Introduction.

On s'intéresse ici à la simulation numérique de la récupération des hydrocarbures piégés dans un réservoir pétrolier dont les caractéristiques sont connues. Ce type de simulation est utilisé par les compagnies pétrolières afin d'optimiser leur plan de production (où creuser, comment injecter, etc...). On peut décomposer ce travail en 3 parties :

- Elaboration d'un modèle mathématique.
- Développement de méthodes numériques pour la résolution approchée du modèle précédent.
- Ecriture d'un code informatique.

Si le modèle est donné sans réelle justification, les méthodes numériques sont effectivement utilisées dans la plupart des simulateurs de réservoirs des compagnies pétrolières.
Bien sûr, on tient à préciser que les caractéristiques du réservoir sont simplifiées.

I. Modèle informatique.

Dans cette partie, on donne brièvement les paramètres décrivant les milieux poreux et les paramètres décrivant le fluide occupant la partie poreuse.

- Milieu poreux : il est supposé fixe (il ne change pas avec le temps). Il est caractérisé par sa perméabilité absolue K (facilité pour le fluide à se déplacer), et par sa porosité Φ (volume des pores par rapport au volume total).
- Fluide : le fluide occupant les pores est constitué de 3 phases : « eau », « hydrocarbures sous forme liquide » et « hydrocarbures sous forme gaz ». Pour simplifier, nous allons seulement considérer les phases « eau » et « hydrocarbures sous forme liquide ». De la même façon, il y a plusieurs constituants dans la phase hydrocarbure, mais nous considérerons que nous n'avons qu'un seul constituant.

Nous allons maintenant donner les équations. Les inconnues sont la saturation, la pression et la vitesse de filtration de chaque phase. Elles seront notées s_w, s_o, p_w, p_o, v_w, v_o (où $_w$ désigne la phase eau, et $_o$ la phase hydrocarbure). Nous avons donc les 2 équations suivantes :

$$\partial(\Phi * s_w) / \partial t + \mathrm{div}\,(v_w) = h_w \qquad \text{dans } \Omega \times]0,T[$$
$$\partial(\Phi * s_o) / \partial t + \mathrm{div}\,(v_o) = h_o \qquad \text{dans } \Omega \times]0,T[$$

où h_o et h_w sont des termes sources dûs aux puits.
On a ensuite les relations reliant les vitesses au gradient de la pression :

$$v_w = - f_w(s_w) * K * (\mathrm{grad}(p_w) - \rho_w * g)$$
$$v_o = - f_o(s_w) * K * (\mathrm{grad}(p_o) - \rho_o * g)$$

où ρ est la masse volumique et g le vecteur de gravité.
Ce sont donc ces 4 équations que nous allons utiliser pour les méthodes numériques.

II. Méthodes numériques.

On s'intéressera ici directement au cas que nous allons étudier, c'est à dire le cas bidimensionnel.
Le domaine du réservoir $\Omega =]0,L_x[\times]O,L_y[$ où L_x et L_y représentent la grandeur du réservoir dans chacune des directions. On définit donc un pas de maillage (constant) en espace :

$$h_x = L_x / n_x, \qquad h_y = L_y / n_y$$

où n_x et n_y sont les nombres de mailles dans chaque direction.
Le pas de temps, quant à lui, est calculé à chaque temps pour respecter une contrainte de stabilité. Pour finir, on note $x_i = i * h_x – h_x / 2$, et donc $x_{i+1/2} = i * h_x$. Bien sûr, on fait de même pour l'autre dimension.

1. Discrétisation d'un cas simplifié.

Dans un premier temps, on ne tient pas compte de la gravité, de la pression capillaire et des puits. On suppose aussi que le milieu poreux est homogène. On doit donc résoudre les équations suivantes :

$$\partial(\Phi * s) / \partial t + \mathrm{div}\,(v_w) = 0$$
$$\partial(\Phi * (1 – s)) / \partial t + \mathrm{div}\,(v_o) = 0$$
$$v_w = -f_w(s_w) * K * \mathrm{grad}(p)$$
$$v_o = -f_o(s_w) * K * \mathrm{grad}(p)$$

On prend f_w lipschitzienne croissante telle que $f_w(0) = 0$.
f_o lipschitzienne décroissante telle que $f_o(1) = 0$.
$f_o + f_w$ est continue, strictement positive sur $[0,1]$.

On remplaçant v_w et v_o dans les 2 premières équations, on obtient les équations discrétisées suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{l} h_x * h_y * \Phi * (s_{i,j}^{n+1} – s_{i,j}^{n}) / k_n + \Sigma F = 0 \\ - h_x * h_y * \Phi * (s_{i,j}^{n+1} – s_{i,j}^{n}) / k_n + \Sigma G = 0 \end{array}}$$

On va maintenant donner des approximations pour les quantités F et G en distinguant les flux intérieurs et extérieurs.

a) Flux intérieurs.

Pour les flux intérieurs, on utilise ces approximations :

$$F = h_y * (f_w)_c^n * K * (p_{i,j}^{n+1} – p_{i+1,j}^{n+1}) / h_x$$
$$G = h_y * (f_o)_c^n * K * (p_{i,j}^{n+1} – p_{i+1,j}^{n+1}) / h_y$$

où $(f_w)_n^c$ et $(f_o)_c^n$ sont des approximations décentrées de $f_w(s)$ et $f_o(s)$, avec

$$(f_w)_n^c = f_w(s_{i,j}^n) \text{ et } (f_o)_n^c = f_o(s_{i,j}^n) \text{ si } p_{i,j}^n > p_{i+1,j}^n$$
$$(f_w)_n^c = f_w(s_{i+1,j}^n) \text{ et } (f_o)_n^c = f_o(s_{i+1,j}^n) \text{ si } p_{i,j}^n < p_{i+1,j}^n$$

b) Flux extérieurs.

Pour les flux extérieurs, il y a 3 cas possibles :

- Condition de flux nul.
  Cette condition est :
  $$F = G = 0$$
- Condition de flux imposé.
  Cette condition est :

$$F = -a, \qquad G = 0$$

où a correspond au flux d'eau rentrant.

- Condition à pression imposée.

  Cette condition est :

$$F = h_y * (f_w)_n^c * K * (p_{i,j}^{n+1} - p_c) / h_x/2$$
$$G = h_y * (f_o)_n^c * K * (p_{i,j}^{n+1} - p_c) / h_x/2$$

où p_c est une pression donnée et $(f_w)_n^c$ et $(f_o)_c^n$ sont des approximations décentrées de $f_w(s)$ et $f_o(s)$, avec :

$$(f_w)_n^c = f_w(s_{i,j}^n) \text{ et } (f_o)_n^c = f_o(s_{i,j}^n) \text{ si } p_{i,j}^n > p_c$$
$$(f_w)_n^c = f_w(s_{i+1,j}^n) \text{ et } (f_o)_n^c = f_o(s_{i+1,j}^n) \text{ si } p_{i,j}^n < p_c$$

c) Calcul de la pression.

On ajoute les 2 équations discrétisées et on obtient :

$$\Sigma (F + G) = 0$$

Ce système est inversible si il y a au moins une condition aux limites à pression imposée.

d) Calcul de la saturation.

On utilisant la première équation discrétisée, on obtient :

$$\boxed{s_{i,j}^{n+1} = s_{i,j}^n - k_n / (h_x * h_y * \Phi) * \Sigma F}$$

On connaît les valeurs de $p_{i,j}^{n+1}$, donc on connaît les valeurs de F. On peut donc calculer les valeurs de la saturation.

Il faut maintenant choisir un pas de temps de manière à respecter des contraintes de stabilité du schéma numérique. Typiquement, on prend :

$$k_n = \gamma * \hbar$$

où ħ dépend des données et γ s'appelle « CFL ».

2. Prise en compte des puits.

Dans les mailles contenant les puits, il faut « remplacer » le zéro des équations discrétisées par des valeurs $q_{w,l}^n$ et $q_{o,l}^n$. Ces quantités sont les flux d'eau et d'hydrocarbure. Si $q_{w,l}^n > 0$, il y a injection d'eau. Si $q_{w,l}^n < 0$, il y a production d'eau. Là encore, il y a deux types de puits.

a) Puits à débit imposé.

On appelle q_l^n le débit total. Il y a 2 cas.

- Cas $q_l^n > 0$.

  On suppose que l'on injecte uniquement de l'eau et donc :

$$q_{w,l}^n = q_l^n, \qquad q_{o,l}^n = 0$$

- Cas $q_l^n < 0$.

  On produit alors un mélange d'eau et d'hydrocarbure :

$$q_{w,l}^n = f_w(s_{i,j}^n) / (f_w(s_{i,j}^n) + f_o(s_{i,j}^n)) * q_l^n$$
$$q_{o,l}^n = f_o(s_{i,j}^n) / (f_w(s_{i,j}^n) + f_o(s_{i,j}^n)) * q_l^n$$

b) Puits à pression imposée.

Là aussi, on remplace (après de longs calculs) :

$$q_{w,l}^n = I_l * f_w(s_{i,j}^n) * (p_l - p_{i,j}^{n+1})$$

$q_{o,l}^n = I_l * f_o(s_{i,j}^n) * (p_l - p_{i,j}^{n+1})$

avec p_l donnée et I_l donné par (r_p est le rayon du puits) :

$I_l = K / (- 1/4 + 1/2\pi * \ln(h / r_p)$

En fait, on rajoute ces 2 équations à celles que l'on connaît déjà.

Pour calculer la pression, on utilise la même méthode que dans le cas simplifié. On obtient alors :

$\Sigma (F + G) = q_{w,l}^n + q_{o,l}^n$

Ce système est inversible si il y a au moins une condition aux limites à pression imposée ou si il y a au moins un puits à pression imposée et que l'indice de ce puits est strictement positif.

III. Code informatique et résultats.

1. Code informatique.

On cherche, pour calculer la pression, à résoudre un système du type A*U = B.
(remarque : la matrice A est très creuse, elle contient beaucoup de 0).
On va utiliser la méthode de Cholewski : on cherche L telle que :

$A = L * L^t$.

Ensuite, on calcule :

$L * v = B$ (étape appelé « descente ») puis

$L^t * u = v$ (étape appelé « remonté »)

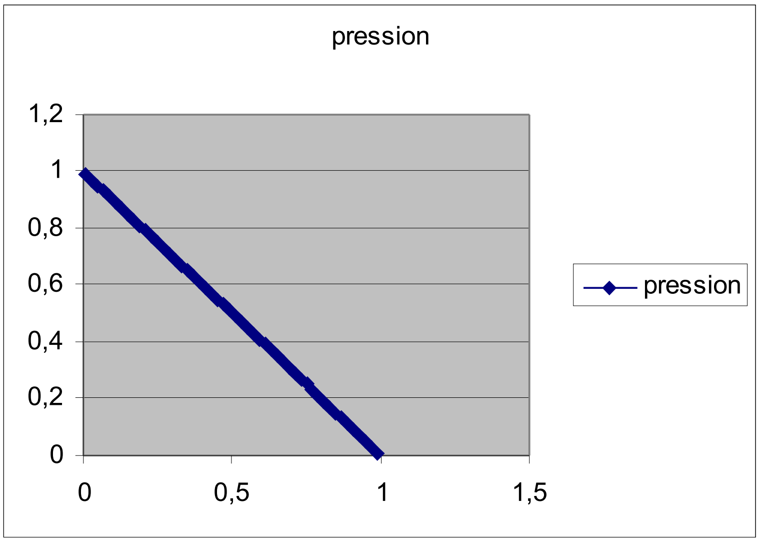
Typiquement, la structure du code est le suivant :

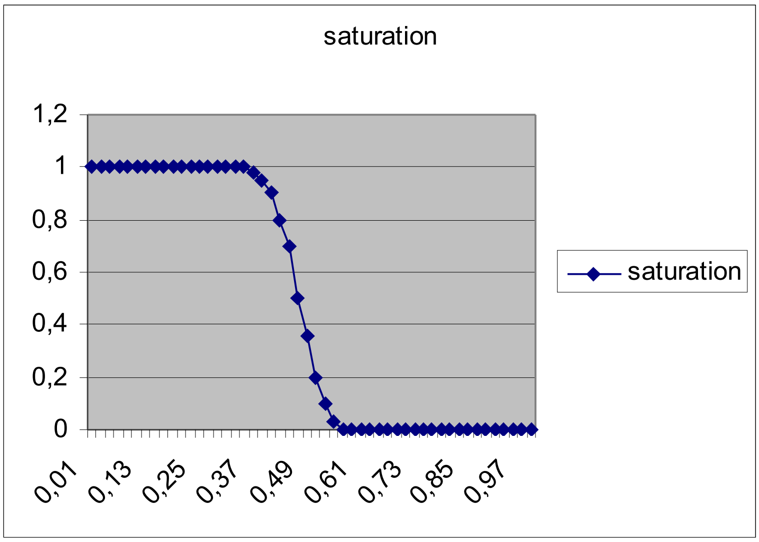
- On « remplit » A
- On « remplit » B
- On calcule la pression grâce à la méthode de Cholewski.
- On calcule la saturation en utilisant la relation vue dans la partie méthodes numériques en parcourant les mailles en distinguant les arêtes intérieures et extérieures (4 cas au total : verticale intérieure, horizontale intérieure, verticale extérieure, horizontale extérieure).

2. Résultats.

a) Test 1.

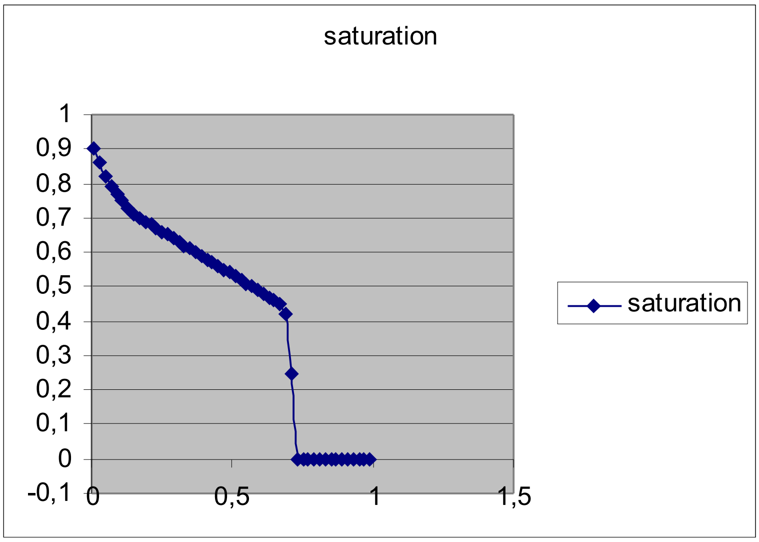
Perméabilité absolue : Id
Perméabilités relatives : s (eau) et (1 − s) (huile)
Viscosités : 1 (eau) et 1 (huile)
Condition initiale : s = 0
Conditions aux limites : flux nul en y = 0 et y = 1, débit d'eau rentrant constant et égal à 1 en x = 0,
pression égale à 0 en x = 1
Avec ces conditions, le champ de pression est indépendant du temps.
Nombre de mailles en x : 50
Nombre de mailles en y : 50
Résultats obtenus au temps T = 0.45 avec CFL = 3/4.

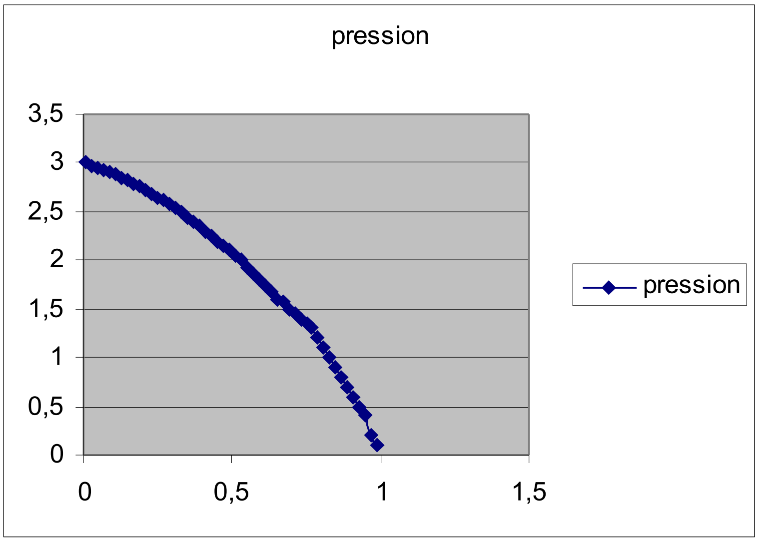




b) <u>Test 2.</u>

Perméabilité absolue : Id
Perméabilités relatives : s^2 (eau) et $(1 - s)^2$ (huile)
Viscosités : 1 (eau) et 4 (huile)
Condition initiale : s = 0
Conditions aux limites : flux nul en y = 0 et y = 1, débit d'eau rentrant constant et égal à 1 en x = 0,
Pression égale à 0 en x = 1
Pour ce test, le champ de pression dépend du temps.
Nombre de mailles en x : 50
Nombre de mailles en y : 50
Résultats obtenus au temps T = 0.429 avec CFL = 1.

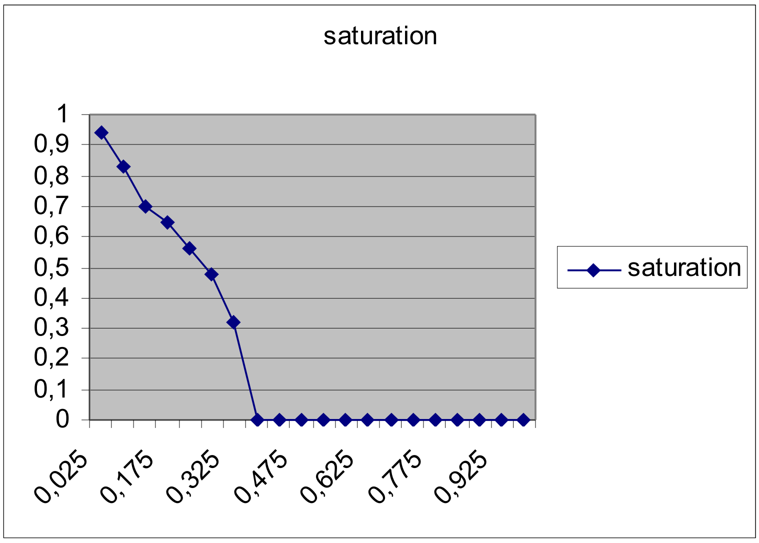


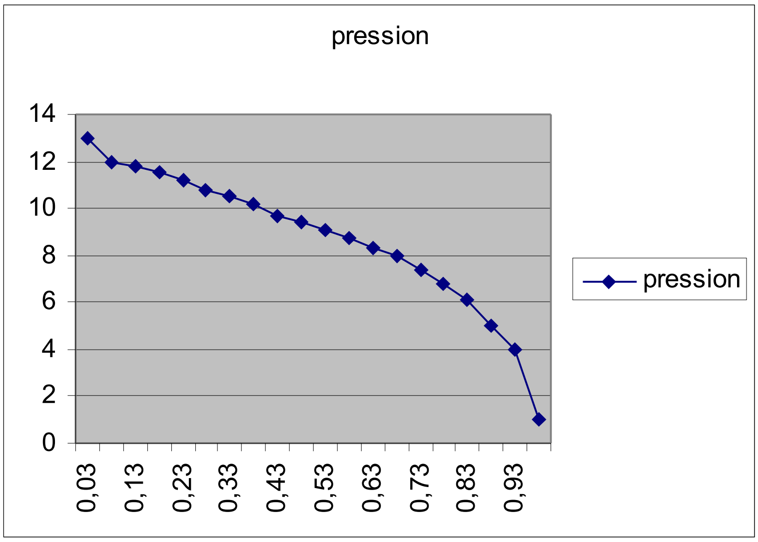


c) Test 3.

Perméabilité absolue : Id
Perméabilités relatives : s^2 (eau) et $(1 - s)^2$ (huile)
Viscosités : 1 (eau) et 4 (huile)
Condition initiale : s = 0
Conditions aux limites :
1. Par la réunion des bords bas et gauche de la maille en bas à gauche (maille (1,1)) on impose un flux d'eau entrant égal à 1.
2. Sur les bords haut et droit de la maille en haut à droite (maille (nx,ny)) on impose une pression nulle.
3. En dehors des bords décrits ci dessus, on impose un flux nul.

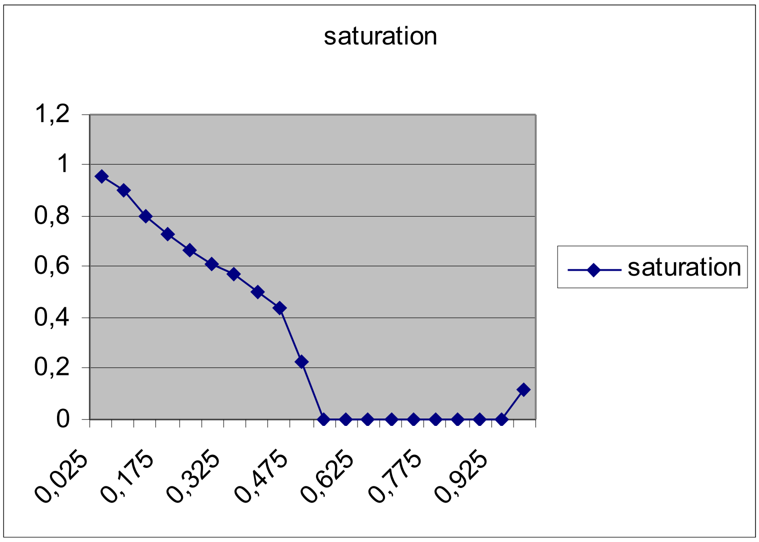
Pour ce test, le champ de pression dépend du temps.
Nombre de mailles en x : 20, Nombre de mailles en y : 20.
Résultats obtenus au temps T = 0.107 avec CFL = 1 sur la diagonale du carré, du point (0, 0) au point (1, 1).

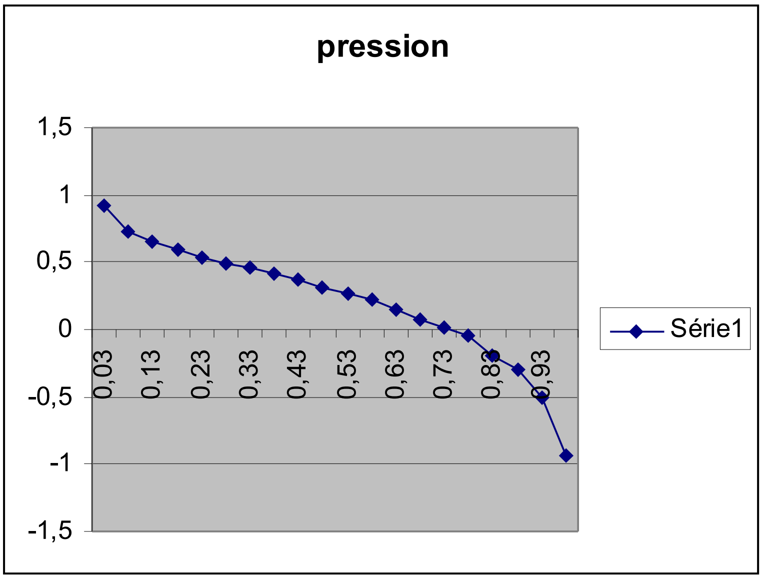




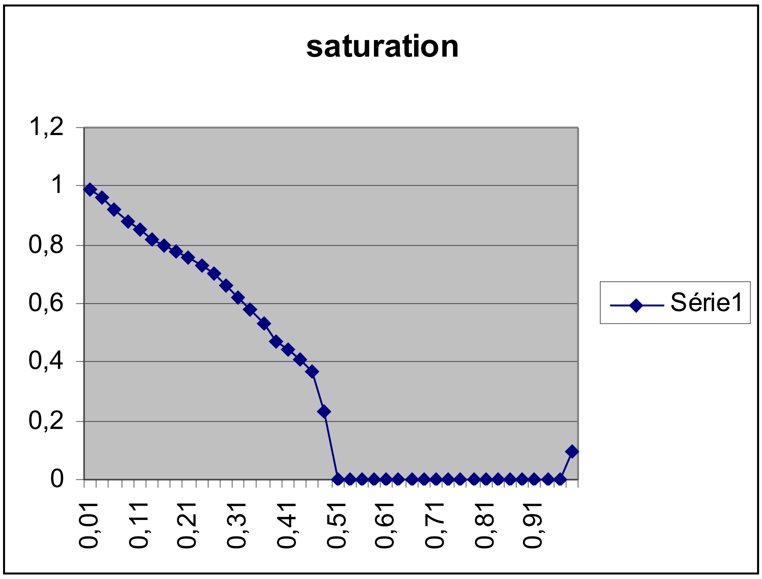
d) <u>Test 4.</u>

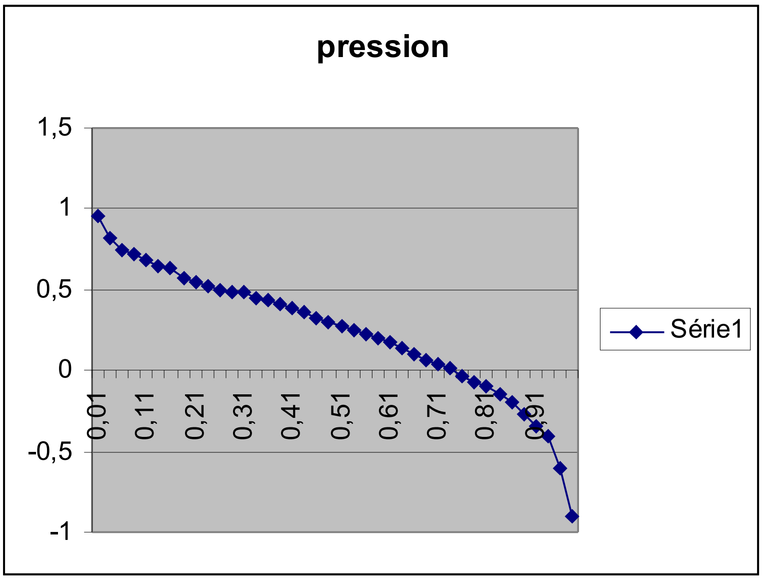
Perméabilité absolue : Id
Perméabilités relatives : s^2 (eau) et $(1 - s)^2$ (huile)
Viscosités : 1 (eau) et 4 (huile)
Condition initiale : s = 0
Conditions aux limites :
1. Flux nul sur tout le bord sauf sur la moitié inférieure du bord droit. Sur cette moitié inférieure du bord droit, la condition aux limites est “pression nulle imposée” avec s = 1 à l’extérieur du domaine (il ne peut donc rentrer que de l’eau).
2. Dans la maille “bas - gauche” se trouve un puits injecteur. Le rayon du puits est 0.001 et la pression est égale à 1.
3. Dans la maille “haut - droit” se trouve un puits producteur. Le rayon du puits est 0.001 et la pression est égale à −1.
Nombre de mailles en x : 20, Nombre de mailles en y : 20. Résultats obtenus au temps T = 1.213, sur la diagonale du carré, du point (0, 0) au point (1, 1).





Nombre de mailles en x : 40, Nombre de mailles en y : 40.Résultats obtenus au temps T = 1.348, sur la diagonale du carré, du point (0, 0) au point (1, 1).

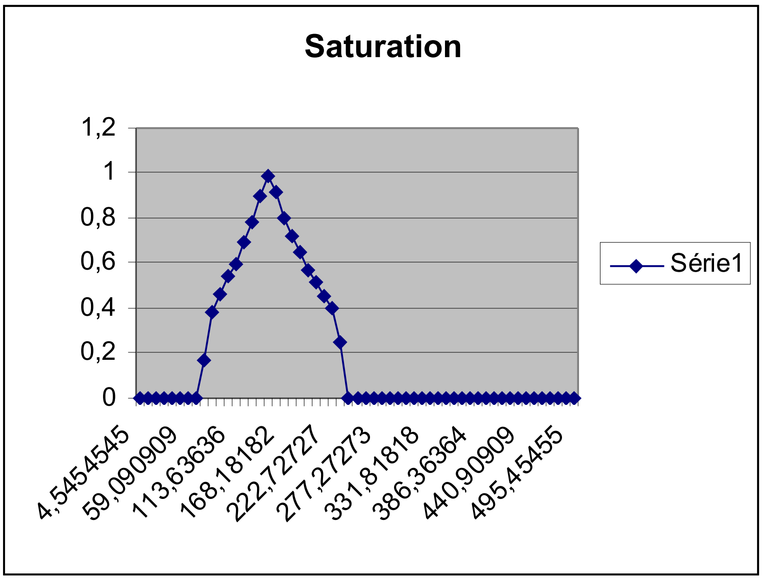


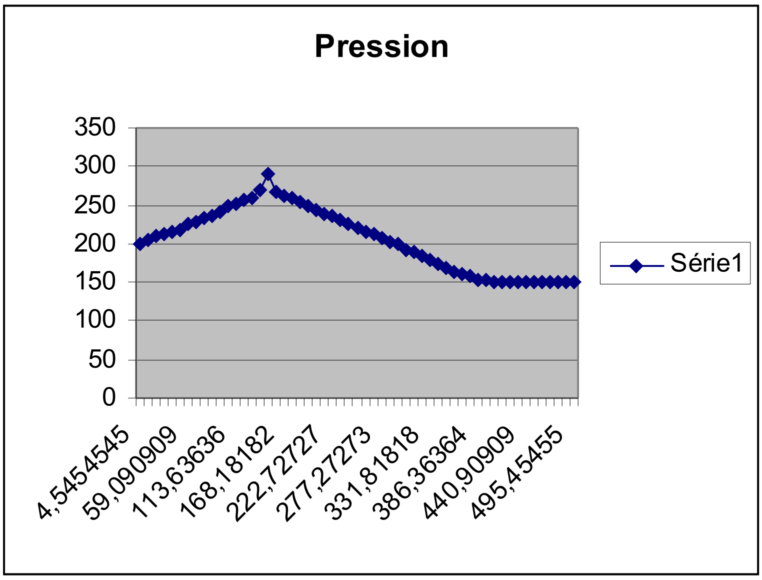


e) <u>Test 5.</u>

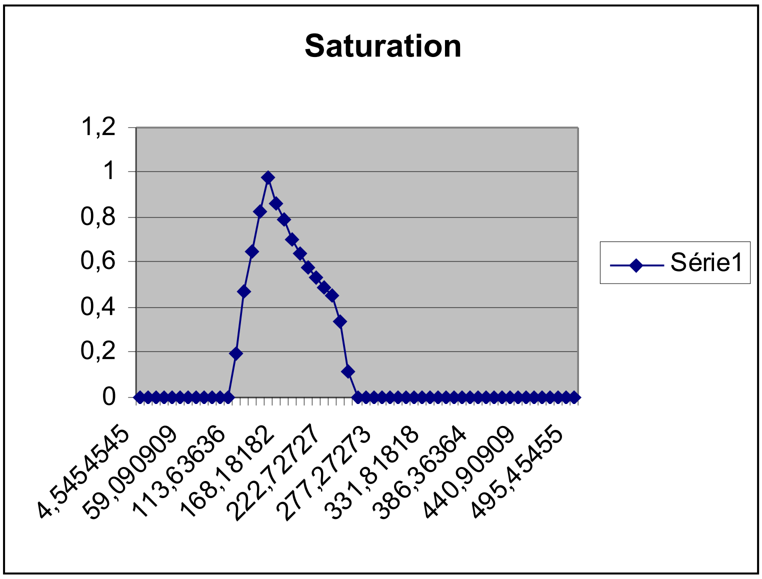
On simule ici un cas avec des données “réelles”. Le domaine est un carré de 500 m sur 500 m.
La porosité est partout de 0.2.
Perméabilité absolue : Les 100 m supérieurs sont occupés par du sable de perméabilité 100 mdarcy (1 mdarcy est égal `a 10−15 m2). Les 400 m inférieurs sont occupés par de l’argile de perméabilité 10−2 mdarcy. Il s’agit donc d’exploiter un gisement très peu perméable.
Perméabilités relatives : s^2 (eau) et $(1 - s)^2$ (huile).
Viscosités : 1 centipoise pour l’eau et 5 centipoises pour l’huile (1 centipoise est égal `a 10−3 Pa.s).
Condition initiale : s = 0
Conditions aux limites : Flux nul sur les bords “haut”, “gauche” et “droit”. Sur le bord “bas”, la pression est imposée `a 200 bars (1 bar est égal à 105 Pa) avec s = 1 à l’extérieur du domaine (il ne peut donc rentrer que de l’eau).

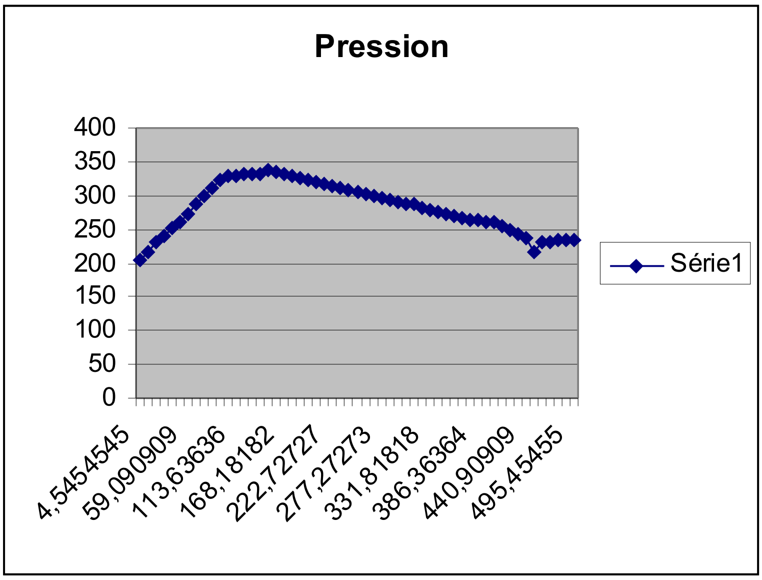
Au point (50m, 50m) se trouve un puits injecteur. Le rayon du puits est de 10 cm et la pression est égale à 350 bars.
Au point (450m, 450m) se trouve un puits producteur. Le rayon du puits est 10 cm et la pression est égale à 150 bars.
Nombre de mailles en x : 55, Nombre de mailles en y : 55. Les solutions (saturation et pression) sont données sur la diagonale du carré, du point (0, 0) au point (500, 500).





Changement de la perméabilité absolue : En prenant les 400 m supérieurs occupés par du sable de perméabilité 100 mdarcy et les 100 m inférieurs occupés par de l'argile de perméabilité 10−2 mdarcy (le gisement est alors très perméable) et en conservant 350 bars au puits injecteur.
Nombre de mailles en x : 55, Nombre de mailles en y : 55. Les solutions (saturation et pression) sont données sur la diagonale du carré, du point (0, 0) au point (500, 500).


Saturation
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
4,5454545
59,090909
113,63636
168,18182
222,72727
277,27273
331,81818
386,36364
440,90909
495,45455
Série1


Pression
400
350
300
250
200
150
100
50
0
4,5454545
59,090909
113,63636
168,18182
222,72727
277,27273
331,81818
386,36364
440,90909
495,45455
Série1