrix}$$

On effectue l'algorithme de Gauss Jordan sur la matrice  $\tilde{A} = (A \ \mathbf{b})$  pour arriver à la forme totalement échelonnée  $\tilde{R} = (R \ \mathbf{d})$ .

Examinons les différents cas possibles selon les valeurs de  $n, p$  et  $r$ , où  $r$  est le rang de la matrice  $A$  (le nombre de pivots, ou de lignes non nulles de  $R$ ).

1. **Cas d'une matrice carrée** :  $n = p$ , avec  $R = \text{Id}_n$ , i.e.  $r = n$ , alors la matrice  $A$  est inversible et le système admet une solution unique  $\mathbf{x} = \mathbf{d}$ .

**Exemple 17**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 3x_1 + 7x_2 = 13 \end{cases}$$

Forme matricielle :  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \end{pmatrix}$  Matrice augmentée :  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 13 \end{pmatrix}$  Forme

totalement échelonnée (exo) :  $\tilde{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

On a donc  $R = \text{Id}_n$  ( $R$  est la forme totalement échelonnée de  $A$ ,  $\tilde{R}$  est la forme totalement échelonnée de  $\tilde{A}$ ) et on "lit" donc une solution  $\mathbf{x}_p$  du système dans la matrice  $\tilde{R}$  qui représente le système linéaire :

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Remarquons que la matrice est inversible et que son noyau est réduit à  $\{\mathbf{0}\}$ . La solution unique du système est donc  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

2. **Cas d'une matrice carrée telle que  $R \neq Id_n$ ,  $r < n$**  alors  $R$  a au moins une ligne nulle. Si toutes les composantes de  $\mathbf{d}$  correspondent aux lignes nulles de  $R$  sont nulles, les équations sont compatibles et le système admet une infinité de solutions (parce que le noyau de  $A$  n'est pas réduit à  $\{\mathbf{0}\}$ ). S'il existe une composante de  $\mathbf{d}$  non nulle et qui correspond à une ligne nulle de  $R$ , alors le système n'a pas de solution (parce que  $\mathbf{d} \notin \text{Im}(A)$ ).

**Exemple 18**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = b_1 \\ x_1 + x_3 = b_2 \\ x_3 = b_3 \end{cases}$$

Le système s'écrit sous forme matricielle  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ . La matrice

augmentée du système s'écrit  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{pmatrix}$ . L'algorithme de Gauss Jordan donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_2 \rightarrow \ell_2 - \ell_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_3 \rightarrow \ell_3 + \ell_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - b_1 \end{pmatrix}.$$

A ce stade, on a effectué la partie descente de l'algorithme de Gauss Jordan (la partie Gauss). En écrivant l'équation donnée par la dernière ligne de la matrice augmentée :  $(0 \ 0 \ 0 \ b_3 + b_2 - b_1)$ , on voit déjà que pour espérer avoir une solution, il faut que  $\mathbf{b}$  satisfasse la condition de compatibilité  $0 = b_3 + b_2 - b_1$ .

- (a) Si  $\mathbf{b}$  ne satisfait pas cette condition, alors  $\mathbf{b}$  n'est pas dans  $\text{Im}A$  et le système linéaire **n'admet pas de solution**.
- (b) Si maintenant  $\mathbf{b}$  satisfait la condition de compatibilité  $0 = b_3 + b_2 - b_1$  ( $\mathbf{b}$  est dans  $\text{Im}A$ ), on continue la procédure de Gauss-Jordan pour calculer la solution du système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - b_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_2 \rightarrow -\ell_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - b_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_1 \rightarrow -\ell_1 - 2\ell_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - b_1 \end{pmatrix}$$

On "lit" alors une solution dans les deux premières lignes de la matrice totalement échelonnée qu'on a ainsi obtenue :  $x_1 = 2b_2 - b_1$ ,  $x_3 = b_1 - b_2$ . Notons que l'on peut choisir  $x_2$  de manière arbitraire.

Si on choisit  $x_2 = 0$ , on obtient une solution particulière  $\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} 2b_2 - b_1 \\ 0 \\ b_1 - b_2 \end{pmatrix}$  du système  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , à

laquelle on peut ajouter n'importe quel élément  $\mathbf{x}_n$  de  $\text{Ker}(A)$ . On détermine alors la solution spéciale du système homogène en remarquant qu'il n'y a qu'une seule colonne non pivotale, la deuxième, et que la combinaison linéaire associée est  $0\mathbf{c}_1(R) + \mathbf{c}_2(R) + 0\mathbf{c}_3(R) = 0$ . Une solution spéciale est donc

$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Le système admet donc une infinité de solutions, qui sont de la forme :

$$\mathbf{x}_p + \lambda \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 2b_2 - b_1 \\ \lambda \\ b_1 - b_2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

**Exemple 19** Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5 \\ 7x_1 + 7x_2 + x_3 = 10, \\ 5x_1 + 5x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

On a ici  $n = p = 3$ , et la matrice augmentée du système est  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 5 \\ 7 & 7 & 1 & 10 \\ 5 & 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ , et sa forme totalement

échelonnée (exo) :  $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . On "lit" alors dans la forme totalement échelonnée que le second membre n'est pas dans l'image de  $A$  (parce que la dernière ligne donne  $0 = 1$ ) donc le système n'a pas de solution.

Remarquons que les solutions du système  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  se trouvent en remarquant que la matrice  $R$  totalement échelonnée de  $A$  (les 3 premières colonnes de  $\tilde{R}$ ) a 2 colonnes pivotales et une non pivotale, la seconde. On remarque que  $c_2(R) = c_1(R)$  (la seconde colonne est identique à la première) ce qui donne comme

solution spéciale  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Les solutions de  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  sont les multiples de cette solution spéciale.

$$\text{Ker}(A) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. **Cas  $n > p$  et  $r = n$ .** On a dans ce cas une matrice rectangulaire "debout", plus haute que large, et aucune ligne nulle. Donc on n'a aucune colonne non pivotale (puisque  $r > p$ ). Le noyau de la matrice est réduit à  $\{\mathbf{0}\}$ . Prenons un exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Cherchons pour quel  $\mathbf{b}$  le système  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  admet une solution. L'échelonnement total de la matrice augmentée s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 0 & b_2 \\ 2 & 3 & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_2 \rightarrow \ell_2 - \ell_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -1 & b_2 - b_1 \\ 2 & 3 & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_3 \rightarrow \ell_3 - 2\ell_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 1 & b_3 - 2b_1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\ell_3 \rightarrow \ell_3 + \ell_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & b_3 - 3b_1 + b_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_1 \rightarrow \ell_1 + \ell_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_2 \\ 0 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & b_3 - 3b_1 + b_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_2 \rightarrow -\ell_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & b_3 - 3b_1 + b_2 \end{pmatrix}$$

La lecture de la forme totalement échelonnée donne que :

- (a) Les deux colonnes sont pivotales, donc le noyau de la matrice est réduit à  $\{\mathbf{0}\}$ .
  - (b) Le second membre  $\mathbf{b}$  est dans l'image de  $A$  si l'équation de compatibilité  $b_3 - 3b_1 + b_2 = 0$  est vérifiée.
  - (c) Si  $\mathbf{b} \in \text{Im}(A)$  alors il y a une unique solution  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 - b_2 \end{pmatrix}$ .
4. **Cas  $n < p$  et  $r = n$ .** il s'agit d'une matrice plus large que haute "rectangulaire couchée", dont toutes les lignes sont non nulles. Il y a donc forcément des colonnes non pivotales, et le noyau de la matrice n'est donc pas réduit à  $\mathbf{0}$ . Comme il n'y a pas d'équation de compatibilité, le second membre est dans l'image de  $A$ , et on a donc une infinité de solutions, de la forme  $\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_n$ ,  $\mathbf{x}_n \in \text{Ker}(A)$ .

**Exemple 20** Résoudre le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

La matrice augmentée du système est alors :  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ . L'échelonnement total donne  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

On lit alors dans la matrice totalement échelonnée :

- (a) Une solution particulière du système est donné par le second membre (l'inconnue arbitraire est  $x_3$ , qu'on prend égale à 0) :  $\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .
- (b) Le noyau de la matrice du système s'obtient en remarquant que la troisième colonne est non pivotale et égale à la première. On a donc comme solution spéciale du système homogène  $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) On a donc une infinité de solutions, qui sont de la forme

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \lambda \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

En résumé, il y a quatre possibilités pour les solutions d'un système linéaire, selon le rang  $r$  de la matrice :

|         |    |         |                                 |   |
|---------|----|---------|---------------------------------|---|
| $r = n$ | et | $r = p$ | matrice carrée inversible       | $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a une solution unique            |
| $r = n$ | et | $r < p$ | matrice rectangulaire "couchée" | $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a une infinité de solutions      |
| $r < n$ | et | $r = p$ | matrice rectangulaire "debout"  | $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a 0 ou 1 solution (unique)       |
| $r < n$ | et | $r < p$ | matrice quelconque              | $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a 0 ou une infinité de solutions |

## 5 Noyau, image et sous espaces vectoriels

**Définition 21** On appelle *combinaison linéaire* de deux vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  de  $\mathbb{R}^N$  tout vecteur de la forme  $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}$ .

**Définition 22** Un *espace vectoriel* (sur  $\mathbb{R}$ ) est un espace dont les éléments sont tels que l'addition de deux vecteurs est dans l'espace, et la multiplication d'un vecteur par un réel (appelé scalaire) est aussi dans l'espace. On verra plus tard les 8 propriétés (voir aussi dans le poly) que doivent satisfaire les éléments d'un espace vectoriel. Mais disons tout de suite que  $\mathbb{R}^N$  est un espace vectoriel.

Autres exemples d'espace vectoriels : l'ensemble des matrices  $n \times p$ , l'ensemble des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  (aie aie aie, si on commence à faire de l'analyse)...

**Définition 23** Un *sous espace vectoriel* (sur  $\mathbb{R}$ ) est un sous ensemble de vecteurs, dont le vecteur nul, et qui sont tels que si  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  sont dans le sous espace et  $\lambda$  est un scalaire, alors (i)  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  es dans le sous espace et  $\lambda\mathbf{u}$  est dans le sous espace ; ceci revient à dire (exo) que toutes les combinaisons linéaires de  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  sont dans le sous espace.

Remarquons que tout sous espace vectoriel doit contenir le vecteur nul. Par exemple, un plan de  $\mathbb{R}^3$  passant par l'origine est un sous espace vectoriel. Mais un plan qui ne passe pas par l'origine ne l'est pas. De même, une droite de  $\mathbb{R}^3$  passant par l'origine est un sous espace vectoriel, tandis qu'une droite qui ne passe pas par l'origine ne l'est pas.

Exemple : Soit  $\mathcal{M}_2$  l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 ; le sous ensemble des matrices triangulaires supérieures est un sous espace vectoriel (exo) ; le sous ensemble des matrices diagonales également (exo).

On peut montrer facilement que le noyau d'une matrice  $A$  est un sous-espace vectoriel.

Par contre, si  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ , les solutions du système  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  ne forment pas un sous espace vectoriel. En effet, tout sous espace vectoriel doit contenir le vecteur nul, or  $\mathbf{0}$  n'est solution de  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  que si  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  (parce que  $A\mathbf{0} = \mathbf{0}\dots$ )

**ATTENTION** Si  $A$  est d'ordre  $n \times p$ , le noyau de la matrice  $A$  est un sous espace de  $\mathbb{R}^p$  tandis que l'image de  $A$  est un sous espace de  $\mathbb{R}^n$ .