Universités de Marseille, septembre 2005
Master professionnel, Ingénierie Mécanique et Calcul Scientifique
Matlab
TP 2, Discrétisation de problèmes hyperboliques 1d

On souhaite, dans ce TP, comparer différentes discrétisations d'un problème hyperbolique (à une dimension d'espace), issu de la simulation numérique de la récupération assistée d'hydrocarbures.

On se donne $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ et 2 fonctions régulières, f_1 et f_2, de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f_1(0) = 0$, f_1 croissante, $f_2(1) = 0$ et f_2 décroissante. On pose $f = \frac{f_1(\alpha+\beta f_2)}{f_1+f_2}$. On suppose que $I = \mathbb{R}$ ou $I =]0,1[$, $T > 0$ et on se donne $u_0 \in L^\infty(I)$, $0 \leq u_0 \leq 1$ p.p.. On cherche à calculer (de manière approchée) la solution (plus précisément l'unique solution faible entropique, cette solution prend ses valeurs dans $[0,1]$) $u \ : \ I \times [0,T] \to \mathbb{R}$ du problème :

$$u_t(x) + (f(u))_x = 0,\ x \in I,\ t \in [0,T], \tag{1}$$

$$u(\cdot,0) = u_0,\ \text{p.p. dans } I. \tag{2}$$

Si $I =]0,1[$, on ajoute à ce problème des conditions aux limites qui ne seront données que sur le problème discrétisé (voir plus loin).

Pour discrétiser ce problème, on utilise un maillage uniforme de pas $h = 1/N$ ($N \in \mathbb{N}^\star$) en espace et de pas $k = T/M$ ($M \in \mathbb{N}^\star$) en temps. Les inconnues discrètes sont notées u_i^n, $i \in \mathbb{Z}$ (pour $I = \mathbb{R}$) ou $i \in \{1,\dots,N\}$ (pour $I =]0,1[$) et $n \in \{0,\dots,M\}$. La quantité u_i^n est censée approcher les valeurs de $u(x,t)$ pour $x \in]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$ et $t \in [t_n, t_{n+1}[$, avec $x_{i+\frac{1}{2}} = ih$ et $t_n = nk$. Les schémas numériques que nous allons étudier sont de la forme (volumes finis explicites) :

$$h\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i-\frac{1}{2}}^n = 0,\ i \in \mathbb{Z}_I,\ n \in \{0,\dots,M-1\}, \tag{3}$$

$$u_i^0 = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u_0(x)dx,\quad i \in \mathbb{Z}_I, \tag{4}$$

avec $\mathbb{Z}_I = \mathbb{Z}$ si $I = \mathbb{R}$ et $\mathbb{Z}_I = \{1,\dots N\}$ si $I =]0,1[$. La quantité $f_{i+\frac{1}{2}}^n$ est donc censée être une approximation de $f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n))$. On pose $\frac{k}{h} = \lambda$. Les schémas étant explicites, nous aurons dans la suite une limitation sur λ.

1. **Equation linéaire, sans conditions aux limites**

   On prend ici $I = \mathbb{R}$, $T = 1/2$, $f_1(s) = s$, $f_2(s) = 1 - s$ (pour tout $s \in [0,1]$, mais on peut aussi définir ainsi f_1 et f_2 sur $\mathbb{R}$), $\alpha = 1$, $\beta = 0$ (de sorte que $f(s) = s$), $u_0(x) = 1$ si $x < 0$ et $u_0(x) = 0$ si $x > 0$.

   Donner la solution exacte du problème et écrire un programme Matlab calculant la solution approchée pour les 2 choix suivants

   (a) schéma centré : $f_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{f(u_i^n)+f(u_{i+1}^n)}{2}$,

   (b) schéma décentré amont : $f_{i+\frac{1}{2}}^n = f(u_i^n)$.

   (On remarquera qu'il suffit de calculer u_i^n pour $i \in \{-n+1,\dots,n\}$.) Comparer la solution exacte et la solution approchée dans les cas $\lambda = 1$ et $\lambda = 1/2$. déterminer numériquement l'ordre de convergence dans le cas $\lambda = 1/2$ en prenant la norme L^1 à l'instant $t = T$, c'est-à-dire $\sum_{i=-M+1}^{M} |u_i^M - \overline{u}_i^M|$, avec $\overline{u}_i^n = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x,T)dx$.

2. **Equation non linéaire, $f' \geq 0$, sans conditions aux limites**

   On prend ici $I = \mathbb{R}$, $T = 1/2$, $f_1(s) = s^2$, $f_2(s) = \frac{(1-s)^2}{4}$ (pour tout $s \in [0,1]$, ici aussi on peut considérer que f_1 et f_2 sont définies sur $\mathbb{R}$), $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $u_0(x) = 1$ si $x < 0$ et $u_0(x) = 0$ si $x > 0$.

   Reprendre les mêmes questions que ci dessus (schéma centré et schéma décentré amont, on utilise ici le fait que $f' \geq 0$ sur $[0,1]$) avec $\lambda = 1/m$ et $\lambda = 1/(2m)$, $m = \max\{f'(s),\ s \in [0,1]\}$ (on pourra faire un calcul approché de m). La solution exacte peut être calculée (mais cela n'est pas demandé), on pourra choisir comme solution exacte la solution donnée par le schéma décentré amont avec $\lambda = 1/m$ et h petit (par exemple $N = 2000$, on regarde alors l'ordre de convergence avec des h "grand"). La solution exacte doit avoir, pour $t = T$, une discontinuité de hauteur γ en $x = f'(\gamma)T$ où $\gamma \in]0,1[$ est t.q. $f'(\gamma) = f(\gamma)/\gamma$.

3. **Equation non linéaire, f' change de signe, sans conditions aux limites**

   On prend ici $I = \mathbb{R}$, $T = 1/2$, $f_1(s) = s$, $f_2(s) = (1-s)$ (pour tout $s \in [0,1]$, on peut toujours considérer f_1 et f_2 définies sur formules sur $\mathbb{R}$), $\alpha = 1$, $\beta = 2$ (la fonction f est donc concave), $u_0(x) = 1$ si $x < 0$ et $u_0(x) = 0$ si $x > 0$.

   Calculer la solution exacte du problème. Comparer cette solution exacte avec les solutions approchées données par les 2 schémas obtenus en prenant $f^n_{i+\frac{1}{2}} = g(u^n_i, u^n_{i+1})$ et :

   (a) schéma "amont des pétroliers" : $g = g_P$, avec $g_P(a,b) = \frac{f_1(a)(\alpha+\beta f_2(a))}{f_1(a)+f_2(a)}$ si $-\alpha + \beta f_1(a) \leq 0$ et $g_P(a,b) = \frac{f_1(a)(\alpha+\beta f_2(b))}{f_1(a)+f_2(b)}$ si $-\alpha + \beta f_1(a) > 0$,

   (b) schéma de Godunov : $g = g_G$, $g_G(a,b) = \min\{f(c),\ c \in [a,b]\}$ si $a \leq b$ et $g_G(a,b) = \max\{f(c),$ $c \in [a,b]\}$ si $a > b$.

   On pourra prendre, par exemple, $\lambda = 1/m$ et $\lambda = 1/(2m)$, avec $m = \alpha + \beta$.

4. **Avec conditions aux limites**

   On prend maintenant $I =]0,1[$, $T = 1/2$. On cherche maintenant u^n_i pour $i \in \{1,\ldots,N\}$ et il faut donc définir $f^n_{i+1/2}$ pour $i \in \{0,\ldots,N\}$.

   (a) Pour les 2 premiers exemples, on utilise le schéma décentré amont pour définir $f^n_{i+1/2}$ pour $i \in \{1,\ldots,N-1\}$ et on prend $f^n_{1/2} = f(1)$, $f^n_{N+1/2} = f(u^n_N)$. Montrer que la solution approchée est la même que précédemment (pour $i \in \{1,\ldots,N\}$). Elle converge donc vers le même u restreint à $x \in]0,1[$ (qui est l'unique solution entropique de (1)-(2) avec la condition à la limite $u(0,t) = 1$ et pas de condition en $x = 1$).

   (b) pour le 3eme exemple, comparer (avec $\lambda = 1/(2m)$, $m = \alpha + \beta$) les différents choix suivants (avec g_P et g_G comme dans la question précédente) :

      i. **Flux intérieurs :** $f^n_{i+\frac{1}{2}} = g_P(u^n_i, u^n_{i+1})$ ou $f^n_{i+\frac{1}{2}} = g_G(u^n_i, u^n_{i+1})$ pour $i \in \{1,\ldots,N-1\}$, %ssepar

      ii. **Flux en $x = 0$:** $f^n_{\frac{1}{2}} = \alpha$ (choix des pétroliers) ou $f^n_{\frac{1}{2}} = g_G(u_m, u^n_1)$ avec $u_m \in]0,1[$ t.q. $f(u_m) = f(1) = \alpha$ (ces choix sont en fait identiques...).

      iii. **Flux en $x = 1$:** $f^n_{N+\frac{1}{2}} = \frac{f_1(u^n_N)\alpha}{f_1(u^n_N)+f_2(u^n_N)}$ (choix des pétroliers) ou $f^n_{N+\frac{1}{2}} = g_G(u^n_N, 1)$ (les 2 choix sont ici différents).

   Les différents schémas convergent vers l'unique solution faible entropique de (1)-(2) avec les conditions aux limites suivantes "faiblement vérifiées" : $u(0,t) = u_m$ et $u(1,t) = 1$ pour presque tout $t \in]0,T[$.