

Chapitre 2

Problèmes paraboliques : la discrétisation en temps

On a vu au tout début du cours comme exemple type de problème parabolique l'équation de la chaleur instationnaire :

$$u_t - \Delta u = f$$

qui fait intervenir la dérivée en temps d'ordre 1, u_t , ainsi qu'un opérateur différentiel d'ordre 2 en espace. Pour que ce problème soit bien posé, il faut spécifier des conditions aux limites sur la frontière de Ω , et une condition initiale en $t = 0$.

2.1 Le problème continu, et la discrétisation espace-temps

On considère maintenant le même problème en une dimension d'espace. Au temps $t = 0$, on se donne une condition initiale u_0 , et on considère des conditions aux limites de type Dirichlet homogène. Le problème unidimensionnel s'écrit :

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \forall x \in]0, 1[, \forall t \in]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x), \forall x \in]0, 1[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \forall t \in]0, T[, \end{cases} \quad (2.1)$$

où $u(x, t)$ représente la température au point x et au temps t , u_t désigne la dérivée partielle première de u par rapport à t et u_{xx} la dérivée partielle seconde de u par rapport à x . On admettra le théorème d'existence et unicité suivant :

Théorème 2.1 (Résultat d'existence et unicité) *Si $u_0 \in C([0, 1], \mathbb{R})$ alors il existe une unique fonction $u \in C^2(]0, 1[\times]0, T[, \mathbb{R}) \cap C([0, 1] \times [0, T], \mathbb{R})$ qui vérifie (2.1).*

On a même $u \in C^\infty(]0, 1[\times]0, T[, \mathbb{R})$. Ceci est appelé, effet "régularisant" de l'équation de la chaleur.

Proposition 2.2 (Principe du maximum) *Sous les hypothèses du théorème 2.1, soit u la solution du problème (2.1) ;*

1. *si $u^0(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$, alors $u(x, t) \geq 0$, pour tout $t \geq 0$ pour tout $x \in]0, 1[$.*
2. $\|u\|_{L^\infty([0, 1] \times]0, T])} \leq \|u\|_{L^\infty([0, 1])}$.

Ces dernières propriétés peuvent être importantes dans le modèle physique ; supposons par exemple que u représente une fraction massique. Par définition de la fraction massique, celle-ci est toujours comprise entre 0 et 1. La proposition précédente nous dit que la quantité u donné par le modèle mathématique supposé représenter la fraction massique d'une espèce qui diffuse dans un milieu, par exemple, est aussi comprise entre 0 et 1, dès que la fraction massique initiale u_0 est dans l'intervalle $[0, 1]$ ce qui est plutôt une bonne nouvelle : le modèle mathématique respecte les bornes de la physique. Mais on ne peut pas en général calculer la solution de (2.1) de manière analytique. On a recours à la discrétisation en temps et en espace pour se ramener à un système d'équations de dimension finie. Il est souhaitable pour la validité du calcul que la solution approchée obtenue par la résolution de ce système, qui est supposée approcher une fraction massique soit aussi comprise à tout instant entre 0 et 1. On dit souvent d'une

méthode de discrétisation (ou d'un schéma de discrétisation) qu'elle (ou il) est "robuste" ou "stable" s'il préserve les bornes imposées par la physique (0 et 1 dans le cas de la fraction massique évoquée ci-dessus).

Pour calculer une solution approchée, on se donne une discrétisation en temps et en espace, qu'on notera \mathcal{D} . On choisit pour l'instant de discrétiser par différences finies en temps et en espace. La discrétisation consiste donc à se donner un ensemble de points $t_n, n = 1, \dots, M$ de l'intervalle $]0, T[$, et un ensemble de points $x_i, i = 1, \dots, N$. Pour simplifier, on considère un pas constant en temps et en espace. Soit : $h = \frac{1}{N+1} = \Delta x$ le pas de discrétisation en espace, et $k = \Delta t = \frac{T}{M}$, le pas de discrétisation en temps. On pose alors $t_n = nk$ pour $n = 0, \dots, M$ et $x_i = ih$ pour $i = 0, \dots, N + 1$. On cherche à calculer une solution approchée $u_{\mathcal{D}}$ du problème (2.1) ; plus précisément, on cherche à déterminer $u_{\mathcal{D}}(x_i, t_n)$ pour $i = 1, \dots, N$, et $n = 1, \dots, M$. Les inconnues discrètes sont notées $u_i^{(n)}$, $i = 1, \dots, N$ et $n = 1, \dots, M$.

2.2 Discrétisation par Euler explicite en temps.

L'approximation en temps par la méthode d'Euler explicite consiste à écrire la première équation de (2.1) en chaque point x_i et temps t_n , à approcher la dérivée en temps $u_t(x_i, t_n)$ par le quotient différentiel :

$$\frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{k},$$

et la dérivée en espace $-u_{xx}(x_i, t_n)$ par le quotient différentiel :

$$\frac{1}{h^2}(2u(x_i, t_n) - u(x_{i-1}, t_n) - u(x_{i+1}, t_n)).$$

Remarque 2.3 On a choisi une discrétisation en espace de type différences finies, mais on aurait aussi bien pu prendre un schéma de volumes finis ou d'éléments finis.

On obtient le schéma suivant :

$$\begin{cases} \frac{u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}}{k} + \frac{1}{h^2}(2u_i^{(n)} - u_{i-1}^{(n)} - u_{i+1}^{(n)}) = 0, & i = 1, \dots, N, \quad n = 1, \dots, M, \\ u_i^0 = u_0(x_i), & i = 1, \dots, N, \\ u_0^{(n)} = u_{N+1}^{(n)} = 0, & \forall n = 1, \dots, M. \end{cases} \quad (2.2)$$

le schéma est dit explicite, car la formule ci-dessus donne $u_i^{(n+1)}$ de manière explicite en fonction des $(u_i^{(n)})_{i=1, \dots, N}$. En effet on a :

$$u_i^{(n+1)} = u_i^{(n)} - \lambda(2u_i^{(n)} - u_{i-1}^{(n)} - u_{i+1}^{(n)}),$$

avec $\lambda = \frac{k}{h^2}$.

2.2.1 Consistance du schéma

Soit $\bar{u}_i^{(n)} = u(x_i, t_n)$ la valeur exacte de la solution en x_i et t_n : L'erreur de consistance R_i en (x_i, t_n) peut s'écrire comme la somme des erreurs de consistance en temps et en espace : $R_i^{(n)} = \tilde{R}_i^{(n)} + \hat{R}_i^{(n)}$ avec :

$$\tilde{R}_i^{(n)} = \frac{\bar{u}_i^{(n+1)} - \bar{u}_i^{(n)}}{k} - u_t(x_i, t_n) \text{ et } \hat{R}_i^{(n)} = \frac{1}{h^2} (2\bar{u}_i^{(n)} - \bar{u}_{i-1}^{(n)} - \bar{u}_{i+1}^{(n)}) - u_{xx}(x_i, t_n).$$

Proposition 2.4 Le schéma (2.2) est consistant d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace, c'est à dire qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ ne dépendant que de u tel que :

$$|R_i^{(n)}| \leq C(k + h^2). \quad (2.3)$$

Démonstration : On a vu lors de l'étude des problèmes elliptiques que l'erreur de consistance en espace $\tilde{R}_i^{(n)}$ est d'ordre 2 (voir formule (1.30) page 15). Un développement de Taylor en temps donne facilement que $\tilde{R}_i^{(n)}$ est d'ordre 1 en temps. ■

2.2.2 Stabilité

On a vu à la proposition 2.2 page 59 que la solution exacte vérifie :

$$\|u\|_{L^\infty(]0,1[\times]0,T[)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(]0,1[)}$$

Si on choisit correctement les pas de temps et d'espace, nous allons voir qu'on peut avoir l'équivalent discret sur la solution approchée.

Définition 2.5 On dit qu'un schéma est L^∞ -stable si la solution approchée est bornée dans L^∞ indépendamment du pas du maillage.

Proposition 2.6 Si la condition de stabilité

$$\lambda = \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2} \quad (2.4)$$

est vérifiée, alors le schéma (2.2) est L^∞ -stable au sens où :

$$\sup_{\substack{i=1,\dots,N \\ n=1,\dots,M}} |u_i^{(n)}| \leq \|u_0\|_\infty$$

Démonstration : On peut écrire le schéma sous la forme

$$u_i^{(n+1)} = u_i^{(n)} - \lambda(2u_i^{(n)} - u_{i-1}^{(n)} - u_{i+1}^{(n)}),$$

soit encore :

$$u_i^{(n+1)} = (1 - 2\lambda)u_i^{(n)} + \lambda u_{i-1}^{(n)} + \lambda u_{i+1}^{(n)}.$$

Si $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$, on a $\lambda \geq 0$ et $1 - 2\lambda \geq 0$, et la quantité $u_i^{(n+1)}$ est donc combinaison convexe de $u_i^{(n)}$, $u_{i-1}^{(n)}$ et $u_{i+1}^{(n)}$. Soit $M^{(n)} = \max_{i=1,\dots,N} u_i^{(n)}$, on a alors :

$$u_i^{(n+1)} \leq (1 - 2\lambda)M^{(n)} + \lambda M^{(n)} + \lambda M^{(n)}, \quad \forall i = 1, \dots, N,$$

et donc $u_i^{(n+1)} \leq M^{(n)}$. On en déduit en passant au maximum que :

$$M^{(n+1)} \leq M^{(n)}.$$

On montre de la même manière que

$$\min_{i=1,\dots,N} u_i^{(n+1)} \geq \min_{i=1,\dots,N} u_i^{(n)}.$$

On en déduit $\max_{i=1,\dots,N} (u_i^{(n+1)}) \leq \max u_i^0$ et $\min_{i=1,\dots,N} (u_i^{(n+1)}) \geq \min u_i^0$ d'où le résultat. ■

2.2.3 Convergence

Définition 2.7 Soit u la solution du problème (2.1) et $(u_i^{(n)})_{\substack{i=1,\dots,N \\ n=1,\dots,M}}$ la solution de (2.2). On appelle erreur de discrétisation au point (x_i, t_n) la quantité $e_i^n = u(x_i, t_n) - u_i^n$.

Théorème 2.8 Sous les hypothèses du théorème 2.1, et sous la condition de stabilité (2.4), il existe $C \in \mathbb{R}_+$ ne dépendant que de u tel que

$$\|e_i^{(n+1)}\|_\infty \leq \|e_i^{(0)}\|_\infty + TC(k + h^2), \text{ pour tout } i = 1, \dots, N \text{ et } n = 0, \dots, M - 1.$$

Ainsi, si $\|e_i^{(0)}\|_\infty = 0$, alors $\max_{i=1,\dots,N} \|e_i^{(n)}\|$ tend vers 0 lorsque k et h tendent vers 0, pour tout $n = 1, \dots, M$. Le schéma (2.2) est donc convergent.

Démonstration : On note $\bar{u}_i^{(n)} = u(x_i, t_n)$. On a donc, par définition de l'erreur de consistance,

$$\frac{\bar{u}_i^{(n+1)} - \bar{u}_i^{(n)}}{k} - \frac{1}{h^2}(2\bar{u}_i^{(n)} - \bar{u}_{i-1}^{(n)} - \bar{u}_{i+1}^{(n)}) = R_i^{(n)}. \quad (2.5)$$

D'autre part, le schéma numérique s'écrit :

$$\frac{u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}}{k} - \frac{1}{h^2}(2u_i^{(n)} - u_{i-1}^{(n)} - u_{i+1}^{(n)}) = 0. \quad (2.6)$$

Retranchons (2.6) à (2.5), on obtient :

$$\frac{e_i^{(n+1)} - e_i^{(n)}}{k} - \frac{1}{h^2}(2e_i^{(n)} - e_{i+1}^{(n)} - e_{i-1}^{(n)}) = R_i^{(n)},$$

soit encore :

$$e_i^{(n+1)} = (1 - 2\lambda)e_i^{(n)} + \lambda e_{i-1}^{(n)} + \lambda e_{i+1}^{(n)} + kR_i^{(n)}$$

Or $(1 - 2\lambda)e_i^{(n)} + \lambda e_{i-1}^{(n)} + \lambda e_{i+1}^{(n)} \leq \|e^{(n)}\|_\infty$, car $\lambda \leq \frac{1}{2}$, et donc comme le schéma est consistant, l'inégalité (2.3) entraîne que :

$$|e_i^{(n+1)}| \leq \|e^{(n)}\|_\infty + kC(k + h^2).$$

On a donc par récurrence :

$$\|e_i^{(n+1)}\|_\infty \leq \|e^{(0)}\|_\infty + MkC(k + h^2)$$

ce qui démontre le théorème. ■

Donnons maintenant un exemple où lorsque la condition (2.3) n'est pas vérifiée, le schéma est instable.

2.2.4 Exemple de non convergence

Montrons que si la condition $\lambda \leq \frac{1}{2}$ n'est pas respectée, on peut construire une condition initiale pour lequel le schéma n'est pas stable. Soit $u_0 \in C([-1, 1], \mathbb{R})$ qui vérifie (voir Figure (2.1)) :

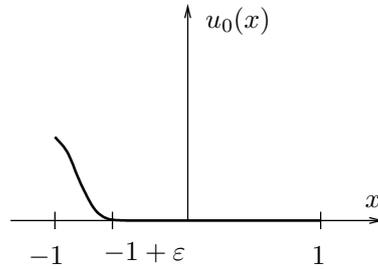


FIG. 2.1 – Condition initiale pour le contre exemple

$$\begin{cases} u_0(x) \geq 0 \\ u_0(x) \neq 0 \text{ si } x \in]-1; -1 + \epsilon[\\ u_0(x) = 0 \text{ si } x > -1 + \epsilon \end{cases}$$

On considère le problème :

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \forall x \in]-1, 1[; \forall t > 0. \\ u(x, 0) = u_0(x), \forall x \in]-1, 1[\\ u(1, t) = u(-1, t) = 0, \forall t > 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

On peut montrer que la solution exacte u de (2.7) vérifie $u(x, t) > 0, \forall x \in]-1, 1[, \forall t > 0$. En particulier, pour un temps $T > 0$ donné, on a $u(0, T) > 0$. Soit $M \in \mathbb{N}$ et $k = T/M$. Soit $u_i^{(n)}$ la solution approchée par (2.2), sensée

approcher $u(x_i, t_n)$ ($i \in \{-N, \dots, N\}, n \in N$). On va montrer que $u_0^M = 0$ pour k et h choisis de manière non admissible ; ceci montre que le schéma ne peut pas converger. Calculons u_0^M :

$$u_0^M = (1 - 2\lambda)u_0^{M-1} + \lambda u_{-1}^{M-1} + \lambda u_1^{M-1}.$$

Donc u_0^M dépend de

$$\begin{aligned} & u^{(M-1)} \text{ sur } [-h, h] \\ & u^{(M-2)} \text{ sur } [-2h, 2h] \\ & \vdots \\ & u^{(0)} \text{ sur } [-Mh, Mh] = \left[-\frac{T}{k}h, \frac{T}{k}h\right] \end{aligned}$$

Par exemple, si on prend $\frac{h}{k} = \frac{1}{2T}$ on obtient : $[-\frac{T}{k}h, \frac{T}{k}h] = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, et donc, si $\varepsilon < \frac{1}{2}$, on a $u_0^M = 0$. On peut donc remarquer que si $\frac{h}{k} = \frac{1}{2T}$, même si $h \rightarrow 0$ et $k \rightarrow 0$,

$$u_0^M \not\rightarrow u(0, T).$$

Le schéma ne converge pas ; notons que ceci n'est pas en contradiction avec le résultat de convergence 2.8 page 61, puisqu'ici, on n'a pas satisfait à la condition $\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$.

2.2.5 Stabilité au sens des erreurs d'arrondi

On considère le schéma d'Euler explicite pour l'équation (2.1). On appelle u la solution exacte de (2.1), $u_{\mathcal{D}}$ la solution exacte de (2.2), u_{num} la solution effectivement calculée par l'ordinateur. On peut écrire :

$$u - u_{num} = u - u_{\mathcal{D}} + u_{\mathcal{D}} - u_{num}.$$

On sait que l'erreur de discrétisation $u - u_{\mathcal{D}}$ tend vers 0 lorsque h et k tendent vers 0, sous condition de stabilité (2.4), c.à.d.

$$\lambda \leq \frac{1}{2}.$$

Pour contrôler l'erreur entre la solution $u_{\mathcal{D}}$ du schéma (2.2) et la solution numérique obtenue u_{num} , on cherche à estimer l'amplification de l'erreur commise sur la donnée initiale. Rappelons que le schéma s'écrit :

$$u_i^{(n+1)} = (1 - 2\lambda)u_i^{(n)} + \lambda u_{i-1}^{(n)} + \lambda u_{i+1}^{(n)},$$

avec $\lambda = \frac{k}{h^2}$. Ce schéma se met sous la forme $u^{(n+1)} = AU^{(n)}$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & 1 - 2\lambda & \lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \lambda & 1 - 2\lambda & \lambda \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 - 2\lambda \end{pmatrix}$$

Définition 2.9 (Stabilité au sens des erreurs d'arrondi) *Supposons que l'on commette une erreur ε^0 sur la condition initiale. La nouvelle condition initiale \tilde{u}^0 , s'écrit donc $\tilde{u}^0 = u^0 + \varepsilon^0$. A cette nouvelle condition initiale correspond une nouvelle solution calculée $\tilde{u}^{(n)} = u^{(n)} + \varepsilon^{(n)}$. On dit que le schéma est stable au sens des erreurs d'arrondi s'il existe $C > 0$ indépendant de n tel que $\varepsilon^{(n)} \leq C\varepsilon^{(0)}$.*

On peut trouver une condition suffisante pour que le schéma 2.2 soit stable au sens des erreurs d'arrondi. En effet, on va démontrer le résultat suivant :

Proposition 2.10 *On suppose que $\lambda = \frac{k}{h^2} < \frac{1}{2}$. Alors le schéma 2.2 est stable au sens des erreurs d'arrondi.*

Démonstration : Soit donc une condition initiale perturbée $\tilde{u}^0 = u^0 + \varepsilon^0$ à laquelle on associe une nouvelle solution calculée $\tilde{u}^{(n)} = u^{(n)} + \varepsilon^{(n)}$. On a $\varepsilon^{(n)} = A^n \varepsilon^0$. Comme A est symétrique, A est diagonalisable dans \mathbb{R} . Soient μ_1, \dots, μ_N les valeurs propres de A , et e_1, \dots, e_N les vecteurs propres associés, c'est-à-dire tels que $Ae_i = \mu_i e_i, \forall i = 1, \dots, N$. On décompose la perturbation ε^0 sur la base des vecteurs propres :

$$\varepsilon^0 = \sum_{i=1}^N a_i e_i. \text{ On a donc } A^n \varepsilon^0 = \sum_{i=1}^N a_i \mu_i^n e_i = \varepsilon^{(n)}.$$

Si on prend par exemple : $\varepsilon^0 = a_i e_i$, on obtient $\varepsilon^{(n)} = a_i \mu_i^n e_i$. Il y a diminution de l'erreur d'arrondi sur ε^0 si

$$\sup_{i=1 \dots N} |\mu_i| \leq 1$$

c'est-à-dire si $\rho(A) \leq 1$, où $\rho(A)$ désigne le rayon spectral de A . Calculons $\rho(A)$. On écrit : $A = I + \lambda B$ où B est la matrice symétrique définie négative, définie par :

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Soit $\mathcal{VP}(A)$ l'ensemble de valeurs propres de A . Alors $\mathcal{VP}(A) = \{1 + \lambda\mu, \mu \in \mathcal{VP}(B)\}$. Or $\mathcal{VP}(B) = \{-4 \sin^2 \frac{j\pi}{2(N+1)}, j = 1, \dots, N\}$ (voir Lemme 2.11 plus loin). Pour que $\varepsilon^{(n)} < \varepsilon^0$, il faut donc que :

$$\sup_{j=1, \dots, N} \left| 1 - 4\lambda \sin^2 \frac{j\pi}{2(N+1)} \right| < 1,$$

c.à.d.

$$\lambda \sin^2 \frac{j\pi}{2(N+1)} < \frac{1}{2}.$$

Une condition suffisante pour avoir une diminution de l'erreur est donc que $\lambda < \frac{1}{2}$. ■

Lemme 2.11 (Valeurs propres de B) L'ensemble $\mathcal{VP}(B)$ des valeurs propres de la matrice B définie par (2.8) est donné par :

$$\mathcal{VP}(B) = \left\{ -4 \sin^2 \frac{j\pi}{2(N+1)}, j = 1, \dots, N \right\}.$$

Démonstration : Les valeurs propres B peuvent se calculer à partir des valeurs propres de l'opérateur continu ; on commence donc par chercher u solution de :

$$\begin{cases} -u'' + \alpha u = 0, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Cherchons $u(x)$ sous la forme :

$$u(x) = a \cos \sqrt{\alpha} x + b \sin \sqrt{\alpha} x$$

Comme $u(0) = 0$, on a : $a = 0$. De même, $u(1) = B \sin \sqrt{\alpha} = 0$, et donc $\sqrt{\alpha} = k\pi$. Les valeurs propres et vecteurs propres associés de l'opérateur continu sont donc : $(k^2 \pi^2, \sin k\pi x)$ $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $k = 1, \dots, N$, soit $v^{(k)} \in \mathbb{R}^N$ tel que $v_i^{(k)} = \sin k\pi i h$. Calculons $Bv^{(k)}$:

$$(Bv^{(k)})_i = v_{i-1}^{(k)} - 2v_i^{(k)} + v_{i+1}^{(k)}$$

et donc

$$(Bv^{(k)})_i = \sin k\pi(i-1)h - 2 \sin k\pi i h + \sin k\pi(i+1)h$$

En développant, on obtient :

$$(Bv^{(k)})_i = \sin k\pi i h \cos(-k\pi h) + \cos k\pi i h \sin(-k\pi h) - 2 \sin k\pi i h + \sin k\pi i h \cos k\pi h + \cos k\pi i h \sin k\pi h.$$

Après simplifications, il vient :

$$(Bv^{(k)})_i = 2 \sin k\pi i h (-1 + \cos k\pi h).$$

Or, $\cos k\pi h = 1 - 2 \sin^2 \frac{k\pi h}{2}$. On a donc :

$$\begin{aligned} (Bv^{(k)})_i &= 2 \sin k\pi i h \times \left(-2 \sin^2 \frac{k\pi h}{2}\right) \\ &= -4 \sin^2 \frac{k\pi h}{2} (v^{(k)})_i, \quad \forall k = 1 \dots N. \end{aligned}$$

On a $h = \frac{1}{N+1}$, et donc les valeurs propres de B s'écrivent $\mu_k = -4 \sin^2 \frac{k\pi}{2(N+1)}$, $k = 1, \dots, N$. ■

2.2.6 Stabilité au sens de Von Neumann

L'analyse de stabilité au sens de Von Neumann¹ consiste à étudier l'impact du schéma sur un mode de Fourier isolé. Pour que le mode de Fourier en question soit solution du problème continu, on remplace les conditions de Dirichlet homogènes du problème (2.1) par des conditions périodiques, et pour alléger les notations, on considère l'intervalle $]0, 2\pi[$ comme intervalle d'étude en espace plutôt que l'intervalle $]0, 1[$.

Problème continu avec conditions aux limites périodiques On considère le problème avec conditions aux limites périodiques

$$\begin{cases} u_t - u_{(xx)} = 0, & t \in]0, T[, x \in]0, 2\pi[, \\ u(0, t) = u(2\pi, t), & \forall t \in]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (2.9)$$

Le problème (2.9) est bien posé, au sens où $\forall u_0 \in C([0, 2\pi])$, il existe une unique $u \in C^2(]0, 2\pi[\times]0, T[, \mathbb{R})$ solution de (2.9). On suppose que $u_0 \in L^2(]0, 2\pi[)$. On rappelle que l'espace $L^2_{\mathbb{C}}$ des fonctions mesurables de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{C} est un espace de Hilbert, et que $\{e^{ipx}, p \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne² de $L^2(]0, 2\pi[)$ (attention ici i désigne le complexe imaginaire pur tel que $i^2 = -1$). On décompose donc la condition initiale dans cette base hilbertienne : $u_0(x) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} c_p(0) e^{ipx}$ (au sens de la convergence dans L^2). Dans un premier temps, calculons

formellement les solutions de (2.9) sous la forme d'un développement dans la base hilbertienne :

$$u(x, t) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} c_p(t) e^{ipx}.$$

En supposant qu'on ait le droit de dériver terme à terme, on a donc :

$$u_t(x, t) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} c'_p(t) e^{ipx} \text{ et } u_{xx}(x, t) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} -c_p(t) p^2 e^{ipx}.$$

On obtient, en remplaçant dans l'équation

$$c'_p(t) = -p^2 c_p(t)$$

c'est-à-dire $c_p(t) = c_p(0) e^{-p^2 t}$ en tenant compte de la condition initiale. On a donc finalement :

$$u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_p(0) e^{-p^2 t} e^{ipx}. \quad (2.10)$$

Justifions maintenant ce calcul formel. On a :

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} |c_p(0)|^2 = \|u^0\|_{L^2}^2 < +\infty$$

¹John von Neumann (1903-1957), mathématicien et physicien américain d'origine hongroise, a apporté d'importantes contributions tant en mécanique quantique, qu'en analyse fonctionnelle, en théorie des ensembles, en informatique, en sciences économiques ainsi que dans beaucoup d'autres domaines des mathématiques et de la physique. Il a de plus participé aux programmes militaires américains.

²Soit H un espace de Hilbert, $(e_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de H si : $(e_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée telle que $\forall v \in H, \exists (v_p)_{i \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}; v = \sum_{p \in \mathbb{Z}} v_p e_p$ au sens de la convergence dans H , avec $v_p = (v, e_p)$, où (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire sur H .

De plus, en dérivant (2.10) terme à terme, on obtient :

$$u_t - u_{xx} = 0.$$

La condition de périodicité est bien vérifiée par u donnée par (2.10). Enfin on a bien : $u(x, t) \rightarrow u_0(t)$ lorsque $t \rightarrow 0$, donc la condition initiale est vérifiée. On peut remarquer qu'il y a "amortissement" des coefficients de Fourier $c_p(0)$ lorsque t augmente, c.à.d. qu'on a : $c_p(t) \leq c_p(0)$, $\forall t > 0$.

Discretisation du problème (2.9) Si on utilise le schéma (2.2), pour la discrétisation de (2.9) on a :

$$u_j^{(n+1)} = (1 - 2\lambda)u_j^{(n)} + \lambda u_{j-1}^{(n)} + \lambda u_{j+1}^{(n)}. \quad (2.11)$$

On prend comme condition initiale $u^0(x) = e^{ipx}$, pour $p \in \mathbb{Z}$ fixé. En discrétisant, on obtient : $u_j^0(x) = e^{ipjh}$, pour $j = 1, \dots, N$, avec $h = \frac{2\pi}{N+1}$. On a bien $u_0^0 = u_{N+1}^0 = 0$. Calculons :

$$u_j^{(1)} = (1 - 2\lambda)e^{ipjh} + \lambda e^{ip(j-1)h} + \lambda e^{ip(j+1)h}$$

donc : $u_j^{(1)} = e^{ipjh}\xi_p$. On appelle ξ_p le facteur d'amplification associé à la fonction e^{ipx} (appelé aussi "p-ième mode de Fourier"). On a donc :

$$\begin{cases} u_j^{(1)} = \xi_p u_j^{(0)} \\ \vdots \\ u_j^{(n)} = (\xi_p)^n u_j^{(0)} \end{cases}$$

On dit que le schéma est "stable au sens de Von Neumann" si on a la même propriété d'amortissement des modes de Fourier que dans le cas continu vu plus haut c.à.d. si :

$$|\xi_p| < 1, \quad \forall p.$$

Calculons ξ_p :

$$\begin{aligned} \xi_p &= 1 - 2\lambda + 2\lambda \cos ph \\ &= 1 - 2\lambda + 2\lambda(1 - 2\sin^2 \frac{ph}{2}) \\ &= 1 - 4\lambda \sin^2 \left(\frac{2\pi}{N+1}, \frac{p}{2} \right). \end{aligned}$$

Pour avoir $|\xi_p| < 1$, il faut $\lambda \sin^2 \left(\frac{2\pi}{N+1}, \frac{p}{2} \right) < \frac{1}{4}$. Une condition suffisante pour que le schéma soit stable au sens de Von Neumann est que : $\lambda < \frac{1}{2}$. Remarquons que c'est la même condition que pour la stabilité des erreurs d'arrondis.

Convergence du schéma avec la technique de Von Neumann Soit $u \in C^2([0, 2\pi[\times]0, T[, \mathbb{R})$ la solution exacte de (2.9) on a $u(jh, nk) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} c_p(0) e^{-p^2 nk} e^{ipjh}$ où $h = \frac{2\pi}{N+1}$ est le pas de discrétisation en espace et

$k = \frac{T}{M}$ le pas de discrétisation en temps. Soit $u_{\mathcal{D}}$ la solution de (2.2), et :

$$u_{\mathcal{D}}(jh, nk) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} c_p(0) \xi_p^{(n)} e^{ipjh}.$$

On cherche à montrer la convergence de $u_{\mathcal{D}}$ vers u au sens suivant :

Proposition 2.12 Soit $u_0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(0) e^{inx}$ et u la solution du problème (2.9). On note $u_{\mathcal{D}}$ la solution approchée obtenue par le schéma d'Euler explicite (2.11). Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta \geq 0$ tel que si $k \leq \eta$ et $\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$, alors

$$|u(jh, nk) - u_{\mathcal{D}}(jh, nk)| \leq \varepsilon, \quad \forall j = 1 \dots N, n = \frac{T}{k}.$$

Démonstration : On note $(u - u_{\mathcal{D}})_j^{(n)}$ la quantité $u(jh, nk) - u_{\mathcal{D}}(jh, nk)$. On fera l'hypothèse supplémentaire :

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} |c_p(0)| < +\infty.$$

Donc pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $2 \sum_{|p| \geq A} |c_p(0)| \leq \varepsilon$. On écrit alors :

$$(u - u_{\mathcal{D}})_j^{(n)} \leq \sum_{|p| \leq A} c_p(0)(e^{-p^2 nk} - \xi_p^n) e^{ipjh} + \sum_{|p| \geq A} c_p(0)(e^{-p^2 nk} - \xi_p^n) e^{ipjh}$$

On a donc :

$$(u - u_{\mathcal{D}})_j^{(n)} \leq X + 2 \sum_{|p| \geq A} |c_p(0)|, \text{ avec } X = \sum_{|p| \leq A} |c_p(0)|(e^{-p^2 nk} - \xi_p^n)$$

et $2 \sum_{|p| \geq A} |c_p(0)| \leq 2\varepsilon$. Montrons maintenant que $X \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$. Remarquons que

$$e^{-p^2 nk} - \xi_p^n = e^{-p^2 T} - \xi_p^n, \text{ et } \xi_p = 1 - 4\lambda \sin^2 \frac{ph}{2}.$$

Or, $\sin^2 \frac{ph}{2} = \frac{p^2 h^2}{4} + O(h^4)$, et $\lambda = \frac{k}{h^2}$. Donc : $4\lambda \sin^2 \frac{ph}{2} = p^2 k + O(kh^2)$. On en déduit :

$$(\xi_p)^n = \left(1 - 4\lambda \sin^2 \frac{ph}{2}\right)^{T/k} \text{ et donc } \ln \xi_p^n = \frac{T}{k} \ln \left(1 - 4\lambda \sin^2 \frac{ph}{2}\right) = -Tp^2 + O(h^2).$$

On en déduit que $\xi_p^n \rightarrow e^{-p^2 T}$ lorsque $h \rightarrow 0$. Tous les termes de X tendent vers 0, et X est une somme finie ; on a donc montré que $(u - u_{\mathcal{D}})_j^{(n)}$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0. ■

Remarque 2.13 On peut adapter la technique de Von Neumann au cas Dirichlet homogène sur $[0, 1]$, en effectuant le développement de u par rapport aux fonctions propres de l'opérateur u'' avec conditions aux limites de Dirichlet :

$$u(x, t) = \sum c_n(t) \sin(n\pi x).$$

L'avantage du développement en série de Fourier est qu'il marche pour n'importe quel opérateur linéaire à condition d'avoir pris des conditions aux limites périodiques.

2.3 Schéma implicite et schéma de Crank-Nicolson

2.3.1 Le θ -schéma

Commençons par un petit rappel sur les équations différentielles (voir aussi polycopié d'analyse numérique de licence, sur le site web <http://www.cmi.univ-mrs.fr/herbin>) On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)), t > 0. \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Soit k un pas (constant) de discrétisation, on rappelle que les schémas d'Euler explicite et implicite pour la discrétisation de ce problème s'écrivent respectivement :

$$\text{Euler explicite : } \frac{y^{(n+1)} - y^{(n)}}{k} = f(y^{(n)}), n \geq 0 \quad (2.13)$$

$$\text{Euler implicite : } \frac{y^{(n+1)} - y^{(n)}}{k} = f(y^{(n+1)}), n \geq 0, \quad (2.14)$$

avec $y^{(n)} = y_0$. On rappelle également que le θ -schéma, où θ est un paramètre de l'intervalle $[0, 1]$ s'écrit :

$$y^{(n+1)} = y^{(n)} + k\theta f(y^{(n+1)}) + k(1 - \theta)f(y^{(n)}). \quad (2.15)$$

Remarquons que pour $\theta = 0$ on retrouve le schéma (2.13) et pour $\theta = 1$ le schéma (2.14). On peut facilement adapter le θ schéma à la résolution des équations paraboliques. Par exemple, le θ -schéma pour la discrétisation en temps du problème (2.1), avec une discrétisation par différences finies en espace s'écrit :

$$\frac{u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}}{k} = \frac{\theta}{h^2} (-2u_i^{(n+1)} + u_{i-1}^{(n+1)} + u_{i+1}^{(n+1)}) + \frac{1-\theta}{h^2} (-2u_i^{(n)} + u_{i-1}^{(n)} + u_{i+1}^{(n)}), ; n \geq 0, i = 1 \quad (2.16)$$

$$u_i^{(0)} = u_0(x_i), i = 1, \dots, N.$$

Si $\theta = 0$, on retrouve le schéma d'Euler explicite ; si $\theta = 1$, celui d'Euler implicite. Dans ce cas où $\theta = \frac{1}{2}$ ce schéma s'appelle schéma de Crank³-Nicolson⁴. Notons que dès que $\theta > 0$, le schéma est implicite, au sens où on n'a pas d'expression explicite de $u_i^{(n+1)}$ en fonction des $u_j^{(n)}$.

2.3.2 Consistance et stabilité

Proposition 2.14 (Consistance du θ -schéma) *Le θ schéma (2.16) pour la discrétisation du problème (2.1) est d'ordre 2 en espace. Il est d'ordre 2 en temps si $\theta = \frac{1}{2}$, et d'ordre 1 sinon.*

Démonstration : On pose $\bar{u}_j^n = u(x_j, t_n)$, $h = \frac{1}{N+1}$,

$$R_j^{(n)} = \frac{\bar{u}_j^{(n+1)} - \bar{u}_j^{(n)}}{k} + \frac{\theta}{h^2} \left(-2\bar{u}_i^{(n+1)} + \bar{u}_{i-1}^{(n+1)} + \bar{u}_{i+1}^{(n+1)} \right) + \frac{1-\theta}{h^2} \left(-2u_i^{(n)} + u_{i-1}^{(n)} + u_{i+1}^{(n)} \right)$$

On va montrer, en effectuant des développements limités, que : $|R_j^{(n)}| \leq C(k + h^2)$ si $\theta \neq \frac{1}{2}$ et que $|R_j^{(n)}| \leq C(k^2 + h^2)$ si $\theta = \frac{1}{2}$. En effet, on décompose

$$R_j^{(n)} = T_j^{(n,1)} + \theta T_j^{(n,2)} + (1-\theta)T_j^{(n,3)}$$

avec :

$$T_j^{(n,1)} = \frac{\bar{u}_j^{(n+1)} - \bar{u}_j^{(n)}}{k}, \quad T_j^{(n,2)} = \frac{\theta}{h^2} \left(-2\bar{u}_i^{(n+1)} + \bar{u}_{i-1}^{(n+1)} + \bar{u}_{i+1}^{(n+1)} \right)$$

$$T_j^{(n,3)} = \frac{1-\theta}{h^2} \left(-2u_i^{(n)} + u_{i-1}^{(n)} + u_{i+1}^{(n)} \right)$$

Effectuons un développement limité pour calculer $T_j^{(n,1)}$:

$$T_j^{(n,1)} = (\bar{u}_t)(x_j, t_n) + \frac{k}{2}(u_{tt})(x_j, t_n) + R_1 \quad \text{avec } |R_1| \leq Ck^2.$$

Faisons de même pour $T_j^{(n,2)}$:

$$T_j^{(n,2)} = \theta(\bar{u}_{xx}(x_j, t_{n+1}) + R_2) \quad \text{avec } |R_2| \leq Ch^2.$$

Or $\bar{u}_{xx}(x_j, t_{n+1}) = \bar{u}_{xx}(x_j, t_n) + k\bar{u}_{xxt}(x_j, t_n) + R_3$ avec $|R_3| \leq Ck^2$, donc :

$$T_j^{(n,2)} = \theta(u_{xx}(x_j, t_n) + k u_{xxt}(x_j, t_n) + R_4) \quad \text{avec } |R_4| \leq C(h^2 + k^2).$$

De même pour $T_j^{(n,3)}$, on a :

$$T_j^{(n,3)} = (1-\theta)u_{xx}(x_j, t_n) + R_5, \quad \text{avec } |R_5| \leq Ck^2.$$

En regroupant, on obtient que

$$R_j^{(n)} = u_t(x_j, t_n) - u_{xx}(x_j, t_n) \frac{k}{2} \frac{\partial}{\partial t} u_t(x_j, t_n) + \theta k(u_{xx})(x_j, t_n) + R$$

avec $R = R_1 + R_4 + R_5$

• Si $\theta = \frac{1}{2}$, on a un schéma d'ordre 2 en temps et en espace.

En effet, $\frac{k}{2}(\bar{u}_{tt})(x_j, t_n) - \theta k(\bar{u}_{xxt})(x_j, t_n) = \frac{\partial}{\partial t} \left(k \left[\frac{1}{2}(\bar{u}_t)(x_j, t_n) - \theta(\bar{u}_{xx})(x_j, t_n) \right] \right)$ et $u_t - u_{xx} = 0$.

• Si $\theta \neq \frac{1}{2}$: on a un schéma d'ordre 2 en espace et d'ordre 1 en temps. ■

³John Crank (6 February 1916 –3 October 2006) mathématicien britannique.

⁴Phyllis Nicolson (21 Septembre 1917 – 6 Octobre 1968) mathématicienne britannique.

Proposition 2.15 (Stabilité au sens de Von Neumann) Si $\theta \geq \frac{1}{2}$ le θ -schéma est inconditionnellement stable. En particulier, les schémas d'Euler implicite et de Crank-Nicolson sont inconditionnellement stables. Si $\theta < \frac{1}{2}$ le schéma est stable sous condition.

$$\lambda \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}.$$

(On retrouve en particulier que le schéma d'Euler explicite n'est que si $\lambda \leq \frac{1}{2}$).

Démonstration : On remplace les conditions aux limites de Dirichlet sur $[0, 1]$ par des conditions périodiques sur $[0, 2\pi]$. La solution exacte s'écrit alors :

$$u = \sum_{p \in \mathbb{Z}} c_p(0) e^{-p^2 t} e^{ipx}.$$

Prenons comme condition initiale $u_0(x) = e^{ipx}$. On a :

$$u_j^{(n+1)} - u_j^{(n)} = \frac{k}{h^2} \left[-\theta(2u_j^{(n+1)} - u_{j-1}^{(n+1)} - u_{j+1}^{(n+1)}) - (1-\theta)(2u_j^{(n)} - u_{j-1}^{(n)} - u_{j+1}^{(n)}) \right],$$

ce qui s'écrit encore, avec : $\lambda = \frac{k}{h^2}$:

$$(1 + 2\lambda)u_j^{(n+1)} - \lambda\theta u_{j-1}^{(n+1)} - \lambda\theta u_{j+1}^{(n+1)} = (1 - 2\lambda(1-\theta))u_j^{(n)} + \lambda(1-\theta)u_{j+1}^{(n)} + \lambda(1-\theta)u_{j-1}^{(n)}. \quad (2.17)$$

En discrétisant la condition initiale (mode de Fourier) on obtient $u_j^{(0)} = e^{ipjh}$ et on cherche le facteur d'amplification ξ_p tel que $u_j^1 = \xi_p u_j^0 = \xi_p e^{ipjh}$; en appliquant le schéma ci-dessus pour $n = 0$, on obtient :

$$(1 + 2\lambda\theta)\xi_p - \lambda\theta\xi_p[e^{-iph} + e^{iph}] = [1 - 2\lambda(1-\theta)] + \lambda(1-\theta)[e^{iph} + e^{-iph}]$$

et donc :

$$\xi_p = \frac{1 - 2\lambda(1-\theta) + 2\lambda(1-\theta)\cos ph}{(1 + 2\lambda\theta) - 2\lambda\cos ph} = \frac{1 - 4\lambda(1-\theta)\sin^2 ph/2}{1 + 4\lambda\theta\sin^2 \frac{ph}{2}}$$

Pour que le schéma soit stable au sens de Von Neumann, il faut que : $|\xi_p| < 1$ pour tout p , soit encore :

$$1 - 4\lambda(1-\theta)\sin^2 \frac{ph}{2} < 1 + 4\lambda\theta\sin^2 \frac{ph}{2} \quad (2.18)$$

et

$$4\lambda(1-\theta)\sin^2 \frac{ph}{2} - 1 < 1 + 4\lambda\theta\sin^2 \frac{ph}{2} \quad (2.19)$$

L'inégalité (2.18) est toujours vérifiée. En ce qui concerne l'inégalité (2.19), on distingue deux cas :

1. Si $\theta \leq \frac{1}{2}$ alors $0 \leq 1 - \theta \leq \theta$ et dans ce cas (2.19) est toujours vraie.
2. Si $\theta < \frac{1}{2}$, on veut :

$$4\lambda \left[(1-\theta)\sin^2 \frac{ph}{2} - \theta\sin^2 \frac{ph}{2} \right] < 2$$

Il faut donc que

$$\lambda < \frac{1}{2} \left\{ (1-2\theta)\sin^2 \frac{ph}{2} \right\}^{-1}$$

Une condition suffisante est donc :

$$\lambda \leq \frac{1}{2(1-2\theta)} \text{ si } \theta < \frac{1}{2}.$$

■

2.3.3 Convergence du schéma d'Euler implicite.

Prenons $\theta = 1$ dans le θ -schéma : on obtient le schéma d'Euler implicite :

$$(1 + 2\lambda)u_j^{(n+1)} - \lambda u_{j-1}^{(n+1)} - \lambda u_{j+1}^{(n+1)} = u_j^{(n)} \quad (2.20)$$

On rappelle que ce schéma est inconditionnellement stable au sens de Von Neumann. On va montrer de plus qu'il est L^∞ -stable :

Proposition 2.16 (Stabilité L^∞ pour Euler implicite) Si $(u_j^{(n)})_{j=1,\dots,N}$ est solution du schéma (2.20), alors :

$$\max_{j=1,\dots,N} u_j^{(n+1)} \leq \max_{j=1,\dots,N} u_j^{(n)} \leq \max_{j=1,\dots,N} u_j^{(0)} \quad (2.21)$$

de même :

$$\min_{j=1,\dots,N} u_j^{(n+1)} \geq \min_{j=1,\dots,N} u_j^{(n)} \geq \min_{j=1,\dots,N} u_j^{(0)} \quad (2.22)$$

Le schéma (2.20) est donc L^∞ stable.

Démonstration : Prouvons l'estimation (2.21), la preuve de (2.22) est similaire. Soit j_0 tel que $u_{j_0}^{(n+1)} = \max_{j=1,\dots,N} u_j^{(n+1)}$. Par définition du schéma d'Euler implicite (2.20), On a :

$$u_{j_0}^{(n)} = (1 + 2\lambda)u_{j_0}^{(n+1)} - \lambda u_{j_0-1}^{(n+1)} - \lambda u_{j_0+1}^{(n+1)}.$$

On en déduit : $u_{j_0}^{(n+1)} \leq \max_{j=1,\dots,N} u_j^{(n)}$, ce qui prouve que

$$\max_{j=1,\dots,N} u_j^{(n+1)} \leq \max_{j=1,\dots,N} u_j^{(n)}.$$

Donc le schéma (2.20) est L^∞ stable. ■

Théorème 2.17 Soit $e^{(n)}$ l'erreur de discrétisation, définie par

$$e_j^{(n)} = u(x_j, t_n) - u_j^{(n)} \text{ pour } j = 1, \dots, N.$$

Alors $\|e^{(n+1)}\|_\infty \leq \|e^{(0)}\|_\infty + TC(k + h^2)$. Si $\|e^{(0)}\|_\infty = 0$, le schéma est donc convergent (d'ordre 1 en temps et 2 en espace).

Démonstration : En utilisant la définition de l'erreur de consistance, on obtient :

$$(1 + 2\lambda)e_j^{(n+1)} - \lambda e_{j-1}^{(n)} - \lambda e_{j+1}^{(n)} = e_j^{(n)} + R_j^{(n)}$$

et donc :

$$\|e^{(n+1)}\|_\infty \leq \|e^{(n)}\|_\infty + kC(k + h^2)$$

On en déduit, par récurrence sur n , que :

$$\|e^{(n+1)}\|_\infty \leq \|e^{(0)}\|_\infty + TC(k + h^2)$$

d'où la convergence du schéma. ■

On peut montrer que le schéma saute-mouton (ou "Leap-frog")

$$\frac{u_j^{(n+1)} - u_j^{(n-1)}}{2k} = \frac{1}{h^2}(u_{j-1}^{(n)} - 2u_j^{(n)} + u_{j+1}^{(n)})$$

est d'ordre 2 en espace et en temps (voir exercice 31 page 75. Malheureusement il est aussi inconditionnellement instable. On peut le modifier pour le rendre stable, en introduisant le schéma de Dufort-Frankel, qui s'écrit :

$$\frac{u_j^{(n+1)} - u_j^{(n-1)}}{2k} = \frac{1}{h^2}(u_{j-1}^{(n)} - (u_j^{(n+1)} + u_j^{(n-1)}) + u_{j+1}^{(n)}).$$

Ce schéma est consistant et inconditionnellement stable (voir exercice 31 page 75).

2.4 Cas de la Dimension 2

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 , on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & x \in \Omega, t \in]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega \\ u(x, t) = g(t) & x \in \partial\Omega \quad \forall t \in]0, T[\end{cases}$$

Si le domaine est rectangulaire, ce problème se discrétise facilement à l'aide de θ schéma en temps et de différences finies en espace, en prenant un maillage rectangulaire. On peut montrer, comme dans le cas 1D, la consistance, la stabilité, la L^∞ stabilité, la stabilité au sens de Von Neumann

2.5 Exercices

Exercice 23 (Existence de solutions “presque classiques”) *Corrigé en page 81*

Soit $u_0 \in L^2(]0, 1[)$. On s'intéresse au problème :

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) &= 0, \quad x \in]0, 1[, \quad t \in \mathbb{R}_+^*, \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+^*, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in]0, 1[. \end{aligned} \quad (2.23)$$

1. On définit $u : [0, 1] \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{-n^2 \pi^2 t} a_n \sin(n\pi x), \quad x \in [0, 1], \quad t \in \mathbb{R}_+^*, \quad (2.24)$$

avec $a_n = (\int_0^1 u_0(x) \sin(n\pi x) dx) / (\int_0^1 \sin^2(n\pi x) dx)$.

Montrer que u est bien définie de $[0, 1] \times \mathbb{R}_+^*$ dans \mathbb{R} et est solution de (2.23) au sens suivant :

$$\begin{aligned} u &\in C^\infty([0, 1] \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}), \\ u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) &= 0, \quad \forall x \in [0, 1], \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \\ \|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^2(]0, 1[)} &\rightarrow 0, \quad \text{quand } t \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

2. Montrer qu'il existe une unique fonction u solution de (2.25).

Exercice 24 (Discrétisation par DF)

Soit $u_0 \in C(]0, 1[)$. On s'intéresse au problème :

$$\begin{aligned} u_t(x, t) + u_x(x, t) - u_{xx}(x, t) &= 0, \quad x \in]0, 1[, \quad t \in]0, T[, \\ u(0, t) &= a, \quad t \in \mathbb{R}_+^*, \\ u'(1, t) &= b \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in]0, 1[, \end{aligned} \quad (2.26)$$

avec $T > 0, a$ et $b \in \mathbb{R}$ donnés.

Ecrire une discrétisation espace-temps du problème (2.26) avec le schéma d'Euler explicite en temps et par différences finies avec un maillage uniforme en espace, en utilisant un schéma décentré amont pour le terme d'ordre 1 $u_x(x, t)$.

Exercice 25 (Exemple de schéma non convergent) *Suggestions en page 81, corrigé en page 83*

Soit $u_0 \in L^2(]-4, 4[)$. On note u l'unique solution (au sens vu en cours ou en un sens inspiré de l'exercice précédent) du problème suivant :

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) &= 0, \quad x \in]-4, 4[, \quad t \in]0, 1[, \\ u(-4, t) &= u(4, t) = 0, \quad t \in]0, 1[, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in]-4, 4[. \end{aligned} \quad (2.27)$$

On sait que la solution de (2.27) est de classe C^∞ sur $[-4, 4] \times]0, 1[$ (voir l'exercice précédent). On admettra que si $u_0 \geq 0$ p.p. sur $]-4, 4[$ et $u_0 \neq 0$ (dans $L^2(]-4, 4[)$) alors $u(x, t) > 0$ pour tout $x \in]-4, 4[$ et tout $t \in]0, 1[$.

On suppose maintenant que $u_0 \in C([-4, 4], \mathbb{R})$, $u_0(-4) = u_0(4) = 0$, $u_0 \geq 0$ sur $]-4, 4[$, u_0 nulle sur $[-3, 4]$ et qu'il existe $a \in]-4, -3[$ t.q. $u_0(a) > 0$. On a donc $u(x, t) > 0$ pour tout $x \in]-4, 4[$.

Avec les notations du cours, on considère la solution de (2.27) donnée par le schéma d'Euler explicite (2.2) avec le pas de temps $k = 1/(M + 1)$ et le pas d'espace $h = 8/(N + 1)$ ($M, N \in \mathbb{N}^*$, N impair). La solution approchée est définie par les valeurs u_i^n pour $i \in \{-(N + 1)/2, \dots, (N + 1)/2\}$ et $n \in \{0, \dots, M + 1\}$. La valeur u_i^n est censée être une valeur approchée de $\bar{u}_i^n = u(ih, nk)$.

1. Donner les équations permettant de calculer u_i^n pour $i \in \{-(N + 1)/2, \dots, (N + 1)/2\}$ et $n \in \{0, \dots, M + 1\}$.

2. On suppose maintenant que $k = h$. Montrer que $u_i^n = 0$ pour $i \geq 0$ et $n \in \{0, \dots, M+1\}$. En déduire que $\max\{|u_i^{M+1} - \bar{u}_i^{M+1}|, i \in \{-(N+1)/2, \dots, (N+1)/2\}\}$ ne tends pas vers 0 quand $h \rightarrow 0$ (c'est-à-dire quand $N \rightarrow \infty$).

Exercice 26 (Schéma implicite et principe du maximum)

1. Soient $T > 0, v \in C^1([0, 1], \mathbb{R}_+), a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in C([0, 1])$. On considère le problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) + v(x)u_x(x, t) = 0, & x \in]0, 1[, t \in]0, T[, \\ u(0) = a_0, u(1) = a_1, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (2.28)$$

dont on cherche à approcher la solution par différences finies. On choisit pour cela le schéma de la question 1 de l'exercice 5 pour la discrétisation en espace, et on discrétise par le schéma d'Euler implicite en temps avec un pas de temps uniforme $k = \frac{T}{P}$ où $P \geq 1$.

- 1.1 Ecrire le schéma ainsi obtenu et montrer qu'il admet une solution qu'on notera $U = (u_i^{(p)})_{i=1, \dots, N, p=1, \dots, P}$, où $u_i^{(p)}$ est censé être une approximation de $u(x_i, t_p)$, où $t_p = pk, p = 0, \dots, P$.

- 1.2 Montrer que

$$\min_{[0,1]}(\min u_0, \min(a_0, a_1)) \leq u_i^{(p)} \leq \max_{[0,1]}(\max u_0, \max(a_0, a_1)), \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, N \text{ et } p = 1, \dots, P.$$

2. Soit $T > 0$, et $u_0 \in C([0, 1])$. On considère maintenant le problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) + (vu)_x(x, t) = 0, & x \in]0, 1[, t \in]0, T[, \\ u(0) = a_0, u(1) = a_1, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (2.29)$$

dont on cherche à approcher la solution par différences finies. On choisit pour cela le schéma de la question 2 de l'exercice 6 pour la discrétisation en espace, et on discrétise par le schéma d'Euler implicite en temps avec un pas de temps uniforme $k = \frac{T}{P}$ où $P \geq 1$.

- 2.1 Ecrire le schéma ainsi obtenu et montrer qu'il admet une solution qu'on notera $U = (u_i^{(p)})_{i=1, \dots, N, p=1, \dots, P}$, où $u_i^{(p)}$ est censé être une approximation de $u(x_i, t_p)$, où $t_p = pk, p = 0, \dots, P$.

- 2.2 Montrer que si $a_0 \geq 0, a_1 \geq 0$ et $u_0 \geq 0$, alors on a : $u_i^{(p)} \geq 0$, pour tout $i = 1, \dots, N$ et $p = 1, \dots, P$.

3. On considère maintenant $\Omega =]0, 1[^2$; soient $v \in C^\infty(\Omega, (\mathbb{R}_+)^2)$ ($v(x)$ est donc un vecteur de \mathbb{R}^2), $a \in C(\partial\Omega, \mathbb{R})$ et $u_0 \in C(\Omega, \mathbb{R}_+)$. En s'inspirant des schémas étudiés aux questions 3 et 4, donner une discrétisation en espace et en temps des deux problèmes suivants (avec pas uniforme) :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + v \cdot \nabla u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = a, \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases} \quad (2.30)$$

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + \operatorname{div}(vu) = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = a, \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases} \quad (2.31)$$

Exercice 27 (Schémas explicites centré et décentré) Corrigé en page 84

- Soient $\alpha > 0, \mu > 0, T > 0$ et $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{cases} u_t(x, t) + \alpha u_x(x, t) - \mu u_{xx}(x, t) = 0, & x \in]0, 1[, t \in]0, T[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in]0, 1[. \end{cases} \quad (2.32)$$

On rappelle que $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ et $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. On suppose qu'il existe $u \in C^4([0, 1] \times [0, T])$ solution (classique) de (2.32) (noter que ceci implique $u_0(0) = u_0(1) = 0$). On pose $A = \min\{u_0(x), x \in [0, 1]\}$ et $B = \max\{u_0(x), x \in [0, 1]\}$ (noter que $A \leq 0 \leq B$).

On discrétise le problème (2.32). On reprend les notations du cours. Soient $h = 1/(N+1)$ et $k = T/M$ ($N, M \in \mathbb{N}^*$).

1. Schéma explicite décentré. Pour approcher la solution u de (2.32), on considère le schéma suivant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}(u_i^{n+1} - u_i^n) + \frac{\alpha}{h}(u_i^n - u_{i-1}^n) - \frac{\mu}{h^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) &= 0, \\ i \in \{1, \dots, N\}, n \in \{0, \dots, M-1\}, \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0, n \in \{1, \dots, M\}, \\ u_i^0 = u_0(ih), i \in \{0, \dots, N+1\}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

On pose $\bar{u}_i^n = u(ih, nk)$ pour $i \in \{0, \dots, N+1\}$ et $n \in \{0, \dots, M\}$.

- (Consistance) Montrer que l'erreur de consistance du schéma (2.33) est majorée par $C_1(k+h)$, où C_1 ne dépend que de u, T, α et μ .
- (Stabilité) Sous quelle condition sur k et h (cette condition peut dépendre de α et μ) a-t-on $A \leq u_i^n \leq B$ pour tout $i \in \{0, \dots, N+1\}$ et tout $n \in \{0, \dots, M\}$? Sous cette condition, en déduire $\|u^n\|_\infty \leq \|u_0\|_{L^\infty(]0,1])}$ pour tout $n \in \{0, \dots, M\}$ (avec $\|u^n\|_\infty = \max\{|u_i^n|, i \in \{0, \dots, N+1\}\}$)
- (Estimation d'erreur) On pose $e_i^n = \bar{u}_i^n - u_i^n$.
Sous la condition sur k et h trouvée précédemment, montrer que $|e_i^n| \leq C_2(k+h)$ pour tout $i \in \{0, \dots, N+1\}$ et tout $n \in \{0, \dots, M\}$ avec C_2 ne dépendant que de u, T, α et μ .

2. Schéma explicite centré.

On change dans le schéma (2.33) la quantité $(\alpha/h)(u_i^n - u_{i-1}^n)$ par $(\alpha/2h)(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$.

- (Consistance) Montrer que l'erreur de consistance est maintenant majorée par $C_3(k+h^2)$, où C_3 ne dépend que de u, T, α et μ .
- Reprendre les questions de stabilité et d'estimation d'erreur du schéma (2.33).

Exercice 28 (Discrétisation d'un problème parabolique.) *Suggestions en page 81.*

On s'intéresse à la discrétisation du problème parabolique :

$$\begin{cases} u_t + u_x - \alpha u_{xx} = 0 & (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times]0, T[\\ u(1, t) = u(0, t) = 0 & t \in]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in]0, 1[\end{cases} \quad (2.34)$$

où $u_0 \in C([0, 1])$ et $\alpha > 0$ sont donnés. On admettra que la solution de (2.34) existe est qu'elle est suffisamment régulière pour tous les développements de Taylor qu'on voudra effectuer.

1. Euler explicite

- Ecrire le schéma d'approximation de (2.34) par différences finies à pas constant (noté h , et tel que $Nh = 1$), centré en espace (c.à.d. en approchant $u'(ih)$ par $\frac{1}{2h}(u((i+1)h) - u((i-1)h))$ et $u''(ih)$ par $\frac{1}{h^2}(u((i+1)h) + u((i-1)h) - 2u(ih))$), et avec le schéma d'Euler explicite à pas constant (noté k , avec $T = Mk$) en temps.
- Montrer que l'erreur de consistance est majorée par $C(k+h^2)$, où C ne dépend que de la solution exacte de (2.34).
- Sous quelle(s) condition(s) sur k et h a-t-on le résultat de stabilité : $\|u^n\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty, \forall n \leq M$, où u^n désigne la solution approchée au temps $t_n = nk$?
- Donner un résultat de convergence pour ce schéma.

2. **Euler implicite** Mêmes questions qu'en 1. en remplaçant Euler explicite par Euler implicite.

3. Crank Nicolson

- En s'inspirant du schéma de Crank-Nicolson (vu en cours) construire un schéma d'ordre 2 (espace et temps).
- Sous quelle(s) condition(s) sur k et h a-t-on $\|u^n\|_2 \leq \|u^0\|_2, \forall n \leq M$?
- Donner un résultat de convergence pour ce schéma.

4. **Approximation décentrée amont.** Dans les schémas trouvés aux questions 1., 2. et 3. on remplace l'approximation de u_x par une approximation décentrée amont (c.à.d. qu'on approche $u'(ih)$ par $\frac{u(ih) - u((i-1)h)}{h}$).

- (a) Quel est l'ordre des schémas obtenus ?
 (b) Sous quelle(s) condition(s) sur k et h a-t'on $\|u^n\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty$ ou $\|u\|_2 \leq \|u^0\|_2, \forall n \leq M$?
 (c) Donner un résultat de convergence pour ces schémas.

Exercice 29 (Equation de diffusion reaction) *Suggestions en page 81, corrigé 88*

Soit u_0 une fonction donnée de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . On s'intéresse ici à la discrétisation du problème suivant :

$$u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) - u(t, x) = 0, t \in \mathbb{R}^+, x \in [0, 1], \quad (2.35)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, t \in \mathbb{R}_+^*; u(0, x) = u_0(x), x \in [0, 1]. \quad (2.36)$$

On note u la solution de (2.35), (2.36), et on suppose que u est la restriction à $\mathbb{R}_+ \times [0, 1]$ d'une fonction de classe C^∞ de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

Pour $h = \frac{1}{N+1}$ ($N \in \mathbb{N}^*$) et $k > 0$, on pose $x_i = ih, i \in \{0, \dots, N+1\}, t_n = nk, n \in \mathbb{N}, \bar{u}_i^n = u(x_i, t_n)$, et on note u_i^n la valeur approchée recherchée de \bar{u}_i^n .

On considère deux schémas numériques, (2.37)–(2.39) et (2.38)–(2.39) définis par les équations suivantes :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} - \frac{(u_{i+1}^{n+1} + u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1})}{h^2} - u_i^{n+1} = 0, n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, N\}, \quad (2.37)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} - \frac{(u_{i+1}^{n+1} + u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1})}{h^2} - u_i^n = 0, n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, N\}, \quad (2.38)$$

$$u_0^{n+1} = u_{N+1}^{n+1} = 0, n \in \mathbb{N}; u_i^0 = u_0(x_i), i \in \{0, \dots, N+1\}. \quad (2.39)$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u^n = (u_1^n, \dots, u_N^n) \in \mathbb{R}^N$.

- (Consistance) Soit $T > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, et $i \in \{1, \dots, N\}$, on note R_i^n l'erreur de consistance (définie en cours) du schéma numérique (2.37), (2.39) [resp. du schéma numérique (2.38), (2.39)]. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de u et T , t. q. $|R_i^n| \leq C(k + h^2)$, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, t. q. $kn \leq T$.
- Montrer que le schéma (2.37), (2.39) [resp. (2.38), (2.39)] demande, à chaque pas de temps, la résolution du système linéaire $Au^{n+1} = a$ [resp. $Bu^{n+1} = b$] avec $A, B \in \mathbb{R}^{N,N}$ et $a, b \in \mathbb{R}^N$ à déterminer.
Montrer que B est inversible (et même s.d.p.) pour tout $h > 0$ et $k > 0$. Montrer que A est inversible (et même s.d.p.) pour tout $h > 0$ et $k \in]0, 1[$.
- (Stabilité) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\|u^n\|_\infty = \sup_{i \in \{1, \dots, N\}} |u_i^n|$. Soit $T > 0$. On considère le schéma (2.38), (2.39). Montrer qu'il existe $C_1(T) \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de T , t. q. $\|u^n\|_\infty \leq C_1(T)\|u_0\|_\infty$, pour tout $h > 0, k > 0$, et $n \in \mathbb{N}$ tel que $kn \leq T$.
Soit $\alpha \in [0, 1]$. On considère le schéma (2.37), (2.39). Montrer qu'il existe $C_2(T, \alpha) \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de T et de α , t. q. $\|u^n\|_\infty \leq C_2(T, \alpha)\|u_0\|_\infty$, pour tout $h > 0, k \in]0, \alpha[$, et $n \in \mathbb{N}$ tel que $kn \leq T$.
- (Estimation d'erreur) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $i \in \{1, \dots, N\}$, on pose $e_i^n = \bar{u}_i^n - u_i^n$. Soit $T > 0$. Donner, pour $kn \leq T$, des majorations de $\|e^n\|_\infty$ en fonction de $T, C, C_1(T), C_2(T, \alpha)$ (définis dans les questions précédentes), k et h pour les deux schémas étudiés.

Exercice 30 (Discrétisation par VF)

Ecrire une discrétisation espace-temps du problème (2.26) de l'exercice 24 avec le schéma de Crank-Nicolson en temps, et par volumes finis avec un maillage uniforme en espace, en utilisant un schéma décentré amont pour le terme d'ordre 1 $u_x(x, t)$.

Exercice 31 (Schémas "saute-mouton" et Dufort-Frankel) *Corrigé en page 90*

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, x \in]0, 1[, t \in]0, T[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, t \in]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x), x \in]0, 1[. \end{cases} \quad (2.40)$$

Pour trouver une solution approchée de ((2.40)), on considère le schéma “saute-mouton” :

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^{(n-1)}}{2k} = \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{h^2}, & j = 1, \dots, N-1, n = 1, \dots, M-1, \\ u_0^{n+1} = u_{N+1}^{n+1} = 0, & n = 1, \dots, M-1, \end{cases} \quad (2.41)$$

où $(u_j^0)_{j=1, \dots, N}$ et $(u_j^1)_{j=1, \dots, N}$ sont supposés connus, $h = 1/N$, $k = T/M$.

1. Montrer que le schéma (2.41) est consistant. Quel est son ordre ?
2. Montrer que le schéma (2.41) est inconditionnellement instable au sens de Von Neumann.

On modifie “légèrement” le schéma (2.41) en prenant

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^{(n-1)}}{2k} = \frac{u_{j-1}^n - (u_j^{n+1} + u_j^{(n-1)}) + u_{j+1}^n}{h^2}, & j = 1, \dots, N, n = 1, \dots, M-1, \\ u_0^{n+1} = u_{N+1}^{n+1} = 0, & n = 1, \dots, M-1, \end{cases} \quad (2.42)$$

(schéma de Dufort-Frankel).

3. Montrer que le schéma (2.42) est consistant avec (2.40) quand $h, k \rightarrow 0$ sous la condition $\frac{k}{h} \rightarrow 0$.
4. Montrer que (2.42) est inconditionnellement stable.

Exercice 32 (Schéma de Gear)

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & \forall x \in]0, 1[, \forall t \in]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in]0, 1[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & \forall t \in]0, T[, \end{cases} \quad (2.43)$$

On suppose que $u_0 \in C(]0, 1[, \mathbb{R})$. On rappelle que dans ce cas, il existe une unique fonction $u \in C^2(]0, 1[\times]0, T[, \mathbb{R}) \cap C([0, 1] \times [0, T], \mathbb{R})$ qui vérifie (2.43). On cherche une approximation de la solution de ce problème, par une discrétisation par différences finies en espace et en temps. On se donne un ensemble de points $\{t_n, n = 1, \dots, M\}$ de l'intervalle $]0, T[$, et un ensemble de points $\{x_i, i = 1, \dots, N\}$. Pour simplifier, on considère un pas constant en temps et en espace. Soit $h = \frac{1}{N+1}$ le pas de discrétisation en espace, et $k = \frac{T}{M}$, le pas de discrétisation en temps. On pose alors $t_n = nk$ pour $n = 0, \dots, M$ et $x_i = ih$ pour $i = 0, \dots, N+1$. On cherche à calculer une solution approchée u_{app} du problème (2.43); plus précisément, on cherche à déterminer $u_{\text{app}}(x_i, t_n)$ pour $i = 1, \dots, N$, et $n = 1, \dots, M$. Les inconnues discrètes sont notées $u_i^{(n)}$, $i = 1, \dots, N$ et $n = 1, \dots, M$.

On considère le schéma suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{2k} \left(3u_i^{(n+1)} - 4u_i^{(n)} + u_i^{(n-1)} \right) + \frac{1}{h^2} (2u_i^{(n+1)} - u_{i-1}^{(n+1)} - u_{i+1}^{(n+1)}) = 0, & \begin{cases} i = 1, \dots, N, \\ n = 1, \dots, M, \end{cases} \\ u_i^0 = u_0(x_i), & i = 1, \dots, N, \\ u_i^1 = u_1(x_i), & i = 1, \dots, N, \\ u_0^{(n)} = u_{N+1}^{(n)} = 0, & \forall n = 1, \dots, M, \end{cases} \quad (2.44)$$

où $u_1(x_i) = u(x_i, k)$ est supposée connue.

1. Montrer que ce schéma est consistant d'ordre 2 en temps et en espace.

2. Montrer que le schéma s'écrit sous forme matricielle :

$$U^{n+1} = BW^n \quad (2.45)$$

$$\text{où } U^{n+1} = \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ \vdots \\ u_N^{n+1} \end{pmatrix}, B = (3Id + \frac{2k}{h^2}A)^{-1}, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

$$\text{et } W^n \text{ ne dépend que de } U^{n-1} = \begin{pmatrix} u_1^{n-1} \\ \vdots \\ u_N^{n-1} \end{pmatrix} \text{ et } U^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ \vdots \\ u_N^n \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Donner l'expression de W^n en fonction de U^{n-1} et U^n .

3. En posant

$$V^n = \begin{pmatrix} U^n \\ U^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2M},$$

mettre le schéma sous la forme

$$V^{n+1} = MV^n$$

(donner la matrice M en fonction de A).

4. Montrer que μ est valeur propre de M si et seulement si $\mu^2 - 4\beta\mu + \beta = 0$ où β est une valeur propre de la matrice B .

5. Montrer que les valeurs propres de la matrice M sont toutes de module strictement inférieur à 1.

6. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$, qui ne dépend pas de n , tel que $|U^n|_2 \leq C$, où $|\cdot|_2$ désigne la norme euclidienne dans \mathbb{R}^N .

Exercice 33 (Problème parabolique non linéaire) Corrigé en page 93

On se propose, dans cet exercice, de montrer l'existence d'une solution faible au problème (2.48)-(2.50), à partir de l'existence de la solution approchée donnée par un schéma numérique. L'inconnue de ce problème est la fonction u de $[0, 1] \times [0, T]$ dans \mathbb{R} , elle doit être solution des équations suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial x^2}(x, t) = v(x, t), \quad x \in]0, 1[, \quad t \in]0, T[, \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial \varphi(u)}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x}(1, t) = 0, \quad t \in]0, T[, \quad (2.49)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in]0, 1[, \quad (2.50)$$

où φ, v, T, u_0 sont donnés et sont t.q.

1. $T > 0, v \in L^\infty(]0, 1[\times]0, T[)$,
2. φ croissante, lipschitzienne de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ,
3. $u_0 \in L^\infty(]0, 1[)$ et $\varphi(u_0)$ lipschitzienne de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} .

Un exemple important est donné par $\varphi(s) = \alpha_1 s$ si $s \leq 0$, $\varphi(s) = 0$ si $0 \leq s \leq L$ et $\varphi(s) = \alpha_2(s - L)$ si $s \geq L$, avec α_1, α_2 et L donnés dans \mathbb{R}_+^* . Noter pour cet exemple que $\varphi' = 0$ sur $]0, L[$.

Les ensembles $]0, 1[$ et $D =]0, 1[\times]0, T[$ sont munis de leur tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue sur cette tribu.

On appelle "solution faible" de (2.48)-(2.50) une solution de :

$$u \in L^\infty(]0, 1[\times]0, T[), \quad (2.51)$$

$$\int_D (u(x, t) \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) + \varphi(u(x, t)) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x, t) + v(x, t) \psi(x, t)) dx dt + \int_{]0,1[} u_0(x) \psi(x, 0) dx = 0, \quad (2.52)$$

$$\forall \psi \in C_T^{2,1}(\mathbb{R}^2),$$

où $\psi \in C_T^{2,1}(\mathbb{R}^2)$ signifie que ψ est une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} deux fois continûment dérivable par rapport à x , une fois continûment dérivable par rapport à t et t.q. $\frac{\partial \psi}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(1, t) = 0$, pour tout $t \in [0, T]$ et $\psi(x, T) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Question 1 (Solution classique versus solution faible)

On suppose, dans cette question seulement, que φ est de classe C^2 , v est continue sur $[0, 1] \times [0, T]$ et u_0 est continue sur $[0, 1]$. Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On note encore u la restriction de u à $]0, 1[\times]0, T[$. Montrer que u est solution de (2.51)-(2.52) si et seulement si u vérifie (2.48)-(2.50) au sens classique (c'est-à-dire pour tout $(x, t) \in [0, 1] \times [0, T]$).

On cherche maintenant une solution approchée de (2.48)-(2.50).

Soient $N, M \in \mathbb{N}^*$. On pose $h = \frac{1}{N}$ et $k = \frac{T}{M}$. On va construire une solution approchée de (2.48)-(2.50) à partir de la famille $\{u_i^n, i = 1, \dots, N, n = 0, \dots, M\}$ (dont on va prouver l'existence et l'unicité) vérifiant les équations suivantes :

$$u_i^0 = \frac{1}{h} \int_{(i-1)h}^{ih} u_0(x) dx, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.53)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} - \frac{\varphi(u_{i-1}^{n+1}) - 2\varphi(u_i^{n+1}) + \varphi(u_{i+1}^{n+1})}{h^2} = v_i^n, \quad i = 1, \dots, N, n = 0, \dots, M-1, \quad (2.54)$$

avec $u_0^{n+1} = u_1^{n+1}$, $u_{N+1}^{n+1} = u_N^{n+1}$, pour tout $n = 0, \dots, M-1$ et $v_i^n = \frac{1}{kh} \int_{nk}^{(n+1)k} \int_{(i-1)h}^{ih} v(x, t) dx dt$, pour tout $i = 1, \dots, N$, pour tout $n = 0, \dots, M$.

Question 2 (Existence et unicité de la solution approchée)

Soit $n \in \{0, \dots, M-1\}$. On suppose connu $\{u_i^n, i = 1, \dots, N\}$. On va prouver dans cette question l'existence et l'unicité de $\{u_i^{n+1}, i = 1, \dots, N\}$ vérifiant (2.54) (avec $u_0^{n+1} = u_1^{n+1}$, $u_{N+1}^{n+1} = u_N^{n+1}$).

1. Soit $a > 0$, Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose $g_a(s) = s + a\varphi(s)$. Montrer que g_a est une application strictement croissante bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
2. Soit $\bar{w} = (\bar{w}_i)_{i=1, \dots, N} \in \mathbb{R}^N$. On pose $\bar{w}_0 = \bar{w}_1$ et $\bar{w}_{N+1} = \bar{w}_N$. Montrer qu'il existe un et un seul couple $(u, w) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $u = (u_i)_{i=1, \dots, N}$, $w = (w_i)_{i=1, \dots, N}$, t.q. :

$$\varphi(u_i) = w_i, \quad \text{pour tout } i \in \{1, \dots, N\}, \quad (2.55)$$

$$u_i + \frac{2k}{h^2} w_i = \frac{k}{h^2} (\bar{w}_{i-1} + \bar{w}_{i+1}) + u_i^n + kv_i^n, \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, N. \quad (2.56)$$

On peut donc définir une application F de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R}^N par $\bar{w} \mapsto F(\bar{w}) = w$ où w est solution de (2.55)–(2.56).

3. On munit \mathbb{R}^N de la norme usuelle $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que l'application F est strictement contractante. [On pourra utiliser la monotonie de φ et remarquer que, si $a = \varphi(\alpha)$ et $b = \varphi(\beta)$, on a $|\alpha - \beta| \geq (1/L)|a - b|$, où L ne dépend que de φ .]
4. Soit $\{u_i^{n+1}, i = 1, \dots, N\}$ solution de (2.54). On pose $w = (w_i)_{i=1, \dots, N}$, avec $w_i = \varphi(u_i^{n+1})$ pour $i \in \{1, \dots, N\}$. Montrer que $w = F(w)$.

5. Soit $w = (w_i)_{i=1,\dots,N}$ t.q. $w = F(w)$. Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$ il existe $u_i^{n+1} \in \mathbb{R}$ t.q. $w_i = \varphi(u_i^{n+1})$. Montrer que $\{u_i^{n+1}, i = 1, \dots, N\}$ est solution de (2.54).

6. Montrer qu'il existe une unique famille $\{u_i^{n+1}, i = 1, \dots, N\}$ solution de (2.54).

Question 3 (Estimation $L^\infty([0, 1[\times]0, T[)$ sur u)

On pose $A = \|u_0\|_{L^\infty([0,1])}$ et $B = \|v\|_{L^\infty([0,1[\times]0,T])}$. Montrer, par récurrence sur n , que $u_i^n \in [-A - nkB, A + nkB]$ pour tout $i = 1, \dots, N$ et tout $n = 0, \dots, M$. [On pourra, par exemple, considérer (2.54) avec i t.q. $u_i^{n+1} = \min\{u_j^{n+1}, j = 1, \dots, N\}$.]

En déduire qu'il existe $c_{u_0,v,T} \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\|u^n\|_{L^\infty([0,1])} \leq c_{u_0,v,T}$.

Question 4 (Estimation de la dérivée p.r. à x de $\varphi(u)$)

Montrer qu'il existe C_1 (ne dépendant que de T, φ, v et u_0) t.q., pour tout $n = 0, \dots, M - 1$,

$$\sum_{n=0}^{M-1} \sum_{i=1}^{N-1} (\varphi(u_{i+1}^{n+1}) - \varphi(u_i^{n+1}))^2 \leq C_1 \frac{h}{k}. \tag{2.57}$$

[Multiplier (2.54) par u_i^{n+1} et sommer sur i et sur n et utiliser l'inégalité $a^2 - ab \geq \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2}$.]

Question 5 (Estimation de la dérivée p.r. à t de $\varphi(u)$)

Montrer qu'il existe C_2 (ne dépendant que de T, φ, v et u_0) t.q.

$$\sum_{n=0}^{M-1} h \sum_{i=0}^{N+1} (\varphi(u_{i+1}^n) - \varphi(u_i^{n+1}))^2 \leq C_2 k. \tag{2.58}$$

et

$$\sum_{i=0}^{N+1} (\varphi(u_i^{n+1}) - \varphi(u_{i+1}^n))^2 \leq C_2 h, \text{ pour tout } n \in \{0, \dots, M\}. \tag{2.59}$$

[indication : multiplier (2.54) par $\varphi(u_{i+1}^{n+1}) - \varphi(u_i^n)$ et sommer sur i et n]

Dans la suite de l'exercice, il s'agit de passer à la limite (quand $N, M \rightarrow \infty$) pour trouver une solution de (2.48)-(2.50).

Pour $M \in \mathbb{N}^*$ donné, on prend $N = M^2$ (et donc h et k sont donnés et $k = T\sqrt{h}$), on définit (avec les u_i^n trouvés dans les questions précédentes) une fonction, u_h , sur $[0, 1] \times [0, T]$ en posant

$$u_h(x, t) = \frac{t - nk}{k} u_h^{(n+1)}(x) + \frac{(n+1)k - t}{k} u_h^{(n)}(x), \text{ si } t \in [nk, (n+1)k]$$

et

$$u_h^{(n)}(x) = u_i^n, \text{ si } x \in](i-1)h, ih[, i = 1, \dots, N, n = 0, \dots, M.$$

Enfin, on définit $\varphi(u_h)$ par $\varphi(u_h)(x, t) = \varphi(u_h(x, t))$.

Question 6 Montrer que les suites $(u_h)_{M \in \mathbb{N}^*}$ et $(\varphi(u_h))_{M \in \mathbb{N}^*}$ sont bornées dans $L^\infty([0, 1[\times]0, T[)$ (on rappelle que h est donné par M).

Question 7

Montrer qu'il existe C (ne dépendant que de T, φ, v et u_0) t.q. l'on ait, pour tout $M \in \mathbb{N}^*$:

1. Pour tout $t \in [0, T]$,

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(u_h)(x + \eta, t) - \varphi(u_h)(x, t)|^2 dx \leq C\eta,$$

pour tout $\eta \in \mathbb{R}_+^*$, avec $\varphi(u_h)(\cdot, t)$ prolongée par 0 hors de $[0, 1]$.

2. $\|\varphi(u_h)(\cdot, t) - \varphi(u_h)(\cdot, s)\|_{L^2([0,1])} \leq C|t - s|$, pour tout $t, s \in [0, T]$.

Une conséquence des questions 6 et 7 (que l'on admet ici est que l'on peut trouver une suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $u \in L^\infty([0, 1[\times]0, T[)$ telle que, en posant $u_n = u_{h_n}$ (on rappelle que $k_n = T\sqrt{h_n}$), l'on ait, quand $n \rightarrow \infty$,

1. $h_n \rightarrow 0$ et $k_n \rightarrow 0$,
2. $u_n \rightarrow u$ dans $L^\infty(]0, 1[\times]0, T[)$ pour la topologie faible-*,
3. $\varphi(u_n) \rightarrow \varphi(u)$ dans $L^p(]0, 1[\times]0, T[)$, pour tout $p \in [1, \infty[$.

Question 8 Montrer que la fonction u ainsi trouvée est solution de (2.51),(2.52).

Remarque. On peut aussi montrer l'unicité de la solution de (2.51),(2.52).

2.6 Suggestions pour les exercices

Exercice 25 (Exemple de schéma non convergent)

1. Ecrire le schéma d'Euler explicite.
2. Démontrer par récurrence que

$$\text{Si } n \in \{0, \dots, M+1\}, i \in \left\{ -\frac{N+1}{2}, \dots, \frac{N+1}{2} \right\} \text{ et } i \geq -\frac{N+1}{4} + n \text{ alors } u_i^n = 0.$$

En déduire que $u_i^n = 0$ pour $n \in \{0, \dots, M+1\}$ et $i \in \{0, \dots, \frac{N+1}{2}\}$ et conclure.

Exercice 28 (Discrétisation d'un problème parabolique)

1. Calculer l'erreur de consistance et la majorer par des développements de Taylor. Chercher ensuite les conditions pour que :

$$\|u^n\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty.$$

Pour étudier la convergence du schéma, majorer l'erreur de discrétisation : $e_j^n = \bar{u}_j^n - u_j^n$ où u_j^n est calculé par (2.70), et \bar{u}_j^n est la solution du problème (2.34) en $x_j = jh$ et $t_n = nk$.

Même chose pour les questions suivantes...

Exercice 29 (Problème de diffusion réaction)

1. Effectuer des développements de Taylor...
3. Montrer par récurrence que $\max_{j=1, \dots, N} u_j^n \leq (1+k)^n \max_{j=1, \dots, N} u_j^0$ et que $\min_{j=1, \dots, N} u_j^{(n)} \geq (1+k)^n \min_{j=1, \dots, N} u_j^{(0)}$.
4. Utiliser l'équation, le schéma, et l'erreur de consistance.

Exercice 31 (Schémas de Saute-Mouton et Dufort-Frankel)

1. Effectuer des développements de Taylor pour majorer l'erreur de consistance.
2. Montrer que le facteur d'amplification ξ_n obtenu par l'analyse de stabilité de Von Neumann satisfait :

$$\xi_{n+1} - \alpha \xi_n - \xi_{n-1} = 0, \quad n \geq 2.$$

Etudier ensuite les racines de l'équation $r^2 - \alpha r - 1 = 0$ et montrer que l'une de ses racines est, en module, supérieure à 1.

4. Reprendre la méthode développée à la question 2, en montrant que l'équation caractéristique pour ξ est maintenant :

$$p(r) = ar^2 + br + c = 0,$$

avec

$$a = \frac{1}{2k} + \frac{1}{h^2}, \quad b = -\frac{2 \cos(ph)}{h^2} \text{ et } c = \frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h}.$$

Etudier ensuite les racines de cette équation.

2.7 Corrigés des exercices

Exercice 23 page 72

On note $\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_{L^2(]0,1])}$.

- 1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_0^1 \sin^2(n\pi x) dx = \int_0^1 \frac{1 - \cos(2n\pi x)}{2} dx = \frac{1}{2},$$

et

$$\int_0^1 |u_0(x) \sin(n\pi x)| dx \leq \|u_0\|_2 \left(\int_0^1 \sin^2(n\pi x) dx \right)^{1/2} = \frac{r_2}{2} \|u_0\|_2.$$

La quantité a_n est donc bien définie et

$$|a_n| \leq r_2 \|u_0\|_2$$

Pour tout $t > 0$ et $x \in [0, 1]$, on a

$$|e^{-n^2\pi^2 t^2} a_n \sin(n\pi x)| \leq r_2 \|u_0\|_2 e^{-n^2\pi^2 t^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Ceci montre que la série $\sum_{n>0} e^{-n^2\pi^2 t^2} a_n \sin(n\pi x)$ est absolument convergente et donc que u est bien définie pour tout $t > 0$ et tout $x \in [0, 1]$ et même pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On remarque ensuite que u est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, en appliquant les théorèmes classiques de dérivation terme à terme d'une série. En effet, soit $\varepsilon > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t > \varepsilon$ on a

$$\left| e^{-n^2\pi^2 t^2} a_n \sin(n\pi x) \right| \leq r_2 \|u_0\|_2 e^{-n^2\pi^2 \varepsilon^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Comme $(x, t) \rightarrow e^{-n^2\pi^2 t^2} a_n \sin(n\pi t)$ est continue (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$), on en déduit que u est continue sur $\mathbb{R} \times]\varepsilon, \infty[$, et finalement sur $\mathbb{R} \times]0, \infty[$ car $\varepsilon > 0$ est arbitraire.

Pour dériver terme à terme la série définissant u , il suffit également d'obtenir sur $]\varepsilon, \infty[\times \mathbb{R}$ (pour tout $\varepsilon > 0$) une majoration du terme général de la série des dérivées par le terme général d'une série convergente (indépendant de $(x, t) \in \mathbb{R} \times]\varepsilon, \infty[$). On obtient cette majoration en remarquant que, pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times]\varepsilon, \infty[$,

$$| -n^2\pi^2 e^{-n^2\pi^2 t^2} a_n \sin(n\pi x) | \leq n^2\pi^2 e^{-n^2\pi^2 \varepsilon^2} r_2 \|u_0\|_2$$

On montre ainsi finalement que u est de classe C^1 par rapport à t et que

$$u_t(x, t) = \sum_{n>0} -n^2\pi^2 e^{-n^2\pi^2 t^2} a_n \sin(n\pi x), x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

En itérant ce raisonnement on montre que u est de classe C^∞ par rapport à t sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

Un raisonnement similaire montre que u est de classe C^∞ par rapport à x sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et que l'on peut dériver terme à terme la série définissant u . On obtient donc aussi

$$u_{xx}(xt) = \sum_{n>0} -n^2\pi^2 e^{-n^2\pi^2 t^2} a_n \sin(n\pi x), x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

et ceci donne $u_t = u_{xx}$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et donc aussi un $[0, 1] \times \mathbb{R}_+^*$. Le fait que $u(0, t) = u(1, t)$ pour tout $t > 0$ est immédiat car $\sin n\pi t = \sin 0 = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Il reste à montrer que $u(\cdot, t) \rightarrow u_0$ dans $L^2(]0, 1[)$ quand $t \rightarrow 0$.

On définit $e_n \in L^2(]0, 1[)$ par $e_n(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x)$. La famille $\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est une base hilbertienne de $L^2(]0, 1[)$.

On a donc :

$$\sum_{n=1}^N a_n \sin n\pi x \rightarrow u_0, \text{ dans } L^2(]0, 1[), \text{ quand } n \rightarrow \infty,$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 2 \|u_0\|_2^2.$$

On remarque maintenant que

$$u(x, t) - u_0(x) = u(x, t) - u^{(N)}(x, t) + u^{(N)}(xt) - u_0^{(N)}(x) - u_0^{(N)}(x) - u_0(x),$$

avec

$$u^{(N)}(x, t) = \sum_{n=1}^N a_n e^{-n^2\pi^2 t^2} \sin(n\pi x)$$

$$u_0^{(N)}(x) = \sum_{n=1}^N a_n \sin(n\pi x).$$

Il est clair que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a $u^{(N)}(\cdot, t) \rightarrow u_0^{(N)}$ uniformément sur \mathbb{R} , quand $N \rightarrow \infty$, et donc $u^{(N)}(\cdot, t) \rightarrow u_0^{(N)}$ dans $L^2(]0, 1[)$.

Comme

$$\|u(\cdot, t) - u^{(N)}(\cdot, t)\|_2^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n^2 \frac{1}{2} e^{-2n^2 \pi^2 t^2} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n^2 \frac{1}{2} = \|u_0^{(N)} - u_0\|_2^2 \rightarrow 0$$

quand $N \rightarrow \infty$, on en déduit que $u(\cdot, t) \rightarrow u_0$, $qdt \rightarrow 0$, dans $L^2(]0, 1[)$.

2) On note w la différence de 2 solutions de (2.25). On a donc

$$\begin{aligned} w &\in C^\infty([0, 1] \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \\ w_t - w_{xx} &= 0 \text{ sur } [0, 1] \times \mathbb{R}_+^* \\ w(0, t) = w(1, t) &= 0 \text{ pour } t > 0 \\ w(\cdot, t) &\rightarrow 0, \text{ dans } L^2(]0, 1[), \text{ quand } t \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Soit $0 < \varepsilon < T < \infty$. On intègre l'équation $ww_t - ww_{xx} = 0$ sur $]0, 1[\times]\varepsilon, T[$. En utilisant une intégration par parties (noter que $w \in C^\infty([0, 1] \times [\varepsilon, T])$), on obtient :

$$\frac{1}{2} \int_0^1 w^2(x, T) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 w^2(x, \varepsilon) dx + \int_0^1 \int_\varepsilon^T w_x^2(x, t) dx dt = 0.$$

D'où l'on déduit $\|w(\cdot, T)\|_2 \leq \|w(\cdot, \varepsilon)\|_2$. Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on a $\|w(\cdot, \varepsilon)\|_2 \rightarrow 0$, on a donc $\|w(\cdot, T)\|_2 = 0$ et donc, comme $w(\cdot, t)$ est contenue sur $[0, 1]$, $wX \in [0, 1]$. Comme $T > 0$ est arbitraire, on a finalement

$$w(x, t) = 0 \quad \forall t \in [0, 1], \forall t > 0$$

Ce qui montre bien l'unicité de la solution de (2.25).

Exercice 25 page 72

1) La formule pour calculer u_i^0 est :

$$u_1^0 = u_0(ih, 0), \quad i = -\frac{N+1}{2}, \dots, \frac{N+1}{2}$$

Soit maintenant $n \in \{0, \dots, M\}$. On a :

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= 0 \quad \text{pour} \quad i = -\frac{N+1}{2} \quad \text{et} \quad i = \frac{N+1}{2} \\ u_i^{n+1} &= u_i^n + \frac{k}{h^2} (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - 2u_i^n), \quad i = -\frac{N+1}{2} + 1, \dots, \frac{N+1}{2} - 1. \end{aligned}$$

2) On va montrer, par récurrence (finie) sur n , que :

$$\text{Si } n \in \{0, \dots, M+1\}, i \in \left\{ -\frac{N+1}{2}, \dots, \frac{N+1}{2} \right\} \text{ et } i \geq -\frac{N+1}{4} + n \text{ alors } u_i^n = 0. \quad (2.60)$$

Pour initialiser la récurrence, on suppose que $n = 0$ et $i \geq -\frac{N+1}{4}$. On a alors

$$ih \geq -\frac{N+1}{4} \quad \frac{8}{N+1} = -2 > -3$$

et donc $u_i^0 = 0$.

Soit maintenant $n \in \{0, \dots, M\}$. On suppose que l'hypothèse de récurrence est vérifiée jusqu'au rang n , et on démontre la propriété au rang $n+1$. Soit donc $i \in \left\{ -\frac{N+1}{2}, \dots, \frac{N+1}{2} \right\}$ tel que $i \geq -\frac{N+1}{4} + (n+1)$. Alors :

– Si $i = \frac{N+1}{2}$ on a bien $u_i^{N+1} = 0$.

– Si $i < \frac{N+1}{2}$, les indices $i-1$, i et $i+1$ sont tous supérieurs ou égaux à $-\frac{N+1}{4} + n$, et donc par hypothèse de récurrence,

$$u_i^{n+1} = u_i^n \left(1 - \frac{2k}{h^2}\right) + \frac{k}{h^2} u_{i+1}^n + \frac{k}{h^2} u_{i-1}^n = 0.$$

On a donc bien démontré (2.60). On utilise maintenant l'hypothèse $k = h$, c'est-à-dire $\frac{1}{M+1} = \frac{8}{N+1}$. On a alors

$$-\frac{N+1}{4} + M+1 = -2(M+1) + M+1 = -(M+1) < 0.$$

On en déduit que si $n \in \{0, \dots, M+1\}$ et $i \geq 0$, alors $i \geq -\frac{N+1}{4} + n$. On en déduit que $u_i^n = 0$ pour $n \in \{0, \dots, M+1\}$ et $i \in \{0, \dots, \frac{N+1}{2}\}$. On remarque alors que

$$\begin{aligned} \max \left\{ |u_i^{M+1} - \bar{u}_i^{M+1}|, i \in \left\{ -\frac{N+1}{2}, \dots, \frac{N+1}{2} \right\} \right\} &\geq \max \left\{ |\bar{u}_i^{M+1}|, i \in \left\{ 0, \dots, \frac{N+1}{2} \right\} \right\} \\ &\geq \inf_{[0,4]} u(x, 1) > 0, \end{aligned}$$

et donc ne tend pas vers 0 quand $h \rightarrow 0$.

Exercice 27 page 73 : schéma implicite et principe du maximum

1. Schéma explicite décentré

(a) Par définition, l'erreur de consistance en (x_i, t_n) s'écrit : On s'intéresse ici à l'ordre du schéma au sens des différences finies. On suppose que $u \in C^4([0, 1] \times [0, T])$ est solution de (2.32) et on pose

$$\bar{u}_i^n = u(ih, nk), \quad i = 0, \dots, N, \quad k = 0, \dots, M.$$

Pour $i = 1, \dots, N-1$ et $k = 1, \dots, M-1$, l'erreur de consistance en (x_i, t_k) est définie par :

$$R_i^n = \frac{1}{k}(\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n) - \frac{\alpha}{h}(\bar{u}_i^n - \bar{u}_{i-1}^n) - \frac{\mu}{h^2}(\bar{u}_{i-1}^n - 2\bar{u}_i^n + \bar{u}_{i+1}^n). \quad (2.61)$$

Soit $i \in \{1, \dots, N-1\}$, $k \in \{1, \dots, M-1\}$. On cherche une majoration de R_i^n en utilisant des développements de Taylor. En utilisant ces développements, on obtient qu'il existe $(\xi_\ell, t_\ell) \in [0, 1] \times [0, T]$, $\ell = 1, \dots, 4$, t.q. :

$$\bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^n + k u_t(ih, nk) + \frac{k^2}{2} u_{tt}(\xi_1, t_1), \quad (2.62)$$

$$\bar{u}_{i-1}^n = \bar{u}_i^n - h u_x(ih, nk) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(\xi_2, t_2), \quad (2.63)$$

$$\bar{u}_{i-1}^n = \bar{u}_i^n - h u_x(ih, nk) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(ih, nk) - \frac{h^3}{6} u_{xxx}(ih, nk) - \frac{h^4}{24} u_{xxxx}(\xi_3, t_3), \quad (2.64)$$

$$\bar{u}_{i+1}^n = \bar{u}_i^n + h u_x(ih, nk) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(ih, nk) + \frac{h^3}{6} u_{xxx}(ih, nk) + \frac{h^4}{24} u_{xxxx}(\xi_4, t_4). \quad (2.65)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} R_i^n &= u_t(ih, nk) + \frac{k}{2} u_{tt}(\xi_1, t_1) + \alpha u_x(ih, nk) + \alpha \frac{h}{2} u_{xx}(\xi_2, t_2) \\ &\quad - \mu u_{xx}(ih, nk) - \mu \frac{h^2}{24} (u_{xxx}(\xi_3, t_3) + \mu u_{xxxx}(\xi_4, t_4)), \end{aligned}$$

et donc, comme u est solution de (2.32), pour h assez petit, on a :

$$|R_i^n| \leq C_1(h + k),$$

où C_1 ne dépend que de u . Le schéma (2.33) est donc consistant d'ordre 1 en temps et en espace.

- (b) Cherchons les conditions pour que u_i^{n+1} s'écrive comme combinaison convexe de u_i^n , u_{i-1}^n et u_{i+1}^n . On peut réécrire le schéma (2.33) :

$$u_i^{n+1} = au_i^n + bu_{i+1}^n + cu_{i-1}^n, \text{ avec } a = 1 - \frac{\alpha k}{h} - \frac{2\mu k}{h^2}, b = \frac{\mu k}{h^2} \text{ et } c = \frac{\alpha k}{h} + \frac{\mu k}{h^2}.$$

Il est facile de voir que $a + b + c = 1$, et que $b \geq 0$, $c \geq 0$. Il reste à vérifier que $a \geq 0$; pour cela, il faut et il suffit que $\frac{\alpha k}{h} + \frac{2\mu k}{h^2} \leq 1$. Cette condition s'écrit encore :

$$k \leq \frac{h^2}{\alpha h + 2\mu}. \quad (2.66)$$

Si h et k vérifient la condition (2.66), on pose : $M^n = \max_{i=1\dots N} u_i^n$ (resp. $m^n = \min_{i=1\dots N} u_i^n$). Comme u_i^{n+1} est une combinaison convexe de u_i^n , u_{i-1}^n et u_{i+1}^n , on a alors : $u_i^{n+1} \leq M^n \quad \forall i = 1, \dots, N$ (resp. $u_i^{n+1} \geq m^n \quad \forall i = 1, \dots, N$) et donc : $M^{n+1} \leq M^n$ (resp. $m^{n+1} \geq m^n$). On a ainsi montré que :

$$\|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^n\|_\infty.$$

On a de même :

$$\|u^n\|_\infty \leq \|u^{n-1}\|_\infty.$$

⋮

$$\|u^1\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty.$$

En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\|u^n\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty.$$

Donc, sous la condition (2.66), on a $\|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^n\|_\infty$ et donc $\|u^n\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty$, pour tout $n = 1, \dots, N$.

- (c) En retranchant l'égalité (2.61) au schéma (2.33), on obtient l'équation suivante sur e_i^n :

$$\frac{1}{k}(e_i^{n+1} - e_i^n) + \frac{\alpha}{h}(e_i^n - e_{i-1}^n) - \frac{\mu}{h^2}(e_{i-1}^n - 2e_i^n + e_{i+1}^n) = R_i^n.$$

ce qu'on peut encore écrire :

$$e_i^{n+1} = \left(1 - \frac{k\alpha}{h} - 2\frac{k\mu}{h^2}\right)e_i^n + e_{i-1}^n \frac{k\mu}{h^2} + kR_i^n. \quad (2.67)$$

Sous la condition de stabilité (2.66), on obtient donc :

$$\begin{aligned} |e_i^{n+1}| &\leq \|e^{n+1}\|_\infty + C_1(k+h)k, \\ |e_i^n| &\leq \|e^{n-1}\|_\infty + C_1(k+h)k, \\ &\vdots \\ |e_i^1| &\leq \|e^0\|_\infty + C_1(k+h)k, \end{aligned}$$

Si à $t = 0$, on a $\|e^0\| = 0$, alors on éduit des inégalités précédentes que $|e_i^n| \leq C_1 T(k+h)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le schéma est donc convergent d'ordre 1.

2. Schéma explicite centré.

- (a) (Consistance) En utilisant les développements de Taylor (2.62) (2.64) et (2.65), et les développements suivants :

$$\bar{u}_{i-1}^n = \bar{u}_i^n - hu_x(ih, nk) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(ih, nk) - \frac{h^3}{6}u_{xxx}(\xi_5, t_5),$$

$$\bar{u}_{i+1}^n = \bar{u}_i^n + hu_x(ih, nk) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(ih, nk) + \frac{h^3}{6}u_{xxx}(\xi_6, t_6),$$

on obtient maintenant :

$$R_i^n = u_t(ih, nk) + \frac{k}{2}u_{tt}(\xi_1, t_1) + \alpha u_x(ih, nk) + \alpha \frac{h^2}{12}(u_{xxx}(\xi_5, t_5) + \mu u_{xxx}(\xi_6, t_6)) \\ - \mu u_{xx}(ih, nk) - \mu \frac{h^2}{24}(u_{xxxx}(\xi_3, t_3) + \mu u_{xxxx}(\xi_4, t_4)),$$

On en déduit que

$$|R_i^n| \leq C_3(k + h^2),$$

où $C_3 = \max(\frac{1}{2}\|u_{tt}\|_\infty, \frac{1}{6}\|u_{xxx}\|_\infty, \frac{1}{12}\|u_{xxxx}\|_\infty)$.

(b) Le schéma s'écrit maintenant :

$$u_i^{n+1} = \tilde{a}u_i^n + \tilde{b}u_{i+1}^n + \tilde{c}u_{i-1}^n, \text{ avec } \tilde{a} = 1 - \frac{2\mu k}{h^2}, \tilde{b} = \frac{\mu k}{h^2} - \frac{\alpha k}{h} \text{ et } \tilde{c} = \frac{\mu k}{h^2} + \frac{\alpha k}{h}.$$

Remarquons que l'on a bien : $\tilde{a} + \tilde{b} + \tilde{c} = 1$. Pour que u_i^{n+1} soit combinaison convexe de u_i^n , u_{i+1}^n et u_{i-1}^n , il faut et il suffit donc que $\tilde{a} \geq 0$, $\tilde{b} \geq 0$, et $\tilde{c} \geq 0$. L'inégalité $\tilde{c} \geq 0$ est toujours vérifiée. Les deux conditions qui doivent être vérifiées par h et k s'écrivent donc :

i. $\tilde{a} \geq 0$, i.e. $1 - \frac{2\mu k}{h^2} \geq 0$, soit encore

$$k \leq \frac{h^2}{2\mu}.$$

ii. $\tilde{b} \geq 0$ i.e. $\frac{\mu k}{h^2} - \frac{\alpha k}{h} \geq 0$, soit encore

$$h \leq \frac{\mu}{2\alpha}.$$

Le schéma centré est donc stable sous les deux conditions suivantes :

$$h \leq \frac{\mu}{2\alpha} \text{ et } k \leq \frac{1}{2\mu}h^2. \quad (2.68)$$

Pour obtenir une borne d'erreur, on procède comme pour le schéma (2.33) : on soustrait la définition de l'erreur de consistance au schéma numérique, et on obtient :

$$e_i^{n+1} = \tilde{a}e_i^n + \tilde{b}e_{i+1}^n + \tilde{c}e_{i-1}^n + kR_i^n. \quad (2.69)$$

Par le même raisonnement que pour le schéma décentré, on obtient donc que si $e_i^0 = 0$, on a $|e_i^n| \leq C_4(k + h^2)$, avec $C_4 = TC_3$.

Exercice 28 page 74

1. On admettra que la solution de (2.34) existe est qu'elle est assez régulière. Soient $M \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}^*$, et soient k le pas de temps, choisi tel que $Mk = T$ et h le pas espace, choisi tel que $Nh = 1$. On applique un schéma d'Euler explicite en temps, et un schéma de différences finies centré en espace, on obtient donc :

$$u_j^{n+1} = k \left[\frac{1}{k}u_j^n - \frac{1}{2h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\varepsilon}{h^2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n) \right] \quad (2.70)$$

On tient compte des conditions aux limites et des conditions initiales en posant :

$$\begin{cases} u_0^n = u_{N+1}^n = 0, \\ u_0^j = u_0(jh). \end{cases}$$

On a, par développement de Taylor :

$$u(x+h, t) = u(x, t) + hu_x(x, t) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x, t) + \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x, t) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\alpha, t), \\ u(x-h, t) = u(x, t) - hu_x(x, t) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x, t) - \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x, t) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\beta, t), \\ u(x, t+k) = u(x, t) + ku_t(x, t) + \frac{k^2}{2}u_{tt}(x, \tau_k), \tau_k \in [t, t+k].$$

De ces développements de Taylor, il ressort que l'erreur de consistance vérifie $|R| \leq C(k + h^2)$, où C ne dépend que de u . Le schéma est donc explicite d'ordre 1 en temps et 2 en espace.

Cherchons alors les conditions pour que :

$$\|u^n\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty.$$

Par définition,

$$\|u^n\|_\infty = \max_{j=1,\dots,N} |u_j^n|.$$

On essaye d'abord de vérifier que : $\|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^n\|_\infty$, c'est-à-dire :

$$\max_{j=1,\dots,N} |u_j^{n+1}| \leq \max_{j=1,\dots,N} |u_j^n|,$$

On veut donc montrer que

$$\begin{cases} \max_{j=1,\dots,N} u_j^{n+1} \leq \max_{j=1,\dots,N} u_j^n, \\ \min_{j=1,\dots,N} u_j^{n+1} \geq \min_{j=1,\dots,N} u_j^n. \end{cases}$$

On peut réécrire le schéma (2.70) :

$$u_j^{n+1} = u_j^n \left(1 - \frac{2\varepsilon k}{h^2}\right) + u_{j+1}^n \left(-\frac{k}{2h} + \frac{k\varepsilon}{h^2}\right) + u_{j-1}^n \left(\frac{\varepsilon k}{h^2} + \frac{k}{2h}\right).$$

Posons :

$$M^n = \max_{j=1,\dots,N} u_j^n$$

Supposons que k et h vérifient :

$$1 \geq \frac{2\varepsilon k}{h^2} \text{ et } \frac{k\varepsilon}{h^2} - \frac{k}{2h} \geq 0,$$

ce qui s'écrit encore :

$$\begin{cases} \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2\varepsilon} \\ k \leq \frac{2\varepsilon}{h}, \end{cases} \quad (2.71)$$

on a alors :

$$u_j^{n+1} \leq M^n \left(1 - \frac{2\varepsilon k}{h^2}\right) + M^n \left(-\frac{k}{2h} + \frac{k\varepsilon}{h^2}\right) + M^n \left(\frac{\varepsilon k}{h^2} + \frac{k}{2h}\right) \quad \forall j = 1, \dots, N,$$

et donc :

$$M^{n+1} \leq M^n.$$

Posons maintenant :

$$m^n = \min_{j=1,\dots,N} u_j^n.$$

Si k et h satisfont les conditions (2.71), on obtient de la même manière

$$m^{n+1} \geq m^n$$

On a ainsi montré que :

$$\|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^n\|_\infty.$$

On a de même :

$$\|u^n\|_\infty \leq \|u^{n-1}\|_\infty.$$

⋮

$$\|u^1\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty.$$

En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\|u^n\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty.$$

Donc, sous les conditions (2.71), on a $\|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^n\|_\infty$ et donc $\|u^n\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty$, pour tout $n = 1, \dots, N$.

Pour étudier la convergence du schéma, on va tenter de majorer l'erreur de discrétisation :

$$e_j^n = \bar{u}_j^n - u_j^n,$$

où u_j^n est calculé par (2.70), et \bar{u}_j^n est la solution du problème (2.34) en $x_j = jh$ et $t_n = nk$.

On a donc, par définition de l'erreur de consistance,

$$\frac{1}{k}(\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n) + \frac{1}{2h}(\bar{u}_{j+1}^n - \bar{u}_{j-1}^n) - \frac{\varepsilon}{h^2}(-2\bar{u}_j^n + \bar{u}_{j+1}^n + \bar{u}_{j-1}^n) = R_j^n$$

où $|R_i^n| \leq C(k + h^2)$

ce qui entraîne :

$$\frac{1}{k}(e_j^{n+1} - e_j^n) + \frac{1}{2h}(e_j^n - e_{j-1}^n) - \frac{\varepsilon}{h^2}(-2e_j^n + e_{j+1}^n + e_{j-1}^n) = R_j^n$$

soit encore :

$$e_j^{n+1} = \left(1 - \frac{2\varepsilon k}{h^2}\right) e_j^n + \left(-\frac{k}{2h} + \frac{k\varepsilon}{h^2}\right) e_{j+1}^n + \left(\frac{\varepsilon k}{h^2} + \frac{k}{2h}\right) e_{j-1}^n + kR_j^n.$$

de même que précédemment, on obtient sous les conditions (2.71)

$$\begin{aligned} |e_j^{n+1}| &\leq \|e^n\|_\infty + C(k + h^2)k \\ &\vdots \\ |e_j^n| &\leq \|e^{n-1}\|_\infty + C(k + h^2)k \\ &\vdots \\ |e_j^1| &\leq \|e^0\|_\infty + C(k + h^2)k. \end{aligned}$$

Et donc en sommant ces inégalités :

$$\|e^n\|_\infty \leq \|e^0\|_\infty + nCk(k + h^2)$$

Si à $t = 0$ on a $\|e^0\|_\infty = 0$, alors :

$$\|e^{n+1}\|_\infty \leq CMk(k + h^2) = T(k + h^2).$$

Et donc sous les conditions (2.71) on a $\|e^n\|_\infty$ qui tend vers 0 lorsque $k, h \rightarrow 0$, ce qui prouve que le schéma est convergent.

Exercice 29 page 75

1. Notons $R_i^{(n)}$ l'erreur de consistance en (x_i, t_n) . Pour le schéma (2.37), on a donc par définition :

$$\begin{aligned} R_i^{(n)} &= \frac{\bar{u}_i^{(n+1)} - \bar{u}_i^{(n)}}{k} + \frac{1}{h^2}(2\bar{u}_i^{(n+1)} - \bar{u}_{i-1}^{(n+1)} - \bar{u}_{i+1}^{(n+1)}) - \bar{u}_i^{(n+1)} \\ &= \tilde{R}_i^{(n)} + \hat{R}_i^n, \end{aligned}$$

où

$$\tilde{R}_i^n = \frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n}{k} - u_t(x_i, t_n) \text{ est l'erreur de consistance en temps}$$

et

$$\hat{R}_i^n = \frac{1}{h^2}(2\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_{i-1}^{n+1} - \bar{u}_{i+1}^{n+1}) - (u_{xx}(x_i, t_n)) \text{ est l'erreur de consistance en espace.}$$

On a vu (voir (1.30)) que

$$\left| \hat{R}_i^n \right| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{[0,1]} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\cdot, t_n) \right|, \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

Effectuons maintenant un développement de Taylor en fonction du temps d'ordre 2 :

$$u(x_i, t_{n+1}) = u(x_i, t_n) + ku_t + \frac{k^2}{2}u_{tt}(x_i, \xi_n)$$

avec $\xi_n \in [t_n, t_{n+1}]$. Donc $\frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{k} - u_t = \frac{k}{2}u_{tt}(x_i, \xi_n)$. Comme $\xi_n \in [0, T]$, et u_{tt} admet un maximum (à x_i fixé) dans $[0, T]$ (qui est compact), on a donc

$$\left| \tilde{R}_i^n \right| \leq \frac{k}{2} \max_{[0, T]} |u_{tt}(x_i, \cdot)|.$$

Par conséquent,

$$|R_i^n| = \left| \tilde{R}_i^n + \hat{R}_i^n \right| \leq \left| \tilde{R}_i^n \right| + \left| \hat{R}_i^n \right| \leq \frac{k}{2} \max_{[0, T]} |u_{tt}(x_i, \cdot)| + \frac{h^2}{12} \max_{[0, 1]} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\cdot, t_{n+1}) \right|.$$

Donc $|R_i^n| \leq C(k + h^2)$ avec

$$C = \frac{1}{2} \max \left(\|u_{tt}\|_{L^\infty([0, 1] \times [0, T])}; \frac{1}{6} \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right\|_{L^\infty([0, 1] \times [0, T])} \right).$$

Le calcul de l'erreur de consistance pour le schéma (2.38) s'effectue de manière semblable.

2. Le schéma (2.37) est complètement implicite alors que le schéma (2.38) ne l'est que partiellement, puisque le terme de réaction est pris à l'instant n . Le schéma (2.37) s'écrit : $AU^{n+1} = U^n$ avec $U^{n+1} = (U_1^{n+1}, \dots, U_N^{n+1})$, $U^n = (U_1^n, \dots, U_N^n)$, et

$$A = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda - k & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1 + 2\lambda - k & -\lambda & \ddots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & & 1 + 2\lambda - k \end{pmatrix}$$

où $\lambda = \frac{k}{h^2}$. Notons que par définition, A est symétrique. De même, le schéma (2.38) s'écrit : $BV^{n+1} = U^n$ avec

$$B = \frac{1}{1+k} \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 + 2\lambda & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & -1 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & -1 & & 1 + 2\lambda \end{pmatrix}$$

On a donc $A = \lambda A_h$, où A_h est définie en (1.26) page 13, avec $c_i = \frac{1-k}{\lambda}$, et $B = \frac{\lambda}{k+1} A_h$ avec $c_i = \frac{1}{\lambda}$. Dans les deux cas, les matrices sont donc s.d.p. en vertu de la proposition 1.3 page 13. Notons que l'hypothèse $k \in]0, 1[$ est nécessaire dans le cas du premier schéma, pour assurer la positivité de c_i .

3. Le schéma (2.38) s'écrit

$$(1+k)u_i^n = u_i^{n+1} + \lambda(2u_i^{n+1} - u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}).$$

On montre facilement par récurrence que $\max_{j=1, \dots, N} u_j^n \leq (1+k)^n \max_{j=1, \dots, N} u_j^0$, (voir preuve de la stabilité L^∞ d'Euler implicite page 70) et que $\min_{j=1, \dots, N} u_j^{(n)} \geq (1+k)^n \min_{j=1, \dots, N} u_j^{(0)}$. On en déduit que

$$\|u^{(n)}\|_\infty \leq (1+k)^n \|u_0\|_\infty$$

Or $(1+k)^n \leq (1+k)^{T/k}$ car $kn \leq T$. Or

$$\begin{aligned} (1+k)^{T/k} &= \exp\left(\frac{T}{k} \ln(1+k)\right) \\ &\leq \exp\left(\frac{T}{k} k\right) = e^T \end{aligned}$$

On en déduit le résultat, avec $C_1(T) = e^T$. De même, pour le schéma (2.37), on montre par récurrence que :

$$\|u^{(n)}\|_\infty \leq \frac{1}{(1-k)^n} \|u^{(0)}\|.$$

Mais pour $k \in]0, \alpha[$, avec $\alpha \in]0, 1[$, on a :

$$\frac{1}{(1-k)} \leq 1 + \beta k, \text{ avec } \beta = \frac{1}{(1-\alpha)}.$$

On en déduit par un calcul similaire au précédent que

$$(1-k)^{T/k} \leq e^{\beta T},$$

d'où le résultat avec $C_2(T, \alpha) = e^{\beta T}$.

4. Par définition de l'erreur de consistance, on a pour le schéma (2.37)

$$\frac{\bar{u}_j^{(n+1)} - \bar{u}_j^n}{k} - \frac{\bar{u}_{j+1}^{(n+1)} + \bar{u}_{j-1}^{n+1} - 2\bar{u}_j^{(n+1)}}{h^2} - \bar{u}_j^{n+1} = R_i^{(n,1)}$$

et donc, en notant $e_j^{(n)} = \bar{u}_j^n - u_j^{(n)}$ l'erreur de discrétisation en (x_j, t_n) , on a :

$$e_j^{(n+1)}(1 + 2\lambda - k) - \lambda e_{j-1}^{(n+1)} - \lambda e_{j+1}^{(n+1)} = e_j^{(n)} + kR_j^{(n,1)}$$

On obtient donc, de manière similaire à la question 3 :

(en considérant $e_{j_0}^{(n+1)} = \max e_j^{(n+1)}$ puis $e_{j_0}^{(n+1)} = \min e_j^{(n+1)}$)

$$\frac{1}{1-k} \|e^{(n+1)}\| \leq \|e^{(n)}\| + kC(k + h^2).$$

Par récurrence sur n , on obtient alors

$$\|e^{(n)}\|_\infty \leq \left(\frac{1}{1-k}\right)^n [kC(k + h^2) + \|e^0\|_\infty]$$

d'où

$$\|e^{(n)}\|_\infty \leq C_2(T, \alpha)(TC(k + h^2) + \|e^0\|_\infty).$$

De même, pour le schéma (2.38), on écrit l'erreur de consistance :

$$\frac{\bar{u}_j^{(n+1)} - \bar{u}_j^n}{k} - \frac{u_{j+1}^{(n+1)} + \bar{u}_{j-1}^{n+1} - 2\bar{u}_j^{(n+1)}}{h^2} - \bar{u}_j^n = R_j^{(n,2)}$$

et donc :

$$e_j^{(n+1)}(1 + 2\lambda) - \lambda e_{j-1}^{(n+1)} - \lambda e_{j+1}^{(n+1)} = e_j^{(n)}(1 + k) + kR_j^{(n,2)}.$$

Par des raisonnements similaires à ceux de la question 3 on obtient alors :

$$\|e_j^{(n)}\| \leq (1+k)^n (\|e^{(0)}\| + kC(k + h^2))$$

d'où

$$\|e^{(n)}\|_\infty \leq C_1(T)(\|e^{(0)}\| + kC(k + h^2)).$$

Exercice 31 page 75

1. On s'intéresse ici à l'ordre du schéma au sens des différences finies. On suppose que $u \in C^4([0, 1] \times [0, T])$ est solution de (2.40) et on pose

$$\bar{u}_j^n = u(jh, nk), \quad j = 0, \dots, N, \quad k = 0, \dots, M.$$

L'erreur de consistance est définie par :

$$R_j^n = \frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^{n-1}}{2k} - \frac{\bar{u}_{j-1}^n - 2\bar{u}_j^n + \bar{u}_{j+1}^n}{h^2}, j = 1, \dots, N-1, k = 1, \dots, M-1.$$

On cherche une majoration de R_j^n en utilisant des développements de Taylor. Soit $j \in \{1, \dots, N-1\}$, $k \in \{1, \dots, M-1\}$. Il existe $(\xi_i, t_i) \in [0, 1] \times [0, T]$, $i = 1, \dots, 4$, t.q. :

$$\bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_j^n + ku_t(jh, nk) + \frac{k^2}{2}u_{tt}(jh, nk) + \frac{k^3}{6}u_{ttt}(\xi_1, t_1),$$

$$\bar{u}_j^{n-1} = \bar{u}_j^n - ku_t(jh, nk) + \frac{k^2}{2}u_{tt}(jh, nk) - \frac{k^3}{6}u_{ttt}(\xi_2, t_2),$$

$$\bar{u}_{j-1}^n = \bar{u}_j^n - hu_x(jh, nk) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(jh, nk) - \frac{h^3}{6}u_{xxx}(jh, nk) - \frac{h^4}{24}u_{xxxx}(\xi_3, t_3),$$

$$\bar{u}_{j+1}^n = \bar{u}_j^n + hu_x(jh, nk) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(jh, nk) + \frac{h^3}{6}u_{xxx}(jh, nk) + \frac{h^4}{24}u_{xxxx}(\xi_4, t_4).$$

On en déduit :

$$R_j^n = u_t(jh, nk) + \frac{k^2}{12}(u_{ttt}(\xi_1, t_1) + u_{ttt}(\xi_2, t_2)) - u_{xx}(jh, nk) - \frac{h^2}{24}(u_{xxxx}(\xi_3, t_3) + u_{xxxx}(\xi_4, t_4)),$$

et donc, comme u est solution de (2.40),

$$|R_j^n| \leq C_1(k^2 + h^2),$$

où C_1 ne dépend que de u . Le schéma (2.41) est donc consistant d'ordre 2.

2. Pour étudier la stabilité au sens de Von Neumann, on "oublie" les conditions aux limites dans (2.40). Plus précisément, on s'intéresse à (2.40) avec $x \in \mathbb{R}$ (au lieu de $x \in]0, 1[$) et on remplace les conditions aux limites par des conditions de périodicité (exactement comme on l'a vu au paragraphe 2.2.6 page 65). Enfin, on prend une condition initiale de type "mode de Fourier", avec $p \in \mathbb{R}$ arbitraire, et u_0 défini par :

$$u_0(x) = e^{ipx}, x \in \mathbb{R}.$$

La solution exacte est alors :

$$u(x, t) = e^{-p^2 t} e^{ipx}, x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+,$$

c'est-à-dire

$$u(\cdot, t) = e^{-p^2 t} u_0, t \in \mathbb{R}_+.$$

Le facteur d'amplification est donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, le nombre $e^{-p^2 t}$. Ce facteur est toujours, en module, inférieur à 1. On va maintenant chercher la solution du schéma numérique sous la forme :

$$u_j^n = \xi_n e^{ipjh}, j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \quad (2.72)$$

où ξ_0 et $\xi_1 \in \mathbb{R}$ sont donnés (ils donnent u_j^0 et u_j^1 pour tout $j \in \mathbb{Z}$) et $\xi_n \in \mathbb{R}$ est à déterminer de manière à ce que la première équation de (2.41) soit satisfaite.

Ce facteur ξ_n va dépendre de k , h et p . Pour k et h donnés, le schéma est stable au sens de Von Neumann si, pour tout $p \in \mathbb{R}$, la suite $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Dans le cas contraire, le schéma est (pour ces valeurs de k et h) dit instable au sens de Von Neumann.

Un calcul immédiat donne que la famille des u_j^n , définie par (2.72), est solution de la première équation si et seulement si la suite $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie (on rappelle que ξ_0 et ξ_1 sont donnés) :

$$\frac{\xi_{n+1} - \xi_{n-1}}{2k} = \frac{2}{h^2}(\cos ph - 1)\xi_n, n \geq 2,$$

ou encore, en posant

$$\alpha = \frac{4k}{h^2}(\cos ph - 1) (\leq 0),$$

$$\xi_{n+1} - \alpha \xi_n - \xi_{n-1} = 0, \quad n \geq 2 \quad (2.73)$$

En excluant le cas $\alpha = -2$ (qui correspond, pour k et h donnés, à des valeurs de p très particulières), la solution de (2.73) est

$$\xi_n = Ar_1^n + Br_2^n, \quad A \geq 0, \quad (2.74)$$

où A et B sont déterminés par ξ_0 et ξ_1 (de sorte que $\xi_0 = A + B$, $\xi_1 = Ar_1 + Br_2$) et r_1, r_2 sont les deux racines distinctes de :

$$r^2 - \alpha r - 1 = 0. \quad (2.75)$$

Les nombres r_1 et r_2 sont réels et comme $r_1 r_2 = 1$, l'un de ces nombres est, en module, supérieur à 1. Ceci montre que $(\xi_n)_n$ est une suite non bornée (sauf pour des choix très particuliers de ξ_0 et ξ_1 , ceux pour lesquels $\xi_1 = \xi_0 r_2$ où r_2 est la racine de (2.75) de module inférieur à 1). Ce schéma est donc instable au sens de Von Neumann, pour tout $k > 0$ et $h > 0$.

3. On reprend les notations de la question 1. On s'intéresse maintenant à la quantité S_j^n (qui est toujours l'erreur de consistance) :

$$S_j^n = \frac{\bar{u}_j^{n+1} - u_j^{n+1}}{2k} - \frac{\bar{u}_{j-1}^n - (\bar{u}_j^{n+1} + \bar{u}_j^{n-1}) + \bar{u}_{j+1}^n}{h^2}, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad k = 0, \dots, M-1.$$

En reprenant la technique de la question 1, il existe (ξ_i, t_i) , $i = 1, \dots, 6$ t.q.

$$S_j^n = \frac{h^2}{12} (u_{ttt}(\xi_1, t_1) + u_{ttt}(\xi_2, t_2)) - \frac{h^2}{24} (u_{xxxx}(\xi_3, t_3) - u_{xxxx}(\xi_4, t_4)) + \frac{k^2}{2h^2} h_{tt}(\xi_5, t_5) + \frac{k^2}{2h^2} u_{tt}(\xi_6, t_6).$$

Ce qui donne, avec C_2 ne dépendant que de u ,

$$|S_j^n| \leq C_2 \left(h^2 + k^2 + \frac{k^2}{h^2} \right), \quad j = 1, \dots, N-1, \quad k = 0, \dots, M-1.$$

Le schéma est donc consistant quand $h \rightarrow 0$ avec $\frac{k}{h} \rightarrow 0$.

4. On reprend la méthode développée à la question 2, la suite $(\xi_n)_n$ doit maintenant vérifier la relation suivante (avec ξ_0, ξ_1 donnés).

$$\frac{\xi_{n+1} - \xi_{n-1}}{2k} = \frac{2 \cos(ph)}{h^2} \xi_n - \frac{\xi_{n-1} + \xi_{n+1}}{h^2}, \quad n \geq 2$$

c'est à dire :

$$\xi_{n+1} \left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{h^2} \right) - \frac{2 \cos(ph)}{h^2} \xi_n + \xi_{n-1} \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2k} \right) = 0, \quad n \geq 2.$$

L'équation caractéristique est maintenant :

$$p(r) = ar^2 + br + c = 0,$$

avec

$$a = \frac{1}{2k} + \frac{1}{h^2}, \quad b = -\frac{2 \cos(ph)}{h^2} \quad \text{et} \quad c = \frac{1}{h^2} - \frac{1}{2k}.$$

Pour montrer la stabilité au sens de Von Neumann, il suffit d'après (2.74) de montrer que les deux racines du polynôme p sont de module inférieur ou égal à 1. On note r_1 et r_2 ces deux racines (qui peuvent être confondues) et on distingue 2 cas :

1. 1er cas : Les racines de p ne sont pas réelles. Dans ce cas, on a $|r_1| = |r_2| = \gamma$ et

$$\gamma = \left| \frac{c}{a} \right| < 1,$$

car $k > 0$.

2. 2ème cas : Les racines de p sont réelles. Dans ce cas, on remarque que

$$r_1 r_2 = \frac{c}{a} < 1,$$

et l'une des racines, au moins, est donc entre -1 et 1 (strictement). De plus on a $p(1) = \frac{2}{h^2} - \frac{2 \cos ph}{h^2} \geq 0$

et $p(-1) = \frac{2}{h^2} + \frac{2 \cos ph}{h^2} \geq 0$, l'autre racine est donc aussi entre -1 et 1 (au sens large).

On en déduit que le schéma (2.42) est stable au sens de Von Neumann.

Exercice 33 page 77 : Discrétisation d'un problème parabolique non linéaire

On se propose, dans cet exercice, de montrer l'existence d'une solution faible au problème (2.48)-(2.50), à partir de l'existence de la solution approchée donnée par un schéma numérique. L'inconnue de ce problème est la fonction u de $[0, 1] \times [0, T]$ dans \mathbb{R} , elle doit être solution des équations suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial x^2}(x, t) = v(x, t), \quad x \in]0, 1[, t \in]0, T[, \quad (2.76)$$

$$\frac{\partial \varphi(u)}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x}(1, t) = 0, \quad t \in]0, T[, \quad (2.77)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in]0, 1[, \quad (2.78)$$

où φ, v, T, u_0 sont donnés et sont t.q.

1. $T > 0, v \in L^\infty(]0, 1[\times]0, T[)$,
2. φ croissante, lipschitzienne de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ,
3. $u_0 \in L^\infty(]0, 1[)$ et $\varphi(u_0)$ lipschitzienne de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} .

Un exemple important est donné par $\varphi(s) = \alpha_1 s$ si $s \leq 0$, $\varphi(s) = 0$ si $0 \leq s \leq L$ et $\varphi(s) = \alpha_2(s - L)$ si $s \geq L$, avec α_1, α_2 et L donnés dans \mathbb{R}_+^* . Noter pour cet exemple que $\varphi' = 0$ sur $]0, L[$.

Les ensembles $]0, 1[$ et $D =]0, 1[\times]0, T[$ sont munis de leur tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue sur cette tribu.

On appelle "solution faible" de (2.48)-(2.50) une solution de :

$$u \in L^\infty(]0, 1[\times]0, T[), \quad (2.79)$$

$$\int_D (u(x, t) \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) + \varphi(u(x, t)) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x, t) + v(x, t) \psi(x, t)) dx dt + \int_{]0, 1[} u_0(x) \psi(x, 0) dx = 0, \quad (2.80)$$

$$\forall \psi \in C_T^{2,1}(\mathbb{R}^2),$$

où $\psi \in C_T^{2,1}(\mathbb{R}^2)$ signifie que ψ est une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} deux fois continûment dérivable par rapport à x , une fois continûment dérivable par rapport à t et t.q. $\frac{\partial \psi}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(1, t) = 0$, pour tout $t \in [0, T]$ et $\psi(x, T) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Question 1 (Solution classique versus solution faible)

Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$; notons u sa restriction à $D =]0, 1[\times]0, T[$; notons que l'on a bien $u \in L^\infty(]0, 1[\times]0, T[)$. Supposons que u satisfait (2.48)-(2.50), et montrons qu'alors u vérifie (2.52). Soit $\psi \in C_T^{2,1}(\mathbb{R}^2)$. Multiplions (2.48) par ψ et intégrons sur D . On obtient :

$$\int_D \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \psi(x, t) dx dt - \int_D \frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial x^2}(x, t) \psi(x, t) dx dt = \int_D v(x, t) \psi(x, t) dx dt. \quad (2.81)$$

Par intégration par parties, il vient :

$$\int_D \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \psi(x, t) dx dt = \int_0^1 u(x, T) \psi(x, T) dx - \int_0^1 u(x, 0) \psi(x, 0) dx - \int_D u(x, t) \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) dx dt.$$

Comme $\psi \in C_T^{2,1}(\mathbb{R}^2)$ on a donc $\psi(x, T) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$ et comme u vérifie (2.50), on a $u(x, 0) = u_0(x)$. On en déduit que

$$\int_D \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \psi(x, t) dx dt = - \int_0^1 u_0(x) \psi(x, 0) dx - \int_D \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) u(x, t) dx dt. \quad (2.82)$$

Intégrons par parties le deuxième terme de (2.81) :

$$\begin{aligned} \int_D \frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial x^2}(x, t) \psi(x, t) dx dt &= \int_0^T \left[\frac{\partial \varphi(u)}{\partial x}(1, t) \psi(1, t) - \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x}(0, t) \psi(0, t) \right] dt \\ &\quad - \int_D \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x}(x, t) \frac{\partial \psi(u)}{\partial x}(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

et comme u vérifie (2.49), on a

$$\frac{\partial \varphi(u)}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x}(1, t) = 0, \quad t \in]0, T[.$$

En tenant compte de ces relations et en ré-intégrant par parties, on obtient :

$$\int_D \frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial x^2}(x, t) \psi(x, t) dx dt = - \int_D \varphi(u)(x, t) \frac{\partial^2 \psi(u)}{\partial x^2}(x, t) dx dt. \quad (2.83)$$

En remplaçant dans (2.82) et (2.83) dans (2.81), on obtient (2.48).

Réciproquement, supposons que u satisfait (2.52), et soit ψ continûment différentiable à support compact dans D . En intégrant (2.52) par parties et en tenant compte que ψ et toutes ses dérivées sont nulles au bord de D , on obtient :

$$\int_D \left[-\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial x^2}(x, t) - v(x, t) \right] \psi(x, t) dx dt = 0, \quad \forall \psi \in C_c^\infty(D).$$

Comme u est régulière, ceci entraîne que l'équation (2.48) est donc satisfaite par u .

On prend ensuite $\psi \in C_T^{2,1}(\mathbb{R}^2)$, et on intègre (2.52) par parties. En tenant compte du fait que $\psi(x, T) = 0$, pour tout x et $\frac{\partial \psi}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(1, t) = 0$, pour tout t , on obtient :

$$\begin{aligned} & - \int_0^1 u(x, 0) \psi(x, 0) dx - \int_D \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \psi(x, t) dx dt + \int_0^T \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x}(1, t) \psi(1, t) dt \\ & - \int_0^T \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x}(0, t) \psi(0, t) dt + \int_D \frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial x^2} \psi(x, t) dx dt + \int_0^1 u_0(x) \psi(x, 0) dx = 0. \end{aligned}$$

En regroupant et en utilisant le fait que u satisfait (2.48), on obtient :

$$\int_0^1 (u_0(x) - u(x, 0)) \psi(x, 0) dx + \int_0^T \frac{\partial \varphi}{\partial x}(1, t) \psi(1, t) dt - \int_0^T \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, t) \psi(0, t) dt = 0.$$

En choisissant successivement une fonction ψ nulle en $x = 0$ et $x = 1$ puis nulle en $x = 1$ et $t = T$ et enfin nulle en $x = 0$ et $t = T$, on obtient que u satisfait la condition initiale (2.50) et les conditions aux limites (2.49), ce qui conclut la question.

Question 2 (Existence et unicité de la solution approchée)

Soit $n \in \{0, \dots, M-1\}$. On suppose connu $\{u_i^n, i = 1, \dots, N\}$. On va prouver dans cette question l'existence et l'unicité de $\{u_i^{n+1}, i = 1, \dots, N\}$ vérifiant (2.54) (avec $u_0^{n+1} = u_1^{n+1}$, $u_{N+1}^{n+1} = u_N^{n+1}$).

1. L'application $s \mapsto s$ est strictement croissante, et par hypothèse sur φ , l'application $s \mapsto a\varphi(s)$ est croissante. La somme d'une fonction strictement croissante et d'une fonction croissante est strictement croissante. D'autre part, comme φ est croissante, pour tout $\varphi(s) \leq \varphi(0)$, $\forall s \leq 0$, et donc $\lim_{s \rightarrow -\infty} g_a(s) = -\infty$. De même, $\varphi(s) \geq \varphi(0)$, $\forall s \geq 0$, et donc $\lim_{s \rightarrow +\infty} g_a(s) = +\infty$. La fonction g_a est continue et prend donc toutes les valeurs de l'intervalle $]-\infty, +\infty[$. Comme elle est strictement croissante, elle est bijective.
2. L'équation (4.5) s'écrit encore :

$$g_a(u_i) = \frac{k}{h^2} (\bar{w}_{i-1} + \bar{w}_{i+1}) + u_i^n + kv_i^n, \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, N,$$

avec $a = \frac{k}{h^2}$. Par la question précédente, il existe donc un unique u_i qui vérifie cette équation ; il suffit alors de poser $\varphi(u_i) = w_i$ pour déterminer de manière unique la solution de (2.55)–(2.56).

3. Soit \bar{w}^1 et $\bar{w}^2 \in \mathbb{R}^N$ et soit $w^1 = F(\bar{w}^1)$ et $w^2 = F(\bar{w}^2)$. Par définition de F , on a :

$$u_i^1 - u_i^2 + \frac{2k}{h^2} (w_i^1 - w_i^2) = \frac{k}{h^2} ((\bar{w}_{i-1}^1 + \bar{w}_{i+1}^1) - (\bar{w}_{i-1}^2 + \bar{w}_{i+1}^2)), \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, N. \quad (2.84)$$

Comme φ est monotone, le signe de $w_i^1 - w_i^2 = \varphi(u_i^1) - \varphi(u_i^2)$ est le même que celui de $u_i^1 - u_i^2$, et donc

$$|u_i^1 - u_i^2 + \frac{2k}{h^2} (w_i^1 - w_i^2)| = |u_i^1 - u_i^2| + \frac{2k}{h^2} |w_i^1 - w_i^2|. \quad (2.85)$$

Et comme φ est lipschitzienne de rapport L , on a

$$|w_i^1 - w_i^2| = |\varphi(u_i^1) - \varphi(u_i^2)| \leq L|u_i^1 - u_i^2|,$$

d'où :

$$|u_i^1 - u_i^2| \geq \frac{1}{L}|w_i^1 - w_i^2|. \quad (2.86)$$

On déduit donc de (2.84),(2.85) et(2.86) que

$$\frac{1}{L}|w_i^1 - w_i^2| + \frac{2k}{h^2}|w_i^1 - w_i^2| \leq \frac{k}{h^2}(|\bar{w}_{i-1}^1 - \bar{w}_{i-1}^2| + |\bar{w}_{i+1}^1 - \bar{w}_{i+1}^2|), \text{ pour tout } i = 1, \dots, N.$$

On a donc

$$|w_i^1 - w_i^2| \leq \frac{1}{1 + \frac{2kL}{h^2}} \max_{i=1, \dots, N} |\bar{w}_i^1 - \bar{w}_i^2|, \text{ pour tout } i = 1, \dots, N.$$

d'où on déduit que $\|w^1 - w^2\|_\infty \leq C\|\bar{w}^1 - \bar{w}^2\|_\infty$ avec $C = \frac{1}{1 + \frac{2kL}{h^2}} < 1$. L'application F est donc bien strictement contractante.

4. Soit $\{u_i^{n+1}, \text{ Si } \{u_i^{n+1}, i = 1, \dots, N\}$ est solution de (2.54) et $w_i = \varphi(u_i^{n+1})$ pour $i \in \{1, \dots, N\}$, alors on remarque que $(u_i^{n+1})_{i=1, \dots, N}$ et $(w_i)_{i=1, \dots, N}$ vérifient (2.55)–(2.56) avec $\bar{w}_i = w_i$ pour $i = 1, \dots, N$. On en déduit que $w = F(w)$.

5. Soit $w = (w_i)_{i=1, \dots, N}$ t.q. $w = F(w)$. Montrer que pour tout

Par définition de F , on a $F(w) = \tilde{w}$ avec $(\tilde{u}, \tilde{w}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $\tilde{u} = (\tilde{u}_i)_{i=1, \dots, N}$, $\tilde{w} = (\tilde{w}_i)_{i=1, \dots, N}$, t.q. :

$$\varphi(\tilde{u}_i) = \tilde{w}_i, \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, N\},$$

$$\tilde{u}_i + \frac{2k}{h^2}\tilde{w}_i = \frac{k}{h^2}(w_{i-1} + w_{i+1}) + u_i^n + kv_i^n, \text{ pour tout } i = 1, \dots, N. \quad (2.87)$$

Comme $F(w) = w$, on a donc $\tilde{w}_i = w_i$ et on obtient l'existence de $u_i^{n+1} = \tilde{u}_i$ tel que $w_i = \varphi(u_i^{n+1})$ pour $i = 1, \dots, N$. Il suffit alors de remplacer w_i et \tilde{w}_i par $\varphi(u_i^{n+1})$ dans (2.87) pour conclure que $\{u_i^{n+1}, i = 1, \dots, N\}$ est solution de (2.54).

6. On vient de montrer dans les questions précédentes que $\{u_i^{n+1}, i = 1, \dots, N\}$ est solution de (2.54) si et seulement si w défini par $w_i = \varphi(u_i^{n+1})$ est solution de $w = F(w)$, où F est définie par (2.55) – (2.56). Comme F est une application strictement croissante, il existe un unique point fixe $w = F(w)$. Donc par définition de F il existe une unique famille $\{u_i^{n+1}, i = 1, \dots, N\}$ solution de (2.54).

Question 3 (Estimation $L^\infty([0, 1] \times]0, T])$ sur u)

La relation à démontrer par récurrence est clairement vérifiée au rang $n = 0$, par définition de A . Supposons qu'elle soit vraie jusqu'au rang n , et démontrons-la au rang $n + 1$. La relation (2.54) s'écrit encore :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{k}{h^2}(\varphi(u_{i-1}^{n+1}) - \varphi(u_i^{n+1})) + \frac{k}{h^2}(\varphi(u_{i+1}^{n+1}) - \varphi(u_i^{n+1})) + kv_i^n, \quad i = 1, \dots, N, \quad n = 0, \dots, M - 1,$$

Supposons que i est tel que $u_i^{n+1} = \min_{j=1, \dots, N} u_j^{n+1}$. Comme φ est croissante, on a dans ce cas : $\varphi(u_{i-1}^{n+1}) - \varphi(u_i^{n+1}) \geq 0$ et $\varphi(u_{i+1}^{n+1}) - \varphi(u_i^{n+1}) \geq 0$, et on en déduit que $\min_{j=1, \dots, N} u_j^{n+1} \geq u_i^n - kB$ d'où, par hypothèse de récurrence, $\min_{j=1, \dots, N} u_j^{n+1} \geq -A - nkB - kB$. Un raisonnement similaire en considérant maintenant i tel que $u_i^{n+1} = \max_{j=1, \dots, N} u_j^{n+1}$ conduit à : $\max_{j=1, \dots, N} u_j^{n+1} \leq u_i^n + kB \leq A + nkB + kB$. On a donc bien : $-A - (n + 1)kB \leq u_i^{n+1} \leq A + (n + 1)kB$, pour tout $i = 1, \dots, N$ et tout $n = 0, \dots, M$.

On en déduit alors que $\|u^n\|_{L^\infty([0, 1])} \leq c_{u_0, v, T}$, avec $c_{u_0, v, T} = A + BT$.

Question 4 (Estimation de la dérivée p.r. à x de $\varphi(u)$)

En multipliant (2.54) par u_i^{n+1} et en sommant sur i , on obtient $A_n + B_n = C_n$, avec

$$A_n = \sum_{i=1}^N \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} u_i^{n+1}, \quad B_n = - \sum_{i=1}^N \frac{\varphi(u_{i-1}^{n+1}) - 2\varphi(u_i^{n+1}) + \varphi(u_{i+1}^{n+1})}{h^2} u_i^{n+1} \text{ et } C_n = \sum_{i=1}^N v_i^n u_i^{n+1}.$$

En utilisant l'inégalité $a^2 - ab = \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2}$, on obtient :

$$A_n \geq \alpha_{n+1} - \alpha_n, \text{ avec } \alpha_n = \frac{1}{2k} \sum_{i=1}^N (u_i^n)^2.$$

En développant B_n , on obtient :

$$B_n = -\frac{1}{h^2} \left(\sum_{i=1}^N (\varphi(u_{i-1}^{n+1}) - \varphi(u_i^{n+1})) u_i^{n+1} + \sum_{i=1}^N (-\varphi(u_i^{n+1}) + \varphi(u_{i+1}^{n+1})) u_i^{n+1} \right).$$

Par un changement d'indice sur les sommes, on obtient alors :

$$B_n = -\frac{1}{h^2} \left(\sum_{i=0}^{N-1} (\varphi(u_i^{n+1}) - \varphi(u_{i+1}^{n+1})) u_{i+1}^{n+1} - \sum_{i=1}^N (-\varphi(u_i^{n+1}) + \varphi(u_{i+1}^{n+1})) u_i^{n+1} \right).$$

En tenant compte du fait que $u_0^{n+1} = u_1^{n+1}$, $u_{N+1}^{n+1} = u_N^{n+1}$, pour tout $n = 0, \dots, M-1$, on obtient alors que :

$$B_n = \frac{1}{h^2} \left(\sum_{i=1}^{N-1} (\varphi(u_{i+1}^{n+1}) - \varphi(u_i^{n+1})) (u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}) \right).$$

En utilisant le caractère lipschitzien de φ , on obtient la minoration suivante :

$$B_n \geq \frac{1}{Lh^2} \sum_{i=1}^{N-1} (\varphi(u_{i+1}^{n+1}) - \varphi(u_i^{n+1}))^2.$$

Enfin, on majore C_n :

$$C_n \leq \frac{Bc_{u_0,v,T}}{h}.$$

L'égalité $A_n + B_n = C_n$ entraîne donc :

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n + \frac{1}{Lh^2} \sum_{i=1}^{N-1} (\varphi(u_{i+1}^{n+1}) - \varphi(u_i^{n+1}))^2 \leq \frac{Bc_{u_0,v,T}}{h}.$$

En sommant pour $n = 0$ à $M-1$, et en notant que $\alpha_M \geq 0$, on obtient alors :

$$\frac{1}{Lh^2} \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{i=1}^{N-1} (\varphi(u_{i+1}^{n+1}) - \varphi(u_i^{n+1}))^2 \leq \frac{Bc_{u_0,v,T}}{h} + \alpha_0.$$

Il reste à remarquer que $\alpha_0 \leq \frac{h}{2k} c_{u_0,v,T}^2$ pour conclure que :

$$\sum_{n=0}^{M-1} \sum_{i=1}^{N-1} (\varphi(u_{i+1}^{n+1}) - \varphi(u_i^{n+1}))^2 \leq C_1 \frac{h}{k}, \text{ avec } C_1 = Lc_{u_0,v,T} (B + \frac{1}{2} c_{u_0,v,T}).$$

Question 5 (Estimation de la dérivée p.r. à t de $\varphi(u)$)

Multiplions (2.54) par $\varphi(u_i^{n+1}) - \varphi(u_i^n)$ et sommons pour $i = 1, \dots, N$. On obtient :

$$A_n + B_n = C_n, \tag{2.88}$$

$$\text{avec } A_n = \sum_{i=1}^N \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} (\varphi(u_i^{n+1}) - \varphi(u_i^n)), \quad B_n = -\sum_{i=1}^N \frac{\varphi(u_{i-1}^{n+1}) - 2\varphi(u_i^{n+1}) + \varphi(u_{i+1}^{n+1}))}{h^2} (\varphi(u_i^{n+1}) - \varphi(u_i^n))$$

$$\text{et } C_n = \sum_{i=1}^N v_i^n (\varphi(u_i^{n+1}) - \varphi(u_i^n)).$$

En utilisant le caractère lipschitzien de φ , on obtient la minoration suivante :

$$A_n \geq \frac{1}{Lk} \sum_{i=1}^{N-1} (\varphi(u_i^{n+1}) - \varphi(u_i^n))^2. \tag{2.89}$$

En développant B_n , on obtient :

$$B_n = -\frac{1}{h^2} \left(\sum_{i=1}^N (\varphi(u_{i-1}^{n+1}) - \varphi(u_i^{n+1})) (\varphi(u_i^{n+1}) - \varphi(u_i^n)) + \sum_{i=1}^N (-\varphi(u_i^{n+1}) + \varphi(u_{i+1}^{n+1})) (\varphi(u_i^{n+1}) - \varphi(u_i^n)) \right).$$

Par un changement d'indice sur les sommes, on obtient alors :

$$B_n = -\frac{1}{h^2} \left(\sum_{i=0}^{N-1} (\varphi(u_i^{n+1}) - \varphi(u_{i+1}^{n+1}))(\varphi(u_{i+1}^{n+1}) - \varphi(u_{i+1}^n)) + \sum_{i=1}^N (-\varphi(u_i^{n+1}) + \varphi(u_{i+1}^{n+1}))(\varphi(u_i^{n+1}) - \varphi(u_i^n)) \right).$$

En tenant compte du fait que $u_0^{n+1} = u_1^{n+1}$, $u_{N+1}^{n+1} = u_N^{n+1}$, pour tout $n = 0, \dots, M-1$, on obtient alors que :

$$B_n = \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{N-1} (\varphi(u_{i+1}^{n+1}) - \varphi(u_i^{n+1}))((\varphi(u_{i+1}^{n+1}) - \varphi(u_i^{n+1})) - (\varphi(u_{i+1}^n) - \varphi(u_i^n))).$$

En utilisant à nouveau la relation $a(a-b) \geq \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2}$, on obtient :

$$B_n \geq \beta_{n+1} - \beta_n, \text{ avec } \beta_n = \frac{1}{2h^2} \sum_{i=1}^{N-1} (\varphi(u_{i+1}^n) - \varphi(u_i^n))^2 \quad (2.90)$$

Enfin, on majore C_n par :

$$C_n \leq \frac{1}{2Lk} \sum_{i=1}^N (\varphi(u_i^{n+1}) - \varphi(u_i^n))^2 + C \sum_{i=1}^N k \geq C \frac{k}{h}. \quad (2.91)$$

En utilisant (2.88), (2.89), (2.90) et (2.91), on obtient :

$$\frac{1}{2Lk} \sum_{i=1}^N (\varphi(u_i^{n+1}) - \varphi(u_i^n))^2 + \beta_{n+1} - \beta_n \leq C \frac{k}{h}. \quad (2.92)$$

En sommant sur n , on obtient d'une part, en utilisant le fait que $\beta_n \geq 0$:

$$\sum_{n=0}^{M-1} \sum_{i=1}^N (\varphi(u_i^{n+1}) - \varphi(u_i^n))^2 \leq 2LC \frac{k}{h} + 2L\beta_0 k. \quad (2.93)$$

d'autre part, en utilisant que le fait que le premier terme est positif, on obtient par (2.92) une majoration sur β_M , et donc sur β_n pour tout $n \leq M$:

$$\beta_n \leq \frac{C}{h} + \beta_0. \quad (2.94)$$

Il ne reste donc plus qu'à majorer β_0 pour obtenir (2.58) et (2.59). Par définition, on a

$$\beta_0 = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\varphi(u_i^0) - \varphi(u_{i+1}^0)}{2h^2}.$$

En utilisant le fait que φ est lipschitzienne et que la différence entre u_i^0 et u_{i+1}^0 est en h , on obtient (2.59) à partir de (2.93) et (2.58) à partir de (2.94).

Question 6 Par définition de la fonction u_h , et grace au résultat de la question 3, on a :

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{x \in](i-1)h, ih[\\ t \in [nk, (n+1)k]}} u_h(x, t) &\leq \frac{t - nk}{k} \|u_h^{(n+1)}\|_\infty + \frac{(n+1)k - t}{k} \|u_h^{(n)}\|_\infty \\ &\leq c_{u_0, v, T}. \end{aligned}$$

ce qui prouve que la suite $(u_h)_{M \in \mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^\infty(]0, 1[\times]0, T[)$. Comme φ est continue, on en déduit immédiatement que $(\varphi(u_h))_{M \in \mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^\infty(]0, 1[\times]0, T[)$