

Chapitre 3

Méthodes variationnelles

3.1 Exemples de problèmes variationnels

3.1.1 Le problème de Dirichlet

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d , $d \geq 1$. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

où $f \in C(\bar{\Omega})$ et $\Delta u = \partial_1^2 u + \partial_2^2 u$, où l'on désigne par $\partial_i^2 u$ la dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la i -ème variable.

Définition 3.1 On appelle solution classique de (3.1) une fonction $u \in C^2(\bar{\Omega})$ qui vérifie (3.1).

Soit $u \in C^2(\bar{\Omega})$ une solution classique de (3.1), et soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, où $C_c^\infty(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω . On multiplie (3.1) par φ et on intègre sur Ω (on appellera par la suite φ "fonction test") : on a donc :

$$\int_{\Omega} -\Delta u(x)\varphi(x)dx = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx.$$

Notons que ces intégrales sont bien définies, puisque $\Delta u \in C(\Omega)$ et $f \in C(\Omega)$. Par intégration par parties (formule de Green), on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\Delta u(x)\varphi(x)dx &= -\sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \partial_i^2 u(x)\varphi(x)dx \\ &= \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \partial_i u(x)\varphi(x)dx + \sum_{i=1}^d \int_{\partial\Omega} \partial_i u \cdot n_i(s)\varphi(s)d\gamma(s) \end{aligned}$$

où n_i désigne la i -ème composante du vecteur unitaire normal à la frontière $\partial\Omega$ de Ω , et extérieur à Ω , et $d\gamma$ désigne le symbole d'intégration sur $\partial\Omega$. Comme φ est nulle sur $\partial\Omega$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \partial_i u(x)\partial_i \varphi(x)dx = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx.$$

ce qui s'écrit encore :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x)dx = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx. \quad (3.2)$$

Donc toute solution classique de (3.1) satisfait (3.2)

Prenons maintenant comme fonction test φ , non plus une fonction de $C_c^\infty(\Omega)$, mais une fonction de $H_0^1(\Omega)$. On rappelle que l'espace $H_0^1(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); Du \in L^2(\Omega)\}$, où Du désigne la dérivée faible de u , voir par exemple [1]. On rappelle que l'espace $H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx + \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} D_i u(x)D_i v(x)dx \quad (3.3)$$

est un espace de Hilbert. Les espaces $H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ font partie des espaces dits “de Sobolev” (voir [1] pour une introduction).

Si $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, par définition, il existe $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ telle que

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \text{ dans } H^1 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty,$$

Soit encore

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{H^1} = \|\varphi_n - \varphi\|_{L^2}^2 + \sum \|D_i \varphi_n - D_i \varphi\|_{L^2}^2 \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Pour chaque fonction $\varphi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ on a par (3.2) :

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \partial_i u(x) \partial_i \varphi_n(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi_n(x) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Or la i -ème dérivée partielle $\partial_i \varphi_n = \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}$ converge vers $D_i \varphi$ dans L^2 donc dans L^2 faible lorsque n tend vers ∞ , et φ_n tend vers φ dans $L^2(\Omega)$. On a donc :

$$\int_{\Omega} \partial_i u(x) \partial_i \varphi_n(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} \partial_i u(x) D_i \varphi(x) dx \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty$$

et

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi_n(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

L'égalité (3.1.1) est donc vérifiée pour toute fonction $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Montrons maintenant que si u est solution classique (3.1) alors $u \in H_0^1(\Omega)$. En effet, si $u \in C^2(\Omega)$, alors $u \in C(\bar{\Omega})$ et donc $u \in L^2(\Omega)$; de plus $\partial_i u \in C(\bar{\Omega})$ donc $\partial_i u \in L^2(\Omega)$. On a donc bien $u \in H^1(\Omega)$. Il reste à montrer que $u \in H_0^1(\Omega)$. Pour cela on rappelle (ou on admet . . .) les théorèmes de trace suivant :

Théorème 3.2 (Existence de l'opérateur trace) *Soit Ω un ouvert (borné ou non borné) de \mathbb{R}^d , $d \geq 1$, de frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne, alors l'espace $C_c^\infty(\bar{\Omega})$ des fonctions de classe C^∞ et à support compact dans $\bar{\Omega}$ est dense dans $H^1(\Omega)$. On peut donc définir par continuité l'application “trace”, qui est linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, définie par :*

$$\gamma(u) = u|_{\partial\Omega} \text{ si } u \in C_c^\infty(\bar{\Omega})$$

et par

$$\gamma(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma(u_n) \text{ si } u \in H^1(\Omega), \quad u = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n, \text{ où } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\bar{\Omega}).$$

Dire que l'application (linéaire) γ est continue est équivalent à dire qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\|\gamma(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)} \text{ pour tout } u \in H^1(\Omega). \quad (3.4)$$

Notons que $\gamma(H^1(\Omega)) \subset L^2(\partial\Omega)$, mais $\gamma(H^1(\Omega)) \neq L^2(\partial\Omega)$. On note $H^{1/2}(\Omega) = \gamma(H^1(\Omega))$.

Remarquons que si Ω est un ouvert borné, alors $\bar{\Omega}$ est compact et donc toutes les fonctions C^∞ sont à support compact dans $\bar{\Omega}$.

Théorème 3.3 (Noyau de l'opérateur trace) *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d de frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne, et γ l'opérateur trace défini par le théorème (3.2). Alors*

$$\text{Ker } \gamma = H_0^1(\Omega).$$

Si $u \in C^2(\bar{\Omega})$ est une solution classique de (3.1), alors $\gamma(u) = u|_{\partial\Omega} = 0$ donc $u \in \text{Ker } \gamma$, et par le théorème 3.3, ceci prouve que $u \in H_0^1(\Omega)$.

Nous avons ainsi montré que toute solution classique de (3.1) vérifie $u \in H_0^1(\Omega)$ et l'égalité (3.2). Cette remarque motive l'introduction de solutions plus générales, qui permettent de s'affranchir de la régularité C^2 , et qu'on appellera “solutions faibles”.

Définition 3.4 (Formulation faible) Soit $f \in L^2(\Omega)$, on dit que u est solution faible de (3.1) si u est solution de

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} D_i u(x) D_i \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.5)$$

Définition 3.5 (Formulation variationnelle) Soit $f \in L^2(\Omega)$; on dit que u est solution variationnelle de (3.1) si u est solution du problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (3.6)$$

avec $J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\Omega} f(x) v(x) dx,$

où on a noté :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} D_i u(x) D_i \varphi(x) dx.$$

On cherche à montrer l'existence et l'unicité de la solution de (3.5) et (3.6). Pour cela, on utilise le théorème de Lax-Milgram, qu'on rappelle ici :

Théorème 3.6 (Lax-Milgram) Soit H un espace de Hilbert, soit a une forme bilinéaire continue coercive sur H et $T \in H'$. Il existe un unique élément u tel que

$$\begin{cases} u \in H, \\ a(u, v) = T(v). \quad \forall v \in H. \end{cases} \quad (3.7)$$

De plus, si a est symétrique, u est l'unique solution du problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} u \in H, \\ J(u) \leq J(v), \end{cases} \quad (3.8)$$

où J est définie de H dans \mathbb{R}^N par :

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - T(v). \quad (3.9)$$

Démonstration :

- Si a est symétrique l'existence et l'unicité de u est immédiate par le théorème de représentation de Riesz (car dans ce cas a est un produit scalaire, et la forme linéaire définie par $\varphi \mapsto \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx$ est continue pour la norme associée à ce produit scalaire.).
- Si a est non symétrique, on considère l'application de H dans H , qui à u associe Au , défini par :

$$(Au, v) = a(u, v) \quad \forall v \in H.$$

L'application qui à u associe Au est linéaire continue, et

$$(Au, v) \leq a(u, v) \leq M \|u\| \|v\|$$

car a est continue. D'autre part, par le théorème de représentation de Riesz, on a existence et unicité de $\psi \in H$ tel que $T(v) = (\psi, v)$, pour tout $v \in H$. Donc u est solution de $a(u, v) = T(v), \forall v \in H$ si et seulement si $Au = \psi$. Pour montrer l'existence et l'unicité de u , il faut donc montrer que A est bijectif.

Montrons d'abord que A est injectif. On suppose que $Au = 0$. On a $(Au, u) \geq \alpha \|u\|^2$ par coercitivité de a et comme $\|Au\| \|v\| \geq (Au, v)$, on a donc :

$$\|Au\| \geq \alpha \|u\|,$$

En conclusion, si $Au = 0 \Rightarrow u = 0$.

Montrons maintenant que A est surjectif. On veut montrer que $AH = H$. Pour cela, on va montrer que AH est fermé et $AH^\top = \{0\}$. Soit $w \in \overline{AH}$; il existe alors une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ telle que $Av_n \rightarrow w$ dans H . Montrons que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans H . On a :

$$\|Av_n - Av_m\| = \|A(v_n - v_m)\| \geq \alpha \|v_n - v_m\|_H$$

donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. On en déduit qu'elle converge vers un certain $v \in H$. Comme A est continue, on a donc : $Av_n \rightarrow Av$ dans H , et donc $w = Av \in AH$.

Montrons maintenant que

$$AH^\top = \{0\}$$

Soit $v_0 \in AH^\top$, comme a est coercive, on a :

$$\alpha \|v_0\|^2 \leq a(v_0, v_0) = (Av_0, v_0) = 0,$$

on en déduit que $v_0 = 0$, ce qui prouve que $AH^\top = \{0\}$.

Pour conclure la preuve du théorème, il reste à montrer que si a est symétrique, le problème de minimisation (3.8) est équivalent au problème (3.7) Soit $u \in H$ solution unique de (3.7); montrons que u est solution de (3.8). Soit $w \in H$, on va montrer que $J(u+w) \geq J(u)$.

$$\begin{aligned} J(u+w) &= \frac{1}{2}a(u+w, u+w) - T(u+w) \\ &= \frac{1}{2}a(u, u) + \frac{1}{2}[a(u, w) + a(w, u)] + \frac{1}{2}a(w, w) - T(u) - T(w) \\ &= \frac{1}{2}a(u, u) + \frac{1}{2}a(w, w) + a(u, w) - T(u) - T(w) \\ &= J(u) + \frac{1}{2}a(w, w) \geq J(u) + \frac{\alpha}{2}\|w\|^2 \end{aligned}$$

Donc $J(u+w) > J(u)$ sauf si $w = 0$.

Réciproquement, supposons maintenant que u est solution du problème de minimisation (3.8) et montrons que u est solution du problème (3.7). Soit $w \in H$ et $t > 0$. On a : $J(u+tw) - J(u) \geq 0$ et $J(u-tw) - J(u) \geq 0$ car u minimise J . On en déduit que :

$$ta(u, w) + \frac{1}{2}t^2a(w, w) \geq 0 \text{ et } -ta(u, w) + \frac{1}{2}t^2a(w, w) \geq 0$$

Comme t est strictement positif, on peut diviser ces deux inégalités par t :

$$a(u, w) + \frac{1}{2}ta(w, w) \geq 0 \text{ et } -a(u, w) + \frac{1}{2}ta(w, w) \geq 0$$

On fait alors tendre t vers 0 et on obtient $a(u, w) = 0$ pour tout $w \in H$, ce qui montre que u est bien solution du problème (3.7). ■

Montrons qu'on peut appliquer le théorème de Lax Milgram pour les problèmes (3.5) et (3.6).

Proposition 3.7 (Existence et unicité de la solution de (3.1)) Si $f \in L^2(\Omega)$, il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de (3.5) et (3.6).

Démonstration : Montrons que les hypothèses du théorème de Lax Milgram sont vérifiées. L'espace $H = H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert. La forme bilinéaire a est définie par :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx \left(= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} D_i u(x) D_i v(x) dx \right),$$

et la forme linéaire T par :

$$T(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx.$$

Montrons que $T \in H'$; en effet, la forme T est linéaire, et on a :

$$T(v) \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1}.$$

On en déduit que T est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$, ce qui est équivalent à dire que $T \in H^{-1}(\Omega)$ (dual topologique de $H_0^1(\Omega)$).

Montrons maintenant que a est bilinéaire, continue et symétrique. La continuité de a se démontre en écrivant que

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx \leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \\ &\leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \end{aligned}$$

Les caractères bilinéaire et symétrique sont évidents. Montrons maintenant que a est coercitive : en effet,

$$a(v, v) = \int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla v(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} D_i v(x) D_i v(x) dx \geq \frac{1}{\text{diam}(\Omega)^2 + 1} \|u\|_{H^1}^2,$$

par l'inégalité de Poincaré (voir note page 12 page 24. Comme $T \in H'$ et comme a est linéaire, continue, coercitive donc le théorème de Lax Milgram s'applique : on en conclut qu'il existe une unique fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de (3.5) et comme a est symétrique, u est l'unique solution du problème de minimisation associée. ■

Définition 3.8 (Solution forte dans H^2) Soit $f \in L^2(\Omega)$, on dit que u est solution forte de (3.1) dans H^2 si $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ vérifie $-\Delta u = f$ dans $L^2(\Omega)$.

Remarquons que si u est solution forte C^2 de (3.1), alors u est solution forte H^2 . De même, si u est solution forte H^2 de (3.1) alors u est solution faible de (3.1). Les réciproques sont fausses. On admettra le théorème (difficile) de régularité, qui s'énonce de la manière suivante :

Théorème 3.9 (Régularité) Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d . On suppose que Ω a une frontière de classe C^2 , ou que Ω est convexe à frontière lipschitzienne. Si $f \in L^2(\Omega)$ et si $u \in H_0^1(\Omega)$ est solution faible de (3.1), alors $u \in H^2(\Omega)$. De plus, si $f \in H^m(\Omega)$ alors $u \in H^{m+2}(\Omega)$

Remarque 3.10 (Différences entre les méthodes de discrétisation) Lorsqu'on adopte une discrétisation par différences finies, on a directement le problème (3.1). Lorsqu'on adopte une méthode de volumes finis, on discrétise le "bilan" obtenu en intégrant (3.1) sur chaque maille. Lorsqu'on utilise une méthode variationnelle, on discrétise la formulation variationnelle (3.6) dans le cas de la méthode de Ritz, la formulation faible (3.5) dans le cas de la méthode de Galerkin, voir section 3.2.

Remarquons également que dans la formulation faible, (3.5), les conditions aux limites de Dirichlet homogènes $u = 0$ sont prises en compte dans l'espace $u \in H_0^1(\Omega)$, et donc également dans l'espace d'approximation H_N . Pour le problème de Neumann homogène, les conditions aux limites ne sont pas explicites dans l'espace fonctionnel, voir à ce sujet l'exercice 43 page 120.

3.1.2 Problème de Dirichlet non homogène

On se place ici en dimension 1 d'espace, $d = 1$, et on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u'' = f & \text{sur }]0, 1[\\ u(0) = a, \\ u(1) = b, \end{cases} \quad (3.10)$$

où a et b sont des réels donnés. Ces conditions aux limites sont dites de type Dirichlet non homogène ; comme a et b ne sont pas forcément nuls, on cherche une solution dans $H^1(\Omega)$ et non plus dans $H_0^1(\Omega)$. Cependant, pour se ramener à l'espace $H_0^1(\Omega)$ (en particulier pour obtenir que le problème est bien posé grâce au théorème de Lax Milgram et à la coercivité de la forme bilinéaire $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx$ sur $H_0^1(\Omega)$), on va utiliser une technique dite de "relèvement". On pose : $u = u_0 + \tilde{u}$ où u_0 est définie par :

$$u_0(x) = a + (b - a)x.$$

On a en particulier $u_0(0) = a$ et $u_0(1) = b$. On a alors $\tilde{u}(0) = 0$ et $\tilde{u}(1) = 0$. La fonction \tilde{u} vérifie donc le système :

$$\begin{cases} -\tilde{u}'' = f, \\ \tilde{u}(0) = 0, \\ \tilde{u}(1) = 0, \end{cases}$$

dont on connaît la formulation faible, et dont on sait qu'il est bien posé (voir paragraphe 3.1.1 page 98). Donc il existe un unique $u \in H^1(\Omega)$ vérifiant $u = u_0 + \tilde{u}$, où $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ est l'unique solution du problème

$$\int_0^1 \tilde{u}'v' = \int_0^1 f v \quad \forall v \in H_0^1(]0, 1[)$$

De manière plus générale, soit $u_1 \in H_{a,b}^1(]0, 1[) = \{v \in H^1; v(0) = a \text{ et } v(1) = b\}$, et soit $\bar{u} \in H_0^1(]0, 1[)$ l'unique solution faible du problème :

$$\begin{cases} -\bar{u}'' = u_1'' + f, \\ \bar{u}(0) = 0, \\ \bar{u}(1) = 0. \end{cases}$$

Alors $\bar{u} + u_1$ est l'unique solution faible de (3.10), c'est-à-dire la solution du problème

$$\begin{cases} u \in H_{a,b}^1(]0, 1[), \\ \int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \forall v \in H_0^1(]0, 1[). \end{cases}$$

Remarque 3.11 Il est facile de montrer que u ne dépend pas du relèvement choisi (voir exercice 37 page 119).

Considérons maintenant le cas de la dimension 2 d'espace : $d = 2$.

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d , considère le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.11)$$

Pour se ramener au problème de Dirichlet homogène, on veut construire un relèvement, c'est à dire une fonction $u_0 \in H^1(\Omega)$ t.q. $\gamma(u_0) = g$ où γ est l'application trace. On ne peut plus le faire de manière explicite comme en dimension 1. En particulier, on rappelle qu'en dimension 2, l'espace $H^1(\Omega)$ n'est pas inclus dans l'espace $C(\bar{\Omega})$ des fonctions continues, contrairement au cas de la dimension 1. Mais si on a $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, on sait qu'il existe $u_0 \in H^1(\Omega)$ tel que $g = \gamma(u_0)$. On cherche donc u sous la forme $u = \tilde{u} + u_0$ avec $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ et $u_0 \in H^1(\Omega)$ telle que $\gamma(u_0) = g$. Soit $v \in H_0^1(\Omega)$; on multiplie (3.11) par v et on intègre sur Ω :

$$\int_{\Omega} -\Delta u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx,$$

c'est-à-dire :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x)\nabla v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx.$$

Comme $u = u_0 + \tilde{u}$, on a donc :

$$\begin{cases} \tilde{u} \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla \tilde{u}(x)\nabla v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx - \int_{\Omega} \nabla u_0(x)\nabla v(x)dx, \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (3.12)$$

En dimension 2, il n'est pas toujours facile de construire le relèvement u_0 . Il est donc usuel, dans la mise en oeuvre des méthodes d'approximation (par exemple par éléments finis), de servir de de la formulation suivante, qui est équivalente à la formulation (3.12) :

$$\begin{cases} u \in \{v \in H^1(\Omega); \gamma(v) = g \text{ sur } \partial\Omega\} \\ \int_{\Omega} \nabla u(x)\nabla v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.13)$$

3.1.3 Problème avec conditions aux limites de Fourier

On considère ici le problème de diffusion avec conditions aux limites de type “Fourier” (ou “Robin” dans la littérature anglo-saxonne).

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} + \lambda u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.14)$$

où :

1. Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^d , $d = 1, 2$ ou 3 , et $\partial\Omega$ sa frontière,
2. $f \in C^2(\bar{\Omega})$,
3. \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$, extérieur à Ω ,
4. $\lambda(x) > 0, \forall x \in \partial\Omega$, est un coefficient qui modélise par exemple un transfert thermique à la paroi.

Supposons qu’il existe $u \in C^2(\bar{\Omega})$ vérifiant (3.14). Soit $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ une “fonction test”. On multiplie formellement (3.14) par φ et on intègre sur Ω .

On obtient :

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx.$$

Par intégration par parties, on a alors

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx - \int_{\partial\Omega} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}(x) \varphi(x) d\gamma(x) = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx.$$

Notons que la fonction φ qui n’est pas à support compact, et que la condition aux limites :

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} = -\lambda u$$

va donc intervenir dans cette formulation. En remplaçant on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx + \int_{\partial\Omega} \lambda u(x) \varphi(x) d\gamma(x) = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}).$$

Par densité de $C^\infty(\bar{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$, on a donc également

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx + \int_{\partial\Omega} \lambda u(x) \varphi(x) = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

Définition 3.12 (Solution faible) On dit que u est solution faible de (3.14) si u est solution de :

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \lambda(x) u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.15)$$

On peut remarquer que sous les hypothèses :

$$f \in L^2(\Omega), \quad \lambda \in L^\infty(\partial\Omega),$$

toutes les intégrales de (3.15) sont bien définies. (On rappelle que si $\varphi \in L^2(\Omega)$ et $\psi \in L^2(\Omega)$, alors $\varphi\psi \in L^1(\Omega)$). Pour vérifier que le problème (3.15) est bien posé, on a envie d’appliquer le théorème de Lax-Milgram. Définissons pour cela $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \lambda(x) u(x) v(x) dx. \quad (3.16)$$

Il est facile de voir que a est une forme bilinéaire symétrique. On peut donc lui associer une forme quadratique définie par :

$$E(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \lambda(x) v^2(x) d\gamma(x) - \int_{\Omega} f(x) v(x) dx. \quad (3.17)$$

Définition 3.13 (Solution variationnelle) On dit que u est solution variationnelle de (3.14) si u vérifie :

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega), \\ E(u) \leq E(v), \forall v \in H^1(\Omega), \end{cases} \quad (3.18)$$

où E est défini par (3.17).

Lemme 3.14 On suppose que $\lambda \in L^\infty(\partial\Omega)$. Alors la forme bilinéaire définie par (3.16) est continue sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

Démonstration : On a :

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \lambda(x) u(x) v(x) d\gamma(x) \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|\lambda\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

Or par le théorème de trace (théorème 3.2), et plus particulièrement grâce à la continuité de la trace (3.4), on a

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

On en déduit que

$$a(u, v) \leq M \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

avec $M = 1 + C^2 \|\lambda\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$. Donc a est bilinéaire continue ■

Lemme 3.15 Soit $\lambda \in L^\infty(\partial\Omega)$ tel qu'il existe $\underline{\lambda} > 0$ tel que $\lambda(x) \geq \underline{\lambda}$ p.p. sur $\partial\Omega$. Alors la forme bilinéaire a définie par (3.16) est coercitive :

Montrons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2$, pour tout $v \in H^1$ où

$$a(v, v) = \int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} \alpha(x) v^2(x) d\gamma(x).$$

Attention, comme $v \in H^1(\Omega)$ et non $H_0^1(\Omega)$, on ne peut pas écrire l'inégalité de Poincaré, qui nous permettrait de minorer $\int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla v(x) dx$. On va montrer l'existence de α par l'absurde. On suppose que a n'est pas coercive. Dans ce cas : c'est-à-dire que :

$$\forall \alpha > 0, \exists v \in H^1(\Omega); a(v, v) < \alpha \|v\|^2.$$

On a donc en particulier, en prenant $\alpha = \frac{1}{n}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists v_n \in H^1(\Omega); a(v_n, v_n) < \frac{1}{n} \|v_n\|_{H^1}^2.$$

Dans cette dernière assertion, on peut prendre v_n de norme 1, puisque l'inégalité est homogène de degré 2. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists v_n \in H^1(\Omega); \|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1; a(v_n, v_n) < \frac{1}{n}.$$

Or, par le théorème de Rellich, toute suite bornée $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $H^1(\Omega)$, est relativement compacte dans $L^2(\Omega)$. Comme on a $\|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1$, il existe donc une sous-suite encore notée $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H^1(\Omega)$ telle que v_n converge vers v dans $L^2(\Omega)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

De plus, comme :

$$a(v_n, v_n) = \int_{\Omega} \nabla v_n(x) \cdot \nabla v_n(x) dx + \int_{\partial\Omega} v_n(x) v_n(x) dx < \frac{1}{n} \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty,$$

On en déduit que, chaque terme étant positif :

$$\int_{\Omega} \nabla v_n(x) \cdot \nabla v_n(x) dx \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (3.19)$$

et

$$\int_{\partial\Omega} v_n(x)v_n(x)dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (3.20)$$

On a donc : $\nabla v_n \rightarrow 0$ dans $L^2(\Omega)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. On en déduit que

$$\int_{\Omega} \partial_i v_n(x)\varphi dx \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty, \text{ pour } i = 1, \dots, d.$$

Donc par définition de la dérivée faible (voir note page 23), on a aussi

$$\int_{\Omega} v_n(x)\partial_i \varphi(x)dx \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Comme $v_n \rightarrow v$ dans $L^2(\Omega)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, on peut passer à la limite ci-dessus et écrire que $\int_{\Omega} v(x)\partial_i \varphi(x) = 0$. On en déduit que la dérivée faible $D_i v$ existe et est nulle dans Ω . La fonction v est donc constante par composante connexe. Mais par (3.20), on a $v = 0$ sur $\partial\Omega$, et la trace d'une fonction constante est la constante elle-même. On a donc

$$v = 0 \text{ dans } \Omega.$$

On a ainsi montré que

$$D_i v_n \rightarrow D_i v \text{ et } v_n \rightarrow v = 0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Donc $v_n \rightarrow 0$ dans $H^1(\Omega)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, ce qui contredit le fait que $\|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1$. On a ainsi montré la coercivité de a . ■

Proposition 3.16 Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $\lambda \in L^\infty(\Omega)$ t.q. $\lambda \geq \underline{\lambda} p.p.$ avec $\underline{\lambda} > 0$ alors il existe une unique u solution de (3.15) qui est aussi l'unique solution de (3.18).

3.1.4 Condition de Neumann

Considérons maintenant le problème (3.14) avec $\lambda = 0$, on obtient le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

qu'on appelle problème de Dirichlet avec conditions de Neumann homogènes. En intégrant la première équation du système, il est facile de voir qu'une condition nécessaire d'existence d'une solution de (3.14) est que :

$$\int_{\Omega} -\Delta u(x)dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x)dx = \int_{\Omega} f(x)dx = 0$$

Si la condition aux limites de Neumann est non-homogène : $\frac{\partial u}{\partial n} = g$, la condition de compatibilité devient

$$\int_{\Omega} f(x)dx + \int_{\partial\Omega} g(x)d\gamma(x) = 0.$$

Remarquons que si $\alpha = 0$, la forme bilinéaire est

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx,$$

et que celle-ci n'est pas coercive sur $H^1(\Omega)$. De fait, il est clair que la solution de (3.14) n'est pas unique, puisque si u est solution de (3.14) alors $u + c$ est aussi solution, pour tout $c \in \mathbb{R}$. Pour éviter ce problème on va chercher les solutions de (3.14) à moyenne nulle. On cherche donc à résoudre (3.14) dans l'espace

$$H = \{v \in H^1(\Omega); \int_{\Omega} v(x)dx = 0\}$$

On admettra que a est coercive sur H (ceci est vrai grâce à l'inégalité de Poincaré–Wirtinger¹). Le problème

$$\begin{cases} u \in H, \\ a(u, v) = \int f v \quad \forall v \in H, \end{cases}$$

admet donc une unique solution.

3.1.5 Formulation faible et formulation variationnelle.

Nous donnons ici un exemple de problème pour lequel on peut établir une formulation faible, mais pas variationnelle. On se place en une dimension l'espace $N = 1$, et on considère $\Omega =]0, 1[$ et $f \in L^2(]0, 1[)$. On s'intéresse au problème suivant (dit "d'advection diffusion") :

$$\begin{cases} -u'' + u' = f, \text{ dans }]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Cherchons une formulation faible. Par la même méthode qu'au paragraphe 3.1.1, on choisit $v \in H_0^1(\Omega)$, on multiplie (3.1.5) par v et on intègre par parties :

$$\int_{\Omega} u'(x)v'(x)dx + \int_{\Omega} u'(x)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx.$$

Il est donc naturel de poser :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} u'(x)v'(x)dx + \int_{\Omega} u'(x)v(x)dx, \text{ et } T(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx.$$

Il est évident que T est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$ (c'est à dire $T \in H^{-1}(\Omega)$) et que la forme a est bilinéaire continue, mais pas symétrique. De plus elle est coercive : En effet, on a :

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_{\Omega} u'^2(x)dx + \int_{\Omega} u'(x)u(x)dx \\ &= \int_{\Omega} u'^2(x)dx + \int_{\Omega} \frac{1}{2}(u^2)'(x)dx \end{aligned}$$

Or, comme $u \in H_0^1(\Omega)$, on a $u = 0$ sur $\partial\Omega$ et donc $\int_{\Omega} (u^2)'(x)dx = u^2(1) - u^2(0) = 0$. On en déduit que :

$a(u, u) = \int_0^1 (u')^2$, et par l'inégalité de Poincaré (voir page 24), on conclut que a est coercive sur $H_0^1(\Omega)$. On en déduit par le théorème de Lax Milgram, l'existence et l'unicité de u solution du problème :

$$\begin{cases} u \in H_0^1(]0, 1[) \\ \int_0^1 (u'(x)v'(x) + u'(x)v(x))dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \end{cases}$$

3.2 Méthodes de Ritz et Galerkin

3.2.1 Principe général de la méthode de Ritz

On se place sous les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} H \text{ est un espace Hilbert} \\ a \text{ est une forme bilinéaire continue coercitive et symétrique} \\ T \in H' \end{cases} \quad (3.21)$$

1. L'inégalité de Poincaré–Wirtinger s'énonce de la façon suivante : soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d de frontière lipschitzienne, alors il existe $C \in \mathbb{R}_+$, ne dépendant que de Ω , tel que pour tout $u \in H^1(\Omega)$, on a :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + 2(m(\Omega))^{-1} \left(\int_{\Omega} u(x)dx \right)^2$$

On cherche à calculer $u \in H$ telle que :

$$a(u, v) = T(v), \quad \forall v \in H,$$

ce qui revient à calculer $u \in H$ solution du problème de minimisation (3.8), avec J définie par (3.9). L'idée de la méthode de Ritz² est de remplacer H par un espace $H_N \subset H$ de dimension finie (où $\dim H_N = N$), et de calculer u_N solution de

$$\begin{cases} u_N \in H_N \\ J(u_N) \leq J(v), \quad \forall v \in H_N, \end{cases} \quad (3.22)$$

en espérant que u_N soit "proche" (en un sens à définir) de u .

Théorème 3.17 *Sous les hypothèses (3.21), si H_N est un s.e.v. de H et $\dim H_N < +\infty$ alors le problème (3.22) admet une unique solution.*

Démonstration : Puisque H_N est un espace de dimension finie inclus dans H , c'est donc aussi un Hilbert. On peut donc appliquer le théorème de Lax Milgram, et on en déduit l'existence et l'unicité de $u_N \in H_N$ solution de (3.22), qui est aussi solution de :

$$\begin{cases} u_N \in H_N, \\ a(u_N, v) = T(v), \quad \forall v \in H_N. \end{cases}$$

■

Nous allons maintenant exposer une autre méthode de démonstration du théorème 3.17, qui a l'avantage d'être constructive, et qui nous permet d'introduire les idées principales des méthodes numériques envisagées plus loin. Comme l'espace H_N considéré dans le théorème 3.22 est de dimension N , il existe une base (ϕ_1, \dots, ϕ_N) de H_N .

Si $u \in H_N$, on peut donc développer $u = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i$. On note :

$$U = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$$

L'application ξ qui à u associe U est une bijection de H_N dans \mathbb{R}^N . Posons $j = J \circ \xi^{-1}$. On a donc :

$$j(U) = J(u).$$

Or :

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2} a \left(\sum_{i=1}^N u_i \phi_i, \sum_{i=1}^N u_i \phi_i \right) - T \left(\sum_{i=1}^N u_i \phi_i \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N u_i u_j a(\phi_i, \phi_j) - \sum_{i=1}^N u_i T(\phi_i). \end{aligned}$$

On peut donc écrire $J(u)$ sous la forme :

$$J(u) = \frac{1}{2} U^t \mathcal{K} U - U^t \mathcal{G} = j(U),$$

où $\mathcal{K} \in M^{N,N}(\mathbb{R})$ est définie par $\mathcal{K}_{ij} = a(\phi_i, \phi_j)$, et où $\mathcal{G}_i = T(\phi_i)$. Chercher u_N solution de (3.22) est donc équivalent à chercher U solution de :

$$\begin{cases} U \in \mathbb{R}^N, \\ j(U) \leq j(V), \quad \forall V \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (3.23)$$

où

$$j(V) = \frac{1}{2} V^t \mathcal{K} V - V^t \mathcal{G}. \quad (3.24)$$

Il est facile de vérifier que la matrice \mathcal{K} est symétrique définie positive. Donc j est une fonctionnelle quadratique sur \mathbb{R}^N , et on a donc existence et unicité de $U \in \mathbb{R}^N$ tel que $j(U) \leq j(V) \quad \forall V \in \mathbb{R}^N$. La solution du problème de minimisation (3.23) est aussi la solution du système linéaire $\mathcal{K}U = \mathcal{G}$; on appelle souvent \mathcal{K} la matrice de rigidité.

². Walter Ritz, né le 22 février 1878 à Sion et mort le 7 juillet 1909 à Göttingen, est un physicien suisse. Il a inventé la méthode dite "de Ritz" dans le cadre du calcul des valeurs propres de l'opérateur bi-harmonique

Proposition 3.18 (Existence et unicité de la solution du problème de minimisation) . Soit $j = \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ définie par (3.24). Il existe un unique $u \in \mathbb{R}^N$ solution du problème de minimisation (3.23).

Démonstration : Ceci est une conséquence du résultat général de minimisation dans \mathbb{R}^N (voir cours de licence). ■

Résumé sur la technique de Ritz.

1. On se donne $H_N \subset H$.
2. On trouve une base de H_N .
3. On calcule la matrice de rigidité \mathcal{K} et le second membre \mathcal{G} . Les coefficients de \mathcal{K} sont donnés par $\mathcal{K}_{ij} = a(\phi_i, \phi_j)$.
4. On minimise j par la résolution de $\mathcal{K}V = \mathcal{G}$.
5. On calcule la solution approchée : $u^{(N)} = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i$.

On appelle H_N l'espace d'approximation. Le choix de cet espace sera fondamental pour le développement de la méthode d'approximation. Le choix de H_N est formellement équivalent au choix de la base $(\phi_i)_{i=1 \dots N}$. Pourtant, le choix de cette base est capital même si $u^{(N)}$ ne dépend que du choix de H_N et pas de la base.

Choix de la base Un premier choix consiste à choisir des bases indépendantes de N c'est à dire $\{ \text{base de } H_{N+1} \} = \{ \text{base de } H_N \} \cup \{ \phi_{N+1} \}$. Les bases sont donc emboîtées les unes dans les autres. Considérons par exemple $H = H^1(]0, 1[)$, et l'espace d'approximation :

$$H_N = \text{Vect}\{1, X, \dots, X^{N-1}\}$$

Les fonctions de base sont donc $\phi_i = X^{i-1}$, $i = 1, \dots, N$. On peut remarquer que ce choix de base amène à une méthode d'approximation qui donne des matrices pleines. Or, on veut justement éviter les matrices pleines, car les systèmes linéaires associés sont coûteux (en temps et mémoire) à résoudre.

Le choix idéal serait de choisir une base $(\phi_i)_{i=1, \dots, N}$ de telle sorte que

$$a(\phi_i, \phi_j) = \lambda_i \delta_{ij}$$

$$\text{où } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.25)$$

On a alors $\mathcal{K} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$, et on a explicitement : $u^{(N)} = \sum_{i=1}^N \frac{T(\phi_i)}{a(\phi_i, \phi_i)} \phi_i$. Considérons par exemple

le problème de Dirichlet (3.1) Si ϕ_i est la i -ème fonction propre de l'opération $-\Delta$ avec conditions aux limites de Dirichlet associée à λ_i , on obtient bien la propriété souhaitée. Malheureusement, il est rare que l'on puisse connaître explicitement les fonctions de base ϕ_i .

Un deuxième choix consiste à choisir des bases dépendantes de N . Mais dans ce cas, la base de H_N n'est pas incluse dans celle de H_{N+1} . La technique des éléments finis qu'on verra au chapitre suivant, est un exemple de ce choix. Dans la matrice \mathcal{K} obtenue est creuse (c'est à dire qu'un grand nombre de ses coefficients sont nuls). Par exemple, pour des éléments finis appliqués à un opérateur du second ordre, on peut avoir un nombre de coefficients non nuls de l'ordre de $0(N)$.

Convergence de l'approximation de Ritz Une fois qu'on a calculé u_N solution de (3.23), il faut se préoccuper de savoir si $u^{(N)}$ est une bonne approximation de u solution de (3.2.1), c'est à dire de savoir si

$$u^{(N)} \rightarrow u \text{ lorsque } N \rightarrow +\infty$$

Pour vérifier cette convergence, on va se servir de la notion de consistance.

Définition 3.19 (Consistance) Sous les hypothèses (3.21), on dit que l'approximation de Ritz définie par l'espace $H_N \subset H$ avec $\dim H_N = N < +\infty$ est consistante si $d(H, H_N) \rightarrow 0$ lorsque $N \rightarrow +\infty$, c'est à dire $d(u, H_N) \rightarrow_{N \rightarrow +\infty} 0$, $\forall u \in H$ ou encore $\inf_{v \in H_N} \|u - v\| \rightarrow_{N \rightarrow +\infty} 0$, $\forall u \in H$.

L'autre notion fondamentale pour prouver la convergence est la stabilité, elle même obtenue grâce à la propriété de coercivité de a . Par stabilité, on entend estimation a priori sur la solution approchée $u^{(N)}$ (avant même de savoir si elle existe), où $u^{(N)}$ est solution de (3.23) ou encore de :

$$\begin{cases} a(u^{(N)}, v) = T(v) \quad \forall v \in H_N \\ u^{(N)} \in H_N \end{cases} \quad (3.26)$$

On a l'estimation a priori suivante sur u_N :

Proposition 3.20 (Stabilité) *Sous les hypothèses du théorème 3.21, on a :*

$$\|u^{(N)}\|_H \leq \frac{\|T\|_{H'}}{\alpha}.$$

Démonstration :

Le caractère coercif de a nous permet d'écrire :

$$\alpha \|u^{(N)}\|^2 \leq a(u^{(N)}, u^{(N)}).$$

Or comme $u^{(N)}$ est solution de (3.26), on a :

$$a(u^{(N)}, u^{(N)}) = T(u^{(N)}).$$

Comme T est linéaire continue, on obtient

$$T(u^{(N)}) \leq \|T\|_{H'} \|u^{(N)}\|_H.$$

Il est naturel de s'intéresser à l'erreur que l'on commet lorsqu'on remplace la résolution de la formulation faible (3.2.1) par la résolution de la formulation faible en dimension finie (3.26). Il nous faut pour cela pouvoir quantifier la norme de l'erreur commise $\|u - u^{(N)}\|_H$. Un premier pas dans cette direction est le lemme suivant, souvent appelé lemme de Céa³, qui permet de contrôler l'erreur de discrétisation par l'erreur d'interpolation, définie comme la distance entre $u \in H$ solution de (3.2.1) et l'espace H_N d'approximation.

Lemme 3.21 (Lemme de Céa, cas symétrique) *Soit H un espace de Hilbert réel, et a une forme bilinéaire continue symétrique coercive. Soit T une forme linéaire continue et $T \in H'$, et soit $M > 0$ et $\alpha > 0$ tels que $a(u, v) \leq M \|u\|_H \|v\|_H$ et $a(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2$. Soit $u \in H$ l'unique solution du problème suivant :*

$$\begin{cases} u \in H, \\ a(u, v) = T(v), \forall v \in H. \end{cases} \quad (3.27)$$

Soit $H_N \subset H$ tel que $\dim H_N = N$, et soit $u^{(N)} \in H_N$ l'unique solution de

$$\begin{cases} u^{(N)} \in H_N, \\ a(u^{(N)}, v) = T(v), \forall v \in H_N. \end{cases} \quad (3.28)$$

Alors

$$\|u - u^{(N)}\| \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} d(u, H_N) \quad (3.29)$$

où

$$d(u, H_N) = \inf_{v \in H_N} d(u, v).$$

Démonstration :

Étape 1 : On va montrer que $u^{(N)}$ est la projection de u sur H_N pour le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_a$ induit par a , défini de $H \times H$ $(u, v)_a = a(u, v)$. On note $\|u\|_a = \sqrt{a(u, u)}$, la norme induite par le produit scalaire a . La norme $\|\cdot\|_a$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|_H$, en effet, grâce à la coercivité et la continuité de la forme bilinéaire a , on peut écrire :

$$\alpha \|u\|_H^2 \leq \|u\|_a^2 \leq M \|u\|_H^2$$

3. Jean Céa, mathématicien français contemporain, voir <http://www.jean.cea.fr>

Donc $(H, \|\cdot\|_a)$ est un espace de Hilbert. Soit u la solution de (3.27), et soit $v = P_{H_N}u$ la projection orthogonale de u sur H_N relative au produit scalaire $a(\cdot, \cdot)$. Par définition de la projection orthogonale, on a donc

$$v - u \in H_N^\perp$$

Soit encore $a(v - u, w) = 0, \forall w \in H_N$. On en déduit que $a(v, w) = a(u, w) = T(w), \forall w \in H$, et donc que $v = u^{(N)}$. On a donc montré que $u^{(N)}$ est la projection orthogonale de v sur H_N , c'est-à-dire $u^{(N)} = P_{H_N}u$.

Étape 2 : On va établir une estimation de la norme de la différence entre u et u_N ; par définition de P_{H_N} , on a :

$$\|u - P_{H_N}u\|_a^2 \leq \|u - v\|_a^2, \forall v \in H_N,$$

ce qui s'écrit (puisque $P_{H_N}u = u^{(N)}$) :

$$a(u - u^{(N)}, u - u^{(N)}) \leq a(u - v, u - v), \quad \forall v \in H_N$$

Par coercivité et continuité de la forme bilinéaire a , on a donc :

$$\alpha \|u - u^{(N)}\|_H^2 \leq a(u - u^{(N)}, u - u^{(N)}) \leq a(u - v, u - v) \leq M \|u - v\|_H^2, \forall v \in H_N.$$

On en déduit que :

$$\|u - u^{(N)}\| \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \|u - v\|, \forall v \in H_N.$$

En passant à l'inf sur v , on obtient alors :

$$\|u - u^{(N)}\| \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \inf_{v \in H_N} \|u - v\|$$

Ce qui est exactement (3.29). ■

3.2.2 Méthode de Galerkin

On se place maintenant sous les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} H \text{ espace de Hilbert,} \\ a : \text{ forme bilinéaire continue et coercive, } T \in H'. \end{cases} \quad (3.30)$$

Remarquons que maintenant, a n'est pas nécessairement symétrique, les hypothèses (3.30) sont donc plus générales que les hypothèses (3.21). On considère le problème

$$\begin{cases} u \in H \\ a(u, v) = T(v), \quad v \in H. \end{cases} \quad (3.31)$$

Par le théorème de Lax Milgram, il y a existence et unicité de $u \in H$ solution de (3.31).

Le principe de la méthode de Galerkin⁴ est similaire à celui de la méthode de Ritz. On se donne $H_N \subset H$, tel que $\dim H_N < +\infty$, et on cherche à résoudre le problème approché :

$$(P_N) \begin{cases} u^{(N)} \in H_N, \\ a(u^{(N)}, v) = T(v), \forall v \in H_N. \end{cases} \quad (3.32)$$

Par le théorème de Lax-Milgram, on a immédiatement :

Théorème 3.22 *Sous les hypothèses, si $H_N \subset H$ et $\dim H_N = N$, il existe un unique $u^{(N)} \in H_N$ solution de (3.32).*

4. Boris Grigoryevich Galerkin, né le 20 février 1871 à Polotsk (Biélorussie) et mort le 12 juillet 1945, est un mathématicien et un ingénieur russe réputé pour ses contributions à l'étude des treillis de poutres et des plaques élastiques. Son nom reste lié à une méthode de résolution approchée des structures élastiques, qui est l'une des bases de la méthode des éléments finis.

Comme dans le cas de la méthode de Ritz, on va donner une autre méthode, constructive, de démonstration de l'existence et unicité de u_N qui permettra d'introduire la méthode de Galerkin. Comme $\dim H_N = N$, il existe une base $(\phi_1 \dots \phi_N)$ de H_N . Soit $v \in H_N$, on peut donc développer v sur la base :

$$v = \sum_{i=1}^N v_i \phi_i,$$

et identifier v au vecteur $(v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$. En écrivant que u satisfait (3.32) pour tout $v = \phi_i = 1, N$:

$$a(u, \phi_i) = T(\phi_i), \forall i = 1, \dots, N,$$

et en développant u sur la base $(\phi_i)_{i=1, \dots, N}$, on obtient :

$$\sum_{j=1}^N a(\phi_j, \phi_i) u_j = T(\phi_i), \forall i = 1, \dots, N.$$

On peut écrire cette dernière égalité sous forme d'un système linéaire : $\mathcal{K}U = \mathcal{G}$,

$$\mathcal{K}_{ij} = a(\phi_j, \phi_i) \text{ et } \mathcal{G}_i = T(\phi_i), \text{ pour } i, j = 1, \dots, N.$$

La matrice \mathcal{K} n'est pas en général symétrique.

Proposition 3.23 *Sous les hypothèses du théorème 3.22 le système linéaire (3.2.2) admet une solution .*

Démonstration : On va montrer que \mathcal{K} est inversible en vérifiant que son noyau est réduit à $\{0\}$. Soit $w \in \mathbb{R}^N$ tel que $\mathcal{K}w = 0$. Décomposons w sur le N base (ϕ_1, \dots, ϕ_N) de H_N : On a donc : $\sum_{j=1}^N a(\phi_j, \phi_i) w_j = 0$. Multiplions cette relation par w_i et sommons pour $i = 1$ à N , on obtient :

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a(\phi_j, \phi_i) w_j w_i = 0.$$

Soit encore : $a(w, w) = 0$. Par coercitivité de a , ceci entraîne que $w = 0$. On en déduit que $w_i = 0, \forall i = 1, \dots, N$, ce qui achève la preuve. ■

Remarque 3.24 *Si a est symétrique, la méthode de Galerkin est équivalente à celle de Ritz.*

En résumé, la méthode de Galerkin comporte les mêmes étapes que la méthode de Ritz, c'est à dire :

1. On se donne $H_N \subset H$
2. On trouve une base de H_N
3. On calcule \mathcal{K} et \mathcal{G}
4. On résout $\mathcal{K}U = \mathcal{G}$
5. On écrit $u^{(N)} = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i$.

La seule différence est que l'étape 4 n'est pas issue d'un problème de minimisation. Comme pour la méthode de Ritz, il faut se poser la question du choix du sous-espace H_N et de sa base, ainsi que de la convergence de l'approximation de u solution de (3.31) par $u^{(N)}$ obtenue par la technique de Galerkin. En ce qui concerne le choix de la base $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$, les possibilités sont les mêmes que pour la méthode de Ritz, voir paragraphe 3.2.1. De même, la notion de consistance est identique à celle donnée pour la méthode de Ritz (voir définition 3.19) et la démonstration de stabilité est identique à celles effectuée pour la méthode de Ritz ; voir proposition 3.20 page 110. On a encore un contrôle de l'erreur de discrétisation $\|u - u^{(N)}\|_H$ par l'erreur d'interpolation $d(u, H_N)$:

Lemme 3.25 *Sous les hypothèses du théorème (3.22), si u est la solution de (3.31) et u_N la solution de (3.32), alors*

$$\|u - u^{(N)}\|_H \leq \frac{M}{\alpha} d(u, H_N), \quad (3.33)$$

où M et α sont tels que : $\alpha \|v\|^2 \leq a(v, u) \leq M \|v\|^2$ pour tout v dans H (les réels M et α existent en vertu de la continuité et de la coercivité de a). Noter que la constante $\frac{M}{\alpha}$ est supérieure à la constante $\sqrt{\frac{M}{\alpha}}$ du lemme 3.21.

Démonstration : Comme la forme bilinéaire a est coercive de constante α , on a :

$$\alpha \|u - u^{(N)}\|_H^2 \leq a(u - u^{(N)}, u - u^{(N)})$$

On a donc, pour tout $v \in H$:

$$\alpha \|u - u^{(N)}\|_H^2 \leq a(u - u^{(N)}, u - v) + a(u - u^{(N)}, v - u^{(N)})$$

Or $a(u - u^{(N)}, v - u^{(N)}) = a(u, v - u^{(N)}) - a(u^{(N)}, v - u^{(N)})$ et par définition de u et $u^{(N)}$, on a :

$$a(u, v - u^{(N)}) = T(v - u^{(N)})$$

$$a(u^{(N)}, v - u^{(N)}) = T(v - u^{(N)})$$

On en déduit que :

$$\alpha \|u - u^{(N)}\|_H^2 \leq a(u - u^{(N)}, u - v), \forall v \in H_N,$$

et donc, par continuité de la forme bilinéaire a :

$$\alpha \|u - u^{(N)}\|_H^2 \leq M \|u - u^{(N)}\|_H \|u - v\|_H.$$

On obtient donc :

$$\|u - u^{(N)}\|_H \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v\|_H, \forall v \in H_N,$$

ce qui entraîne (3.33). ■

Remarque 3.26 On peut remarquer que l'estimation (3.33) obtenue dans le cadre de la méthode de Galerkin est moins bonne que l'estimation (3.29) obtenue dans le cadre de la méthode de Ritz. Ceci est moral, puisque la méthode de Ritz est un cas particulier de la méthode de Galerkin.

Grâce au théorème 3.25, on peut remarquer que $u^{(N)}$ converge vers u dans H lorsque N tend vers $+\infty$ dès que $d(u, H_N) \rightarrow 0$ lorsque $N \rightarrow +\infty$. C'est donc là encore une propriété de consistance dont nous avons besoin. La propriété de consistance n'est pas toujours facile à montrer directement. On utilise alors la caractérisation suivante :

Proposition 3.27 (Caractérisation de la consistance) Soit V un sous espace vectoriel de H dense dans H On suppose qu'il existe une fonction $r_N : V \rightarrow H_N$ telle que

$$\|v - r_N(v)\|_H \rightarrow_{N \rightarrow +\infty} 0,$$

alors

$$d(u, H_N) \rightarrow_{N \rightarrow +\infty} 0$$

Démonstration : Soit $v \in V$, et $w = r_N(v)$. Par définition, on a

$$\begin{aligned} d(u, H_N) &\leq \|u - r_N(v)\|_H \\ &\leq \|u - v\|_H + \|v - r_N(v)\|_H \end{aligned}$$

Comme V est dense dans H , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $v \in V$, tel que $\|u - v\|_H \leq \varepsilon$. Choisissons v qui vérifie cette dernière inégalité. Par hypothèse sur r_N :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0/N \geq N_0 \text{ alors } \|v - r_N(v)\| \leq \varepsilon.$$

Donc si $N \geq N_0$, on a $d(u, H_N) \leq 2\varepsilon$. On en déduit que $d(u, H_N) \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$. ■

3.2.3 Méthode de Petrov-Galerkin

La méthode de Petrov-Galerkin s'apparente à la méthode de Galerkin. On cherche toujours à résoudre :

$$\begin{cases} a(u, v) = T(v), & \forall v \in H, \\ u \in H \end{cases}$$

Mais on choisit maintenant deux sous-espaces H_N et V_N de H , tous deux de même dimension finie :

$$\dim H_N = \dim V_N = N.$$

On cherche une approximation de la solution du problème dans l'espace H_N , et on choisit comme fonction test les fonctions de base de V_N . On obtient donc le système :

$$\begin{cases} u \in H_N \\ a(u, v) = T(v) & \forall v \in V_N \end{cases}$$

On appelle H_N l'espace d'approximation, et V_N l'espace des fonctions test. Si (ϕ_1, \dots, ϕ_N) est une base de H_N et (ψ_1, \dots, ψ_N) une base de V_N , en développant $u^{(N)}$ sur la base de (ϕ_1, \dots, ϕ_N) . $u^{(N)} = \sum u_j \phi_j$, et en écrivant (3.2.3) pour $v = \psi_j$, on obtient :

$$\begin{cases} u \in H_N \\ a(u, \psi_i) = T(\psi_i), & \forall i = 1, \dots, N. \end{cases}$$

Le système à résoudre est donc :

$$\begin{cases} u^{(N)} = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i, \\ \mathcal{K}U = \mathcal{G}, \end{cases}$$

avec $\mathcal{K}_j = a(\phi_j, d_i)$ et $\mathcal{G}_i = T(\psi_i)$, pour $i = 1, \dots, N$.

3.3 La méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est une façon de choisir les bases des espaces d'approximation pour les méthodes de Ritz et Galerkin.

3.3.1 Principe de la méthode

On se limitera dans le cadre de ce cours à des problèmes du second ordre. L'exemple type sera le problème de Dirichlet (3.1), qu'on rappelle ici :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et l'espace de Hilbert sera l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ ou $H_0^1(\Omega)$.

On se limitera à un certain type d'éléments finis, dits "de Lagrange". Donnons les principes généraux de la méthode.

Éléments finis de Lagrange Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (ou \mathbb{R}^3), Soit H l'espace fonctionnel dans lequel on recherche la solution (par exemple $H_0^1(\Omega)$ s'il s'agit du problème de Dirichlet (3.1)). On cherche $H_N \subset H = H_0^1(\Omega)$ et les fonctions de base ϕ_1, \dots, ϕ_N . On va déterminer ces fonctions de base à partir d'un découpage de Ω en un nombre fini de cellules, appelés, "éléments". la procédure est la suivante :

1. On construit un "maillage" \mathcal{T} de Ω (en triangles ou rectangles) que l'on appelle éléments \mathcal{K} .
2. Dans chaque élément, on se donne des points que l'on appelle "noeuds".
3. On définit H_N par :

$$H_N = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / u|_K \in P_k, \forall K \in \mathcal{T}\} \cap H$$

où P_k désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à k . Le degré des polynômes est choisi de manière à ce que u soit entièrement déterminée par ses valeurs aux noeuds. Pour une méthode d'éléments finis de type Lagrange, les valeurs aux noeuds sont également les "degrés de liberté", c.à.d. les valeurs qui déterminent entièrement la fonction recherchée.

4. On construit une base $\{\phi_i \dots \phi_N\}$ de H_N tel que le support de ϕ_i soit “le plus petit possible”. Les fonctions ϕ_i sont aussi appelées fonctions de forme.

Remarque 3.28 (Eléments finis non conformes) Notons qu’on a introduit ici une méthode éléments finis conforme, c’est-à-dire que l’espace d’approximation H_N est inclus dans l’espace H . Dans une méthode non conforme, on n’aura plus $H_N \subset H$, et par conséquent, on devra aussi construire une forme bilinéaire approchée a_T ; on pourra voir à ce sujet l’exercice 46 page 123 où on exprime la méthode des volumes finis comme une méthode éléments finis non conformes.

Exemple en dimension 1 Soit $\Omega =]0, 1[\subset \mathbb{R}$ et soit $H = H_0^1(]0, 1[)$; on cherche un espace H_N d’approximation de H . Pour cela, on divise l’intervalle $]0, 1[$ en N intervalles de longueur $h = \frac{1}{N+1}$. On pose $x_i = i, i = 0, N + 1$. Les étapes 1. à 4. décrites précédemment donnent dans ce cas :

1. **Construction des éléments** On a construit $n + 1$ éléments $K_i =]x_i, x_{i+1}[$, $i = 0, \dots, N$.
2. **Noeuds** : On a deux noeuds par élément, (x_i et x_{i+1} sont les noeuds de $K_i, i = 0, \dots, N$) Le fait que $H_N \subset H_0^1(]0, 1[)$ impose que les fonctions de H_N soient nulles en $x_0 = 0$ et $x_{N+1} = 1$. On appelle x_1, \dots, x_N les noeuds libres et x_0, x_{N+1} les noeuds liés. Les degrés de liberté sont donc les valeurs de u en x_1, \dots, x_N . Aux noeuds liés, on a $u(x_0) = u(x_{N+1}) = 0$
3. **Choix de l’espace** On choisit comme espace de polynôme : $P_1 = \{ax + b, a, b \in \mathbb{R}\}$ et on pose :

$$H_N = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.q. } u|_{K_i} \in P_1, \forall i = 1 \dots N, u \in C(\bar{\Omega}) = C([0, 1]) \text{ et } u(0) = u(1) = 0\}.$$

Rappelons que $H = H_0^1(]0, 1[) \subset C([0, 1])$. Avec le choix de H_N , on a bien $H_N \subset H$.

4. **Choix de la base de H_N .**

Si on prend les fonctions de “type 1” de la méthode de Ritz, on choisit les fonctions décrites sur la figure 3.1. On a donc $H_1 = \text{Vect}\{\phi_1\}$, $H_3 = \text{Vect}\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$, et $H_7 = \text{Vect}\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6, \phi_7\}$, où Vect désigne le sous espace engendré par la famille considérée. Avec ce choix, on a donc $H_1 \subset H_3 \subset H_7$.

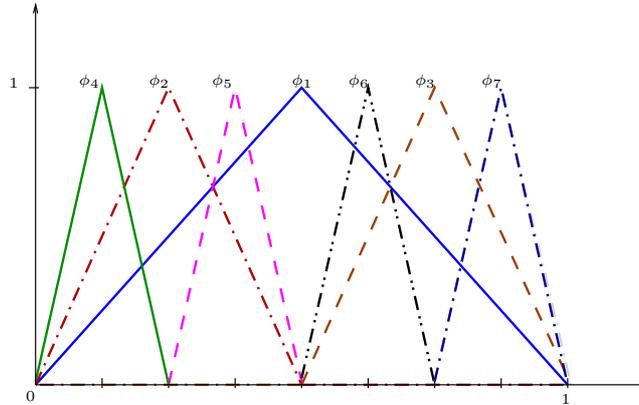


FIGURE 3.1 – Fonctions de forme de type 1 (espaces emboîtés)

Si maintenant on choisit des fonctions de forme de “type 2” on peut définir ϕ_i pour $i = 1$ à N par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_i : \text{continue et affine par morceaux sur les intervalles } [x_{i-1}, x_{i+1}], \\ \text{supp}(\phi_i) = [x_{i-1}, x_{i+1}], \\ \phi_i(x_i) = 1, \\ \phi_i(x_{i-1}) = \phi_i(x_{i+1}) = 0. \end{array} \right. \quad (3.34)$$

Il est facile de voir que $\phi_i \in H_N$ et que $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ engendre H_N , c’est à dire que pour tout $u \in H_N$, il existe $(u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$ tel que $u = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i$. On a représenté sur la figure 3.2 les fonctions de base

obtenue pour H_3 (à gauche) et H_7 (à droite). On peut remarquer que dans ce cas, les espaces d'approximation ne sont plus inclus les uns dans les autres.

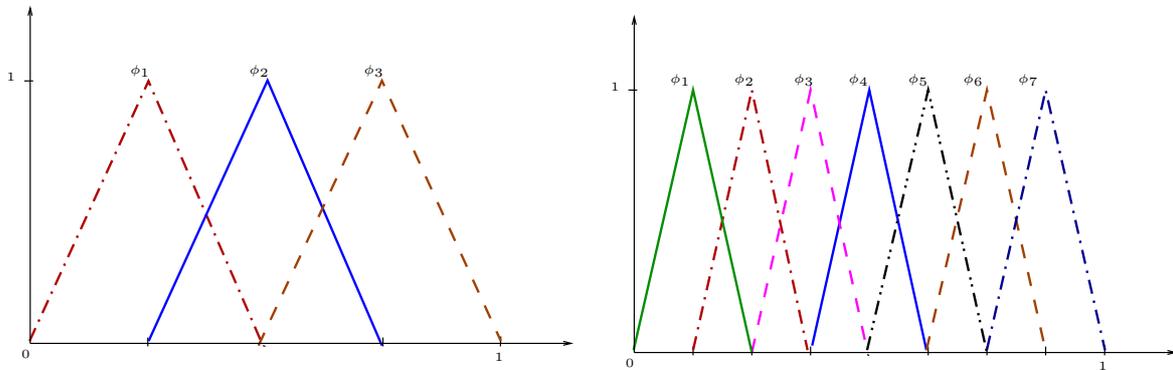


FIGURE 3.2 – Fonctions de forme de type 2 (fonction P1) en une dimension d'espace

Exemple en dimension 2 Soit Ω un ouvert polygonal de \mathbb{R}^2 , et $H = H_0^1(\Omega)$. Les étapes de construction de la méthode des éléments finis sont encore les mêmes.

1. **Eléments** : on choisit des triangles.
2. **Noeuds** : on les place aux sommets des triangles. Les noeuds $x_i \in \Omega$ (intérieurs à Ω) sont libres, et les noeuds $x_i \in \partial\Omega$ (sur la frontière de Ω) sont liés. On notera Σ l'ensemble des noeuds libres, Σ_F l'ensemble des noeuds liés, et, $\Sigma = \Sigma_I \cup \Sigma_F$.
3. **Espace d'approximation** L'espace des polynômes est l'ensemble des fonctions affines, noté P_1 . Une fonction $p \in P_1$ est de la forme :

$$p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \\ x = (x_1, x_2) \mapsto a_1x_1 + a_2x_2 + b,$$

avec $(a_1, a_2, b) \in \mathbb{R}^3$. L'espace d'approximation H_N est donc défini par :

$$H_N : \{u \in C(\bar{\Omega}); u|_K \in P_1, \forall K, \text{ et } u(x_i) = 0, \forall x_i \in \Sigma_F\}$$

4. **Base de H_N** : On choisit comme base de H_N la famille de fonctions $\{\phi_i\}_{i=1, \dots, N}$, où $N = \text{card}(\Sigma_I)$, où ϕ_i est définie, pour $i = 1$ à N , par :

$$\begin{cases} \phi_i \text{ est affine par morceaux,} \\ \phi_i(x_i) = 1, \\ \phi_i(x_j) = 0, \quad \forall j \neq i. \end{cases} \quad (3.35)$$

La fonction ϕ_i associée au noeud x_i a donc l'allure présentée sur la figure 3.3. Le support de chaque fonction ϕ_i (c'est à dire l'ensemble des points où ϕ_i est non nulle), est constitué de l'ensemble des triangles dont x_i est un sommet.

En résumé Les questions à se poser pour construire une méthode d'éléments finis sont donc :

1. La construction du maillage.
2. Un choix cohérent entre éléments, noeuds et espace des polynômes.
3. La construction de l'espace d'approximation H_N et de sa base $\{\phi_i\}_{i=1 \dots N}$.
4. La construction de la matrice de rigidité \mathcal{K} et du second membre \mathcal{G} .
5. L'évaluation de $d(u, H_N)$ en vue de l'analyse de convergence.

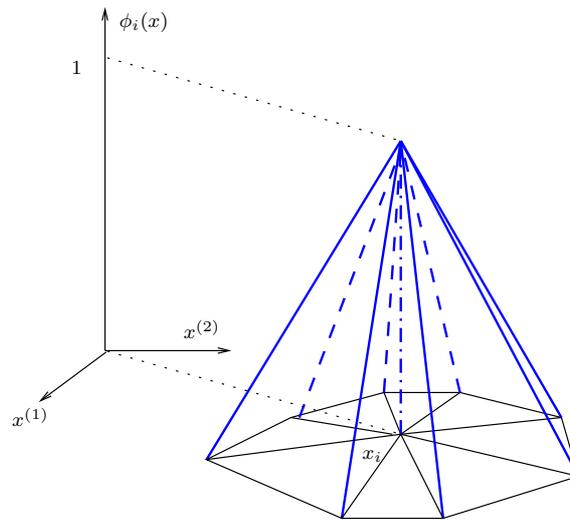


FIGURE 3.3 – Fonction de forme de type 2 (fonction P1) en deux dimensions d’espace

3.3.2 Construction du maillage, de l’espace H_N et de sa base ϕ_N

Construction des éléments

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^2$ un ouvert borné polygonal. On construit un maillage de Ω en divisant $\bar{\Omega}$ en parties fermées $\{K_\ell\}_{\ell=1,\dots,L}$ où L est le nombre d’éléments.

Les principes pour la construction du maillage sont :

- Éviter les angles trop grands ou trop petits. On préférera par exemple les triangles de gauche plutôt que ceux de droite dans la figure 3.4.

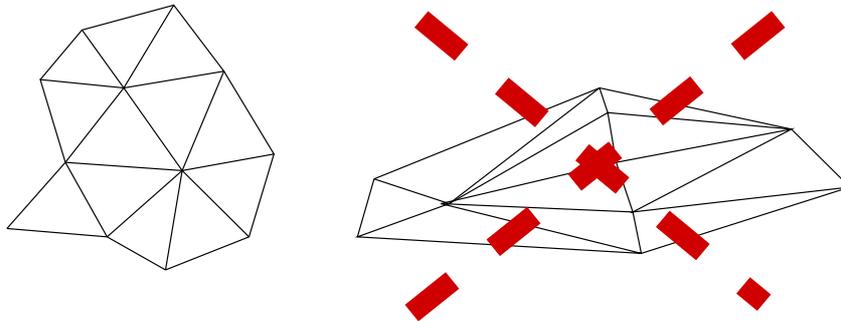


FIGURE 3.4 – Exemple de triangles “bons” (à gauche) et “mauvais” (à droite)

- Mettre beaucoup d’éléments là où u varie rapidement (ceci ne peut se faire que si on connaît a priori les zones de de variation rapide, ou si on a les moyens d’évaluer l’erreur entre la solution exacte du problème et la solution calculée et de remailler les zones où celle-ci est jugée trop grande.

- On peut éventuellement mélanger des triangles et des rectangles, mais ceci n’est pas toujours facile.

Il existe un très grand nombre de logiciels de maillages en deux ou trois dimensions d’espace. On pourra pour s’en convaincre utiliser le moteur de recherche google sur internet avec les mots clés : “mesh 2D structured”, “mesh 2D unstructured”, “mesh 3D structured”, “mesh 3D unstructured”. Le mot “mesh” est le terme anglais pour maillage, les termes 2D et 3D réfèrent à la dimension de l’espace physique. Le terme “structured” (structuré en français) désigne des maillages que dont on peut numéroter les éléments de façon cartésienne, le terme “unstructured” (non structuré) désigne tous les autres maillages. L’avantage des maillages “structurés” est qu’ils nécessitent une base de données beaucoup plus simple que les maillages non structurés, car on peut connaître tous les noeuds voisins à partir du numéro global d’un noeud d’un maillage structuré, ce qui n’est pas le cas dans un maillage non

structuré (voir paragraphe suivant pour la numérotation des noeuds). La figure 3.5 montre un exemple de maillage

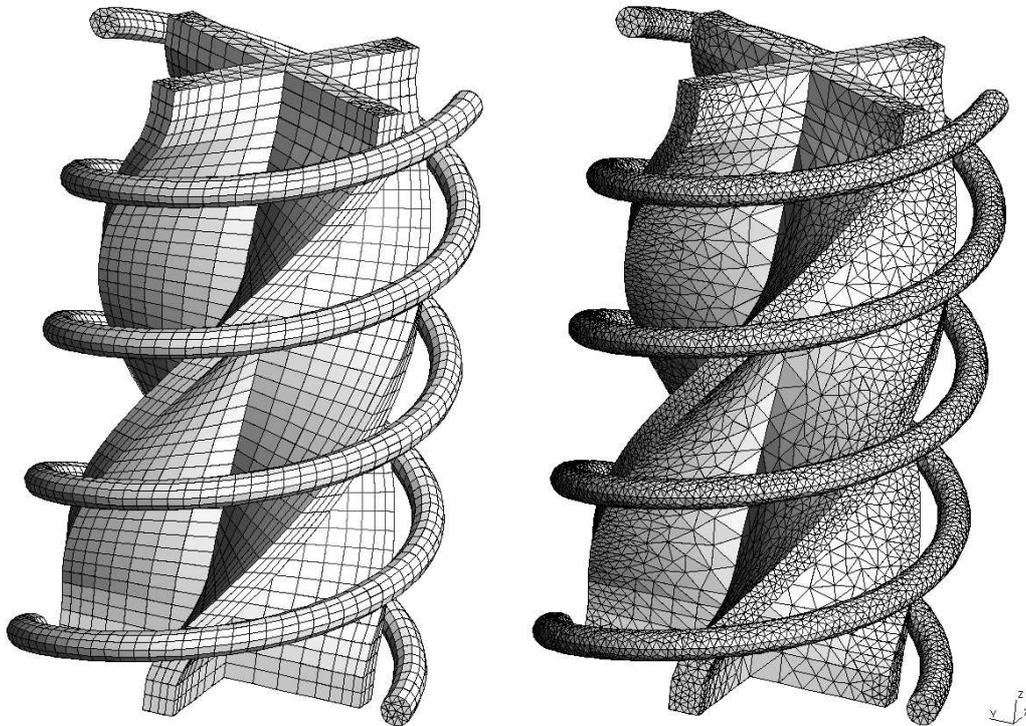


FIGURE 3.5 – Exemple de maillage structuré (à gauche) et non-structuré (à droite) d’une surface

de surface structuré ou non-structuré, pris sur le site web du logiciel Gmsh : a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities, développé par C. Geuzaine and J.-F. Remacle (<http://www.geuz.org/gmsh/>).

Choix des noeuds

On se donne une famille $\{S_i\}_{i=1,\dots,M}$ de M points de $\bar{\Omega}$, de composantes (x_i, y_i) , pour $i = 1, \dots, M$. Le maillage éléments finis est défini par éléments $\{K_\ell\}_{\ell=1\dots L}$ et les noeuds $\{S_i\}_{i=1\dots M}$. Ces éléments et noeuds ne peuvent bien sûr pas être choisis indépendamment. Dans le cas général, on choisit tous les éléments de même type (par exemple, des triangles) et on se donne un nombre fixe de noeuds par élément, ce qui détermine le nombre total de noeuds. Chaque noeud appartient donc à plusieurs éléments. Dans le cas d’un maillage structuré tel que celui qu’on a décrit dans la figure 1.5 page 27, une numérotation globale des noeuds est suffisante pour retrouver les éléments dont font partie ce noeud, ainsi que tous les voisins du noeud. Par contre, dans le cas d’un maillage non structuré (un maillage en triangles, par exemple), on aura besoin d’une numérotation locale des noeuds c’est-à-dire une numérotation des noeuds de chaque élément, pour $k = 1, \dots, N_\ell$, où N_ℓ est le nombre de noeuds par élément ; on aura également besoin d’une numérotation globale des noeuds, et d’une table de correspondance, l’une qui donne pour chaque élément, les numéros dans la numérotation globale des noeuds qui lui appartiennent.

$$i_r^\ell = \text{notation globale } (\ell, r) \text{ du } r\text{-ième noeud de l’élément } \ell$$

Amélioration de la précision

On a vu aux paragraphes précédents que l’erreur entre la solution exacte u recherchée et la solution $u(N)$ obtenue par la méthode de Ritz ou de Galerkin est majorée par une constante fois la distance entre H et H_N . On a donc

intérêt à ce que cette distance soit petite. Pour ce faire, il paraît raisonnable d'augmenter la dimension de l'espace H_N . Pour cela, on a deux possibilités :

- augmenter le nombre d'éléments : on augmente alors aussi le nombre global de noeuds, mais pas le nombre local.
- augmenter le degré des polynômes : on augmente alors le nombre de noeuds local, donc on augmente aussi le nombre global de noeuds, mais pas le nombre d'éléments. Ce deuxième choix (augmentation du degré des polynômes) ne peut se faire que si la solution est suffisamment régulière ; si la solution n'est pas régulière, on n'arrivera pas à diminuer $d(H, H_N)$ en augmentant le degré des polynômes.

3.4 Exercices

Exercice 34 (Fonctions H^1 en une dimension d'espace)

Montrer que si $u \in H^1(]0, 1[)$, alors u est continue. En déduire que $H^2(]0, 1[) \subset C^1([0, 1])$.

Exercice 35 (Minimisation de la semi-norme) *Suggestions en page 126, corrigé en page 126*

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n . On suppose que sa frontière est de classe C^1 par morceaux. Étant donné une fonction $u_0 \in H^1(\Omega)$, on désigne par $u_0 + H_0^1(\Omega)$ l'ensemble $\{u_0 + v, v \in H_0^1(\Omega)\}$.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction $u \in u_0 + H_0^1(\Omega)$ tel que :

$$|u|_{1,\Omega} = \inf_{v \in u_0 + H_0^1(\Omega)} |v|_{1,\Omega}.$$

2. Caractériser u comme étant la solution d'un problème aux limites.

Exercice 36 (Formulation faible pour le problème de Dirichlet en 1D) *Corrigé en page 128*

Soit $f \in L^2(]0, 1[)$. On s'intéresse au problème suivant :

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in]0, 1[, \quad (3.36)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \quad (3.37)$$

Donner une formulation faible et une formulation variationnelle de (3.37).

Exercice 37 (Relèvement) *Corrigé en page 129*

Soient a et $b \in \mathbb{R}$, et $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Soient u_0 et u_1 définies de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} par $u_0(x) = a + (b-a)x$ et $u_1(x) = a + (b-a)x^2$. Montrer qu'il existe un unique \tilde{u} (resp. \bar{u}) tel que $u = u_0 + \tilde{u}$ (resp. $v = u_1 + \bar{u}$) soit solution de (3.10). Montrer que $u = v$.
2. Mêmes questions en supposant maintenant que u_0 et u_1 sont des fonctions de $C^2([0, 1])$ telles que $u_0(0) = u_1(0) = a$ et $u_0(1) = u_1(1) = b$.

Exercice 38 (Relèvement en une dimension d'espace) *Suggestions en page 126*

Ecrire une formulation faible pour laquelle on puisse appliquer le théorème de Lax Milgram, dans le cas du problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in [0, 1] \\ u'(0) = 0 \\ u(1) = 1. \end{cases} \quad (3.38)$$

Exercice 39 (Conditions aux limites de Fourier et Neumann) *Corrigé en page 130*

Soit $f \in L^2(]0, 1[)$. On s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{cases} -u_{xx}(x) + u(x) = f(x), & x \in]0, 1[, \\ u'(0) - u(0) = 0, \quad u'(1) = -1. \end{cases} \quad (3.39)$$

Donner une formulation faible et une formulation variationnelle de (3.39) ; y-a-t-il existence et unicité des solutions faibles de (3.39) ?

Exercice 40 (Conditions aux limites de Fourier et Neumann, bis)

Soit $f \in L^2(]0, 1[)$. On s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) - u'(x) + u(x) = f(x), & x \in]0, 1[, \\ u(0) + u'(0) = 0, & u(1) = 1 \end{cases} \quad (3.40)$$

1. Donner une formulation faible du problème de la forme

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(]0, 1[); u(1) = 1, \\ a(u, v) = T(v), \forall v \in H. \end{cases} \quad (3.41)$$

où $H = \{v \in H^1(]0, 1[); v(1) = 0\}$, a et T sont respectivement une forme bilinéaire sur $H^1(]0, 1[)$ et une forme linéaire sur $H^1(]0, 1[)$, à déterminer.

2. Y-a-t-il existence et unicité de solutions de cette formulation faible ?

Exercice 41 (Conditions mixtes) Suggestions en page 126, corrigé en page 131

Soit Ω un ouvert borné \mathbb{R}^d , $d = 1$ ou 2 , de frontière $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, avec $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$; on suppose que la mesure $d - 1$ dimensionnelle de Γ_0 est non nulle, et soit $f \in L^2(\Omega)$. On s'intéresse ici au problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \Gamma_0, \\ \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}(x) = 0, & x \in \Gamma_1, \end{cases} \quad (3.42)$$

où \mathbf{n} est la normale unitaire à $\partial\Omega$ extérieure à Ω .

Donner une formulation faible et une formulation variationnelle de (3.42) telle qu'on puisse appliquer le lemme de Lax-Milgram. (On rappelle que l'inégalité de Poincaré donnée en bas de page 12 page 24 pour les fonctions de $H_0^1(\Omega)$ est encore valable pour les fonctions de $H^1(\Omega)$ dont la trace est nulle sur un sous-ensemble de $\partial\Omega$ de mesure $((d - 1)$ -dimensionnelle) non nulle.)

Exercice 42 (Problème elliptique pour un problème avec conditions mixtes) Corrigé en page 132

Soit Ω un ouvert borné \mathbb{R}^d , $d = 1$ ou 2 , de frontière $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, avec $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$; on suppose que la mesure $d - 1$ dimensionnelle de Γ_0 est non nulle. On s'intéresse ici au problème suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p(x)\nabla u(x)) + q(x)u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = g_0(x), & x \in \Gamma_0, \\ p(x)\nabla u(x) \cdot \mathbf{n}(x) + \sigma u(x) = g_1(x), & x \in \Gamma_1, \end{cases} \quad (3.43)$$

où :

$$f \in L^2(\Omega),$$

$$p \in L^\infty(\Omega), \text{ est telle qu'il existe } \alpha > 0 \text{ t.q. } p(x) \geq \alpha \text{ p.p.}$$

$$q \in L^\infty(\Omega), q \geq 0,$$

$$\sigma \in \mathbb{R}_+,$$

$$g_0 \in L^2(\Gamma_0) \text{ est telle qu'il existe } \tilde{g} \in H^1(\Omega) \text{ t.q. } \gamma(\tilde{g})|_{\Gamma_0} = g_0$$

$$g_1 \in L^2(\Gamma_1),$$

\mathbf{n} est la normale unitaire à $\partial\Omega$ extérieure à Ω .

1. Donner une formulation faible et une formulation variationnelle de (3.43) telle qu'on puisse appliquer le lemme de Lax-Milgram.

2. On suppose dans cette question que $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $q \in C(\overline{\Omega})$, $g_0 \in C(\Gamma_0)$ et $g_1 \in C(\Gamma_1)$. Soit $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Montrer que u est solution faible si et seulement si u est une solution classique de (3.43).

Exercice 43 (Problème de Neumann homogène) Suggestions en page 126

On considère le problème suivant :

$$-\Delta u + u = f \text{ dans } \Omega, \quad (3.44)$$

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Omega \quad (3.45)$$

où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^d de frontière régulière de classe C^2 et de normale unitaire extérieure \mathbf{n} , et $f \in L^2(\Omega)$.

1. Montrer que si u est une solution régulière de (3.45) et $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi + u \varphi) \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx$$

En déduire que u est solution de la formulation faible suivante :

$$u \in H^1(\Omega), \quad (3.46)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (3.47)$$

2. Montrer que si u est une solution régulière de classe C^2 de (3.47) et $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors u est solution de (3.45).

Exercice 44 (Condition inf-sup) *Corrigé en page 133*

Soit V un espace de Hilbert réel de produit scalaire (\cdot, \cdot) induisant une norme $\|\cdot\|$. On se donne $a(\cdot; \cdot)$ une forme bilinéaire continue sur $V \times V$, avec M comme constante de continuité. Soit L une forme linéaire continue sur V . On suppose de plus qu'il existe une solution $u \in V$ au problème suivant :

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V. \quad (3.48)$$

Soit V_h un sous-espace de V de dimension finie. On suppose qu'il existe $\beta_h \in \mathbb{R}_+$ telle que :

$$\inf_{(v_h \in V_h, \|v_h\|=1)} \left(\sup_{(w_h \in V_h, \|w_h\|=1)} (a(v_h; w_h)) \right) \geq \beta_h \quad (3.49)$$

On cherche alors u_h solution de :

$$\begin{aligned} u_h &\in V_h, \\ a(u_h, v_h) &= L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \end{aligned} \quad (3.50)$$

1. Montrer que le problème (3.50) admet une unique solution.
2. Soit u la solution de (3.48) et u_h la solution de (3.50). Montrer que :

$$\|u - u_h\| \leq \left(1 + \frac{M}{\beta_h}\right) \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|. \quad (3.51)$$

Exercice 45 (Condition inf-sup pour un problème mixte)

Soient V et Q deux espaces de Hilbert, on note $(\cdot, \cdot)_V$, $\|\cdot\|_V$ et $(\cdot, \cdot)_Q$, $\|\cdot\|_Q$ leurs produits scalaires et normes respectives, et on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V, p \in Q, \text{ tels que} \\ a(u, v) + b(v, p) = (f, v)_H, \quad \forall v \in V, \\ b(u, q) = (g, q)_Q, \quad \forall q \in Q. \end{cases} \quad (3.52)$$

où a est une forme bilinéaire continue et coercive sur V et b est une application bilinéaire continue de $V \times Q$ dans \mathbb{R} .

Pour (u, p) et (v, q) éléments de $V \times Q$, on pose :

$$\begin{aligned} B(u, p; v, q) &= a(u, v) + b(v, p) + b(u, q), \\ F(v, q) &= (f, v)_H + (g, q)_Q. \end{aligned}$$

et on munit $V \times Q$ d'une norme notée $\|(\cdot, \cdot)\|$, définie par $\|(v, q)\| = \|v\|_V + \|q\|_Q$ pour $(v, q) \in V \times Q$.

1. Montrer que B est une forme bilinéaire continue sur $V \times Q$.

2. Montrer que le problème (3.52) est équivalent au problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u, p) \in V \times Q, \text{ tels que} \\ B(u, p; v, q) = F(v, q), \forall (v, q) \in V \times Q. \end{cases} \quad (3.53)$$

On considère maintenant des espaces d'approximation (par exemple construits par éléments finis). Soient donc $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des espaces de Hilbert de dimension finie tels que $V_n \subset V$ et $Q_n \subset Q$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. On suppose dans cette question que la condition suivante (dite condition "inf-sup") est satisfaite :

$$\text{Il existe } \beta \in \mathbb{R}_+^* \text{ (indépendant de } n) \text{ tel que } \inf_{q \in Q_n} \sup_{\substack{w \in V_n, \\ \|w\|_V \neq 0}} \frac{b(w, q)}{\|w\|_V} \geq \beta \|q\|_Q. \quad (3.54)$$

(a) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\text{Pour tout } q \in Q_n \text{ et } v \in V_n, B(v, q; v, -q) \geq \alpha \|v\|_V^2. \quad (3.55)$$

(b) Soit $(v, q) \in V_n \times Q_n$, montrer qu'il existe $w \in V_n$ tel que $\|w\|_V = \|q\|_Q$ et $b(w, q) \geq \beta \|q\|_Q^2$.
Montrer que pour ce choix de w , on a :

$$B(v, q; w, 0) \geq -M \|v\|_V \|w\|_V + \beta \|q\|_Q^2,$$

où M est la constante de continuité de a .

(c) En déduire qu'il existe des réels positifs C_1 et C_2 indépendants de n tels que

$$B(v, q; w, 0) \geq -C_1 \|v\|_V^2 + C_2 \|q\|_Q^2.$$

(On pourra utiliser, en le démontrant, le fait que pour tout $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0$ et $\epsilon > 0$, on a $a_1 a_2 \leq \frac{1}{\epsilon} a_1^2 + \epsilon a_2^2$.)

(d) Soit $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que si γ est suffisamment petit, on a :

$$B(v, q; v + \gamma w, -q) \geq C_3 [\|v\|_V^2 + \|q\|_Q^2].$$

et

$$\|(v + \gamma w, -q)\| \leq C_4 \|(v, q)\|,$$

où C_3 et C_4 sont deux réels positifs qui ne dépendent pas de n .

(e) En déduire que la condition suivante (dite de stabilité) est satisfaite :

Il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ (indépendant de n) tel que pour tout $(u, p) \in V_n \times Q_n$,

$$\sup_{\substack{(v, q) \in V_n \times Q_n, \\ \|(v, q)\| \neq 0}} \frac{B((u, p); (v, q))}{\|(v, q)\|} \geq \delta \|(u, p)\|. \quad (3.56)$$

4. On suppose maintenant que la condition (3.56) est satisfaite.

(a) Montrer que pour tout $p \in Q$,

$$\sup_{\substack{(v, q) \in V_n \times Q_n, \\ \|(v, q)\| \neq 0}} \frac{b(v, p)}{\|(v, q)\|} \geq \delta \|p\|_Q.$$

(b) En déduire que pour tout $p \in Q$,

$$\sup_{\substack{(v, q) \in V_n \times Q_n, \\ \|(v, q)\| \neq 0}} \frac{b(v, p)}{\|v\|_V} \geq \delta \|p\|_Q.$$

5. Déduire des questions précédentes que la condition (3.54) est satisfaite si et seulement si la condition (3.56) est satisfaite.

Exercice 46 (Volumes finis vus comme des éléments finis non conformes) *Suggestions en page 126, corrections en page 134*

Soit un ouvert borné polygonal de \mathbb{R}^2 , et \mathcal{T} un maillage admissible au sens des volumes finis (voir page 1.5.2 page 28) de Ω .

1. Montrer que la discrétisation par volumes finis de (3.1) se ramène à chercher $(u_K)_{K \in \mathcal{T}}$, qui vérifie :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, \sigma = K|L} \tau_{\sigma} (u_L - u_K) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}, \sigma \in \mathcal{E}_K} \tau_{\sigma} u_K = m(K) f_K \quad (3.57)$$

où \mathcal{E}_{int} représente l'ensemble des arêtes internes (celles qui ne sont pas sur le bord) \mathcal{E}_{ext} l'ensemble des arêtes externes (celles qui sont sur le bord), et

$$\tau_{\sigma} = \begin{cases} \frac{m(\sigma)}{d_{K,\sigma} + d_{L,\sigma}} & \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, \sigma = K|L, \\ \frac{m(\sigma)}{d_{K,\sigma}} & \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}, \sigma \in \mathcal{E}_K, \end{cases} \quad (3.58)$$

(voir figure 1.6 page 28).

2. On note $H_{\mathcal{T}}(\Omega)$ le sous-espace de $L^2(\Omega)$ formé des fonctions constantes par maille (c.à.d. constantes sur chaque élément de \mathcal{T}). Pour $u \in H_{\mathcal{T}}(\Omega)$, on note u_K la valeur de u sur K . Montrer que $(u_K)_{K \in \mathcal{T}}$ est solution de (3.58) si et seulement si $u \in H_{\mathcal{T}}(\Omega)$ est solution de :

$$\begin{cases} u \in H_{\mathcal{T}}(\Omega), \\ a_{\mathcal{T}}(u, v) = T_{\mathcal{T}}(v), \forall v \in H_{\mathcal{T}}(\Omega), \end{cases} \quad (3.59)$$

où $a_{\mathcal{T}}$ est une forme bilinéaire sur $H_{\mathcal{T}}(\Omega)$ (à déterminer), et $T_{\mathcal{T}}$ est une forme linéaire sur $H_{\mathcal{T}}(\Omega)$ (à déterminer).

Exercice 47 (Discrétisation du bi-laplacien) *Corrigé en page ??*.

La modélisation d'une poutre en charge encastrée à ses deux extrémités amène à s'intéresser au problème d'ordre 4 suivant (dit problème "biharmonique") :

$$\begin{aligned} u^{(4)}(x) &= f(x), \quad x \in]0, 1[, \\ u(0) &= 0, \quad u'(0) = 0, \\ u(1) &= 0, \quad u'(1) = 0. \end{aligned} \quad (3.60)$$

où $u^{(4)}$ désigne la dérivée quatrième de u par rapport à x , et f est une fonction continue.

Le problème continu

1. On suppose (dans cette question seulement) que $f \equiv 1$. Calculer la solution exacte \bar{u} de (3.60), et la représenter graphiquement (grossièrement).

2. Soit $H^2(]0, 1[)$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable dont les dérivées (faibles) première et seconde sont également de carré intégrable :

$$H^2(]0, 1[) = \{u \in L^2(]0, 1[), u' \in L^2(]0, 1[) \text{ et } u'' \in L^2(]0, 1[).\}$$

On rappelle également que les fonctions de $H^1(]0, 1[)$ sont continues sur $[0, 1]$.

2.1 Montrer que $H^2(]0, 1[) \subset C^1([0, 1])$.

On définit alors :

$$H_0^2(]0, 1[) = \{u \in H^2(]0, 1[); u(0) = u(1) = 0, u'(0) = u'(1) = 0\}.$$

2.2 Montrer que si $u \in C^4([0, 1])$ est solution de (3.60), alors u est solution de :

$$\begin{aligned} u &\in H_0^2(]0, 1[) \\ \int_0^1 u''(x)v''(x) dx &= \int_0^1 f(x)v(x) dx, \quad \forall v \in H_0^2(]0, 1[, \end{aligned} \quad (3.61)$$

2.3 Montrer que réciproquement, si u est solution de (3.61) et $u \in C^4([0, 1])$, alors u est solution de (3.60).

On admettra que le problème (3.61) admet une solution unique.

On cherche maintenant à trouver une solution approchée de la solution de (3.60) ou (3.61).

Discrétisation par différences finies

3. Soit $M > 2$ et $h = \frac{1}{M+1}$. On construit une subdivision de $[0, 1]$, notée $(y_k)_{k=0, \dots, M+1}$, définie par : $y_i = ih$ pour $i = 0, \dots, M+1$.

On note u_i l'inconnue discrète associée au point y_i , $i = 0, \dots, M+1$.

3.1 Soient $\varphi \in C^5(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, écrire les développements limités en x de $\varphi(x+2h)$, $\varphi(x+h)$, $\varphi(x-h)$, et $\varphi(x-2h)$ à l'ordre 5 en h .

3.2 Par une combinaison linéaire adéquate, en déduire pour $i = 2, \dots, M-1$, une approximation par différences finies de $u^{(4)}(y_i)$ en fonction de u_{i-2} , u_{i-1} , u_i , u_{i+1} et u_{i+2} qui soit consistante d'ordre 2.

3.3 Ecrire un schéma de différences finies consistant pour la discrétisation de (3.60) sous la forme

$$(\delta^{(4)}u)_i = f(y_i), \quad i = 2, \dots, M-1, \quad (3.62)$$

$$u_0 = u_1 = 0, \quad (3.63)$$

$$u_M = u_{M+1} = 0, \quad (3.64)$$

où $(\delta^{(4)}u)_i$ est l'approximation consistante de $u^{(4)}(y_i)$ construite avec les inconnues discrètes u_{i-2} , u_{i-1} , u_i , u_{i+1} et u_{i+2} à la question 3.2.

Ecrire le schéma sous forme matricielle, et commenter la structure de la matrice du système linéaire à résoudre.

3.4 Soit $\delta^{(4)}u \in \mathbb{R}^{M-2}$ dont les composantes sont les valeurs $(\delta^{(4)}u)_i$ pour $i = 2, \dots, M-1$. Notons $(\delta^{(2)}u)_i = \frac{1}{h}(u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i)$ la discrétisation habituelle de $u''(y_i)$ par différences finies. A-t'on $(\delta^{(4)}u)_i = (\delta^{(2)}(\delta^{(2)}u))_i$ pour tout $i = 2, \dots, M-1$?

Dans toute la suite, on considère le maillage suivant : pour $N > 2$ et $h = 1/N$, on définit les N mailles $(K_i)_{i=1, \dots, N}$ par $K_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$, avec $x_{i+1/2} = ih$ pour $i = 0, \dots, N$, et on note $x_i = (i - 1/2)h$ pour $i = 1, \dots, N$ les centres des mailles. On pose également $x_0 = 0$ et $x_{N+1} = 1$. On définit également des mailles "décalées" $K_{i+1/2} =]x_i, x_{i+1}[$, pour $i = 0, \dots, N$.

Discrétisation par un schéma volumes finis

4. Soit $(u_i)_{i=1, N} \in \mathbb{R}^N$ et u la fonction de $]0, 1[$ dans \mathbb{R} , constante par morceaux, définie par

$$u(x) = u_i \text{ pour tout } x \in K_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[.$$

On définit $D_h u$ comme la fonction constante par morceaux sur les mailles décalées, définie par

$$D_h u(x) = \begin{cases} D_{i+1/2} u = \frac{1}{h}(u_{i+1} - u_i) \text{ pour tout } x \in K_{i+1/2} =]x_i, x_{i+1}[\text{ pour } i = 1, \dots, N-1, \\ D_{1/2} u = \frac{2}{h} u_1 \text{ pour tout } x \in K_{1/2} =]x_0, x_1[, \\ D_{N+1/2} u = -\frac{2}{h} u_N \text{ pour tout } x \in K_{N+1/2} =]x_N, x_{N+1}[, \end{cases}$$

Enfin on définit $D_h^2 u$ comme la fonction constante par morceaux sur les mailles K_i , définie par :

$$D_h^2 u(x) = D_i^2 u = \frac{1}{h}(D_{i+1/2} u - D_{i-1/2} u) \text{ pour tout } x \in K_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[\text{ pour } i = 1, \dots, N.$$

4.a. Calculer $D_i^2 u$ en fonction des valeurs u_j , $j = 1, \dots, N$.

4.b En déduire, pour $k = 1, \dots, N$, l'expression de la fonction $D_h^2 \chi_k$, où $\chi_k \in \mathbb{R}^N$ est la fonction caractéristique de la maille K_k , c.à.d :

$$\chi_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in K_k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note H_h l'espace des fonctions constantes sur les mailles K_i , $i = 1, \dots, N$, et $H_{h,0}$ les fonctions de H_h nulles sur les mailles 1 et N . On considère le schéma numérique défini par la forme faible discrète suivante :

$$\text{Trouver } u \in H_{h,0} = \{u \in H_h; u_1 = u_N = 0\}, \quad (3.65)$$

$$\int_0^1 D_h^2 u(x) D_h^2 v(x) dx = \int f(x) v(x) dx, \quad \forall v \in H_{h,0}. \quad (3.66)$$

4.c En prenant les fonctions caractéristiques des mailles K_i comme fonctions tests dans (3.66), montrer que le schéma (3.65)-(3.66) s'écrit aussi :

$$u \in H_{h,0} \quad (3.67)$$

$$F_{i+1/2}(D_h^2 u) - F_{i-1/2}(D_h^2 u) = \int_{K_i} f(x) dx, i = 1, \dots, N, \quad (3.68)$$

$$F_{i+1/2}(D_h^2 u) = \frac{1}{h}(D_{i+1}^2 u - D_i^2 u), i = 1, \dots, N-1, \quad (3.69)$$

$$F_{1/2}(D_h^2 u) = -\frac{3}{h}D_1^2 u \text{ et } F_{N+1/2}(D_h^2 u) = -\frac{3}{h}D_N^2 u. \quad (3.70)$$

$$(3.71)$$

Expliquer pourquoi ce schéma peut prétendre à l'appellation "volumes finis".

Quelques propriétés du schéma volumes finis

On se place ici sous les hypothèses et notations de la discrétisation par volumes finis.

5. EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA SOLUTION DISCRÈTE.

5.a Montrer que

$$\forall u \in H_{h,0}, \int_0^1 u(x) D_h^2 u(x) dx = \int_0^1 D_h u(x) D_h u(x) dx.$$

5.b Soit $u \in H_{h,0}$; montrer que si $D_i u = 0$ pour tout $i = 1, \dots, N$ alors $u \equiv 0$.

5.c En déduire que si $f = 0$, et si u est solution de (3.65)-(3.66) alors $u = 0$.

5.d En déduire l'existence et l'unicité de u solution de (3.65)-(3.66).

6. STABILITÉ.

6.1 (Poincaré discret sur u). Soit $u \in H_h$. Montrer que $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|D_h u\|_{L^2(\Omega)}$.

6.2 (Poincaré discret sur $D_h u$). Soit $u \in H_{h,0}$. Montrer que $\|D_h u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|D_h^2 u\|_{L^2(\Omega)}$.

6.3 (Estimation a priori sur la solution). Soit $u \in H_{h,0}$ solution de (3.65)-(3.66). Montrer que $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$.

Discrétisation par un schéma éléments finis non conformes

7. On considère maintenant les fonctions de forme ϕ_k des éléments finis P_1 associées aux noeuds $x_k, k = 1, \dots, N$.

7.1. Donner l'expression des fonctions de forme ϕ_k pour $k = 1, \dots, N$.

Soit V_h l'espace engendré par les fonctions ϕ_1, \dots, ϕ_N et $V_{h,0}$ l'espace engendré par les fonctions $\phi_2, \dots, \phi_{N-1}$.

Pour $\tilde{v} \in V_{h,0}$, on définit $\tilde{D}_h^2 \tilde{v}$ comme la fonction de H_h définie par :

$$\tilde{D}_h^2 \tilde{v}(x) = -\frac{1}{h} \sum_{i=2}^{N-1} \tilde{v}(x_i) \int_0^1 \phi_i'(x) \phi_k'(x) dx, \text{ pour tout } x \in K_k, k = 1, \dots, N.$$

On considère alors le schéma suivant pour l'approximation de (3.61).

$$\text{Trouver } \tilde{u} \in V_{h,0}, \quad (3.72)$$

$$\int_0^1 \tilde{D}_h^2 \tilde{u}(x) \tilde{D}_h^2 \tilde{v}(x) dx = \int f(x) \tilde{v}(x) dx, \forall \tilde{v} \in V_{h,0}. \quad (3.73)$$

7.2 Expliquer pourquoi le schéma (3.72)-(3.73) peut prétendre à l'appellation "éléments finis non conformes".

7.3 Soit $(u_i)_{i=2, \dots, N-1} \in \mathbb{R}^{N-2}$ et soient $u = \sum_{k=2}^{N-1} u_k \chi_k \in H_{h,0}$ et $\tilde{u} = \sum_{k=2}^{N-1} u_k \phi_k \in V_{h,0}$.

(i) Montrer que \tilde{u}' est une fonction constante par morceaux sur les mailles décalées et comparer \tilde{u}' à $D_h u$.

(ii) Calculer $\tilde{D}_h^2 \tilde{u}$ et comparer $\tilde{D}_h^2 \tilde{u}$ à $D_h^2 u$.

3.5 Suggestions pour les exercices

Exercice 35 page 119

Rappel ; par définition, l'ensemble $u_0 + H_0^1$ est égal à l'ensemble $\{v = u_0 + w, w \in H_0^1\}$

1. Montrer que le problème s'écrit sous la forme : $J(u) \leq J(v), \forall v \in H$, ou H est un espace de Hilbert, avec $J(v) = a(v, v)$, où a est une forme bilinéaire symétrique définie positive.
2. Prendre une fonction test à support compact dans la formulation faible.

Exercice 38 page 119

Considérer les espaces

$$H_{1,1}^1 = \{v \in H^1(]0, 1[); v(1) = 1\} \quad \text{et}$$

$$H_{1,0}^1 = \{v \in H^1(]0, 1[); v(1) = 0\}.$$

Exercice 43 page 120

1. On rappelle que l'espace des fonctions de $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ restreintes à Ω est dense dans $H^1(\Omega)$.
2. On admettra que l'image de $H^1(\Omega)$ par l'application trace est dense dans $L^2(\partial\Omega)$.

Exercice 41 page 120

Considérer comme espace de Hilbert l'ensemble $\{u \in H^1(\Omega); u = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$.

Exercice 46 page 123

1. Intégrer l'équation sur la maille et approcher les flux sur les arêtes par des quotients différentiels.
2. Pour montrer que (3.57) entraîne (3.59), multiplier par v_K , où $v \in H_{\mathcal{T}}(\Omega)$, et développer. Pour montrer la réciproque, écrire u comme combinaison linéaire des fonctions de base de $H_{\mathcal{T}}(\Omega)$, et prendre pour v la fonction caractéristique de la maille K . (3.57)

3.6 Corrigés des exercices

Exercice 35 page 119

1. Par définition, on sait que $|u|_{1,\Omega} = \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N |\partial_i u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$, où $\partial_i u$ désigne la dérivée partielle de u par rapports à sa i -ème variable. Attention ceci $|\cdot|_{1,\Omega}$ définit une semi-norme et non une norme sur l'espace $H^1(\Omega)$. Cependant sur $H_0^1(\Omega)$ c'est bien une norme, grâce à l'inégalité de Poincaré. On rappelle que $H_0^1(\Omega) = \text{Ker}(\gamma) = \{u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \gamma(u) = 0\}$, où γ est l'opérateur de trace linéaire et continu de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ (voir théorème 3.2 page 99). Le problème consiste à minimiser $\left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N |\partial_i u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ sur $u_0 + H_0^1(\Omega)$. Tentons de nous ramener à minimiser une certaine fonctionnelle sur $H_0^1(\Omega)$. Soit $v \in u_0 + H_0^1(\Omega)$. Alors $v = u_0 + w$ avec $w \in H_0^1(\Omega)$, et donc :

$$\begin{aligned}
|v|_{1,\Omega}^2 &= |u_0 + w|_{1,\Omega}^2 \\
&= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N |\partial_i(u_0 + w)|^2 dx \\
&= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \left| (\partial_i u_0)^2 + (\partial_i w)^2 + 2(\partial_i u_0)(\partial_i w) \right| dx \\
&= |u_0|_{1,\Omega}^2 + |w|_{1,\Omega}^2 + 2 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N |\partial_i u_0 \partial_i w| dx
\end{aligned}$$

Ainsi chercher à minimiser $|v|_{1,\Omega}$ sur $u_0 + H_0^1(\Omega)$ revient à minimiser J sur $H_0^1(\Omega)$, où J est définie par :

$$J(w) = \inf_{H_0^1(\Omega)} 2 \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N |\partial_i u_0 \partial_i w| dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (\partial_i w)^2 dx \right).$$

Pour montrer l'existence et l'unicité du minimum de J , nous allons mettre ce problème sous une forme faible, puis utiliser le théorème de Lax-Milgram pour en déduire l'existence et l'unicité d'une solution faible, et finalement conclure que la fonctionnelle $J(w)$ admet un unique inf. On pose :

$$a(w, v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (\partial_i w \partial_i v) dx, \quad \forall w, v \in H_0^1(\Omega)$$

et

$$L(v) = - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (\partial_i u_0 \partial_i v) dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Voyons si les hypothèses de Lax-Milgram sont vérifiées. La forme $a(w, v)$ est clairement symétrique, on peut changer l'ordre de w et de v dans l'expression sans changer la valeur de l'intégrale. La forme $a(w, v)$ est bilinéaire. En effet, elle est linéaire par rapport au premier argument, puisque : $\forall u, v, w \in H_0^1(\Omega)$ et $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a : $a(\lambda w + \mu u, v) = \lambda a(w, v) + \mu a(u, v)$. Ainsi par symétrie, elle est aussi linéaire par rapport au second argument. Donc elle est bien bilinéaire. Pour montrer que la forme $a(w, v)$ est continue, on utilise la caractérisation de la continuité des applications bilinéaires. On va donc montrer l'existence de $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $|a(u, v)| \leq C \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$ pour tous $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Or, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\begin{aligned}
|a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (\partial_i u \partial_i v) dx \right| \\
&\leq \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (\partial_i u)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (\partial_i v)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}.
\end{aligned}$$

La forme a est donc bien continue. Montrons alors qu'elle est coercive, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H^1}^2$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
a(v, v) &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (\partial_i v(x))^2 dx \\
&= \int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla v(x) dx \\
&\geq \frac{1}{1 + \text{diam}(\Omega)^2} \|v\|_{H^1}^2,
\end{aligned}$$

grâce à l'inégalité de Poincaré, qu'on rappelle ici :

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c(\Omega) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.74)$$

Donc a est bien une forme bilinéaire, symétrique, continue et coercive. Par le même genre de raisonnement, on montre facilement que L est linéaire et continue. Ainsi toutes les hypothèses de Lax-Milgram sont vérifiées, donc le problème :

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } a(u, v) = L(v) \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega)$$

a une unique solution dans $H_0^1(\Omega)$. De plus, comme a est symétrique, la fonctionnelle J admet un unique minimum.

2. On va maintenant caractériser u comme étant la solution d'un problème aux limites. Soit $\varphi \in D(\Omega)$, donc φ est à support compact dans Ω . On a :

$$a(u, \varphi) = L(\varphi) \quad \forall \varphi \in D(\Omega),$$

et donc :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla(x) \varphi dx = - \int_{\Omega} \nabla u_0(x) \nabla(x) \varphi(x) dx.$$

Comme u et $u_0 \in H^1(\Omega)$, et comme φ est régulière, on peut intégrer par parties ; en remarquant que φ est nulle sur $\partial\Omega$, on a donc :

$$- \int_{\Omega} \Delta u(x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} \Delta u_0(x) \varphi(x) dx.$$

On en déduit que $-\Delta u = \Delta u_0$. Comme $u \in H_0^1(\Omega)$, ceci revient à résoudre le problème aux limites $\tilde{u} = u - u_0 \in H^1(\Omega)$, tel que $-\Delta \tilde{u} = 0$ dans Ω et $\tilde{u} = u_0$ sur $\partial\Omega$.

Exercice 36 page 119 (Formulation faible du problème de Dirichlet)

Soit $\varphi \in C_c^\infty([0, 1])$, on multiplie la première équation de (3.37), on intègre par parties et on obtient :

$$\int_0^1 u'(x) \varphi'(x) dx = \int_0^1 f(x) \varphi(x) dx. \quad (3.75)$$

Pour trouver une formulation faible (ou variationnelle) il faut commencer par trouver un espace de Hilbert pour les fonctions duquel (3.75) ait un sens, et qui soit compatible avec les conditions aux limites. Comme $f \in L^2(]0, 1[)$, le second membre de (3.75) est bien défini dès que $\varphi \in L^2(]0, 1[)$.

De même, le premier membre de (3.75) est bien défini dès que $u' \in L^2(]0, 1[$ et $\varphi' \in L^2(]0, 1[)$.

Comme de plus, on doit avoir $u = 0$ en 0 et en 1, il est naturel de choisir $H = H_0^1(]0, 1[) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in L^2(]0, 1[; Du \in L^2(]0, 1[) \text{ et } u(0) = u(1) = 0\}$

(Rappelons qu'en une dimension d'espace $H^1(]0, 1[) \subset C([0, 1])$ et donc $u(0)$ et $u(1)$ sont bien définis).

Une formulation faible naturelle est donc :

$$\begin{cases} u \in H = \{u \in H_0^1(\Omega); v(0) = v(1) = 0\}, \\ a(u, v) = T(v), \forall v \in H, \end{cases}$$

$$\text{où } a(u, v) = \int_0^1 u'(x) v'(x) dx \text{ et } T(v) = \int_0^1 f(x) v(x) dx.$$

La formulation variationnelle associée (notons que a est clairement symétrique), s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H, \\ J(u) = \min_{v \in H} J(v) \end{cases}$$

$$\text{avec } J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - T(v)$$

Le fait que a soit une forme bilinéaire continue symétrique et coercive et que $T \in H'$ a été prouvé (dans le cas plus général de la dimension quelconque) lors de la démonstration de la proposition 3.7 page 101.

Exercice 37 page 119

1. Comme $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et comme $-u'' = f$, on a $u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Or $u_0 \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u_0'' = 0$; de même, $u_1 \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u_1'' = 2(b - a)$.

Les fonctions \tilde{u} et \bar{u} doivent donc vérifier :

$$\begin{cases} -\tilde{u}'' = f \\ \tilde{u}(0) = 0 \\ \tilde{u}(1) = 0. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\bar{u}'' = f + 2(b - a) \\ \bar{u}(0) = 0 \\ \bar{u}(1) = 0. \end{cases}$$

Donc \tilde{u} est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \tilde{u} \in H_0^1(\Omega) \\ a(u, \varphi) = \tilde{T}(\varphi), \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

avec $a(u, \varphi) = \int_0^1 u'(x)\varphi'(x)dx$ et $\tilde{T}(\varphi) = \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx$, et \bar{u} est l'unique solution du problème.

$$\begin{cases} \bar{u} \in H_0^1(\Omega) \\ a(\bar{u}, \varphi) = \bar{T}(\varphi), \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

avec $\bar{T}(\varphi) = \int_0^1 (f(x) + 2(b - a))\varphi(x)dx$.

Montrons maintenant que $u = v$. Remarquons que $w = u - v$ vérifie

$$\begin{cases} w'' = 0 \\ w(0) = w(1) = 0 \end{cases}$$

ce qui prouve que w est solution de

$$\begin{cases} w \in H_0^1(\Omega) \\ a(w, \varphi) = 0, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

ce qui prouve que $w = 0$.

2. Le même raisonnement s'applique pour u_0 et $u_1 \in C^2([0, 1])$ tel que

$$u_0(0) = u_1(0) = a \text{ et } u_1(0) = u_1(1) = b.$$

Exercice 38 page 119

On introduit les espaces :

$$H_{1,1}^1 = \{v \in H^1(]0, 1[); v(1) = 1\}$$

$$H_{1,0}^1 = \{v \in H^1(]0, 1[); v(1) = 0\}$$

Soit $u_0 :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, définie par $u_0(x) = x$. On a bien $u_0(1) = 1$, et $u_0 \in H_{1,1}^1$.

Cherchons alors u sous la forme $u = u_0 + \tilde{u}$, avec $\tilde{u} \in H_{1,0}^1$.

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \forall v \in H_{1,0}^1.$$

Comme $v(1) = 0$ et $u'(0) = 0$, on obtient donc :

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx,$$

ou encore :

$$\int_0^1 \tilde{u}'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx - \int_0^1 u_0'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx - \int_0^1 v'(x)dx.$$

car $u_0' = 1$.

Exercice 39 page 119

1. Soit $v \in C_c^\infty([0, 1])$, on multiplie la première équation de (3.40), on intègre par parties et on obtient :

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

En tenant compte des conditions aux limites sur u en 0 et en 1, on obtient :

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u(x)v(x)dx + u(0)v(0) = \int_0^1 f(x)v(x)dx - v(1). \quad (3.76)$$

Pour trouver une formulation faible (ou variationnelle) il faut commencer par trouver un espace de Hilbert pour les fonctions duquel (3.76) ait un sens, et qui soit compatible avec les conditions aux limites. Comme $f \in L^2(]0, 1[)$, le second membre de (3.76) est bien défini dès que $v \in L^2(]0, 1[)$.

De même, le premier membre de (3.76) est bien défini dès que $u \in H^1(]0, 1[$ et $v \in H^1(]0, 1[) \stackrel{def}{=} \{u \in L^2(]0, 1[; Du \in L^2(]0, 1[)$. Il est donc naturel de choisir $H = H(]0, 1[)$. On obtient ainsi la formulation faible suivante :

$$\begin{cases} u \in H = \{u \in H(\Omega)\}, \\ a(u, v) = T(v), \forall v \in H, \end{cases}$$

$$\text{où } a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u(x)v(x)dx + u(0)v(0) \text{ et } T(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx - v(1).$$

La formulation variationnelle associée (notons que a est clairement symétrique), s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H, \\ J(u) = \min_{v \in H} J(v) \end{cases}$$

$$\text{avec } J(v) = \frac{1}{2}a(u, v) - T(v)$$

Pour montrer l'existence et l'unicité des solutions de (3.76), on cherche à appliquer le théorème de Lax–Milgram. On remarque d'abord que T est bien une forme linéaire sur H , et que de plus, par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, :

$$|T(v)| = \left| \int_0^1 f(x)v(x)dx \right| + |v(1)| \leq \|f\|_{L^2(]0, 1[)} \|v\|_{L^2(]0, 1[)} + |v(1)|. \quad (3.77)$$

Montrons maintenant que $|v(1)| \leq 2\|v\|_{H^1(]0, 1[)}$. Ce résultat est une conséquence du théorème de trace, voir cours d'EDP. Dans le cas présent, comme l'espace est de dimension 1, la démonstration est assez simple en remarquant que comme $v \in H^1(]0, 1[)$, on peut écrire que v est intégrale de sa dérivée. On a en particulier :

$$v(1) = v(x) + \int_x^1 v'(t)dt,$$

et donc par l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$|v(1)| = |v(x)| + \int_x^1 |v'(t)|dt \leq |v(x)| + \|v'\|_{L^2(]0, 1[)}.$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et 1 on obtient :

$$|v(1)| \leq \|v(x)\|_{L^1(]0, 1[)} + \|v'\|_{L^2(]0, 1[)}.$$

Or $\|v\|_{L^1(]0, 1[)} \leq \|v(x)\|_{L^2(]0, 1[)}$. De plus

$$\|v\|_{L^2(]0, 1[)} + \|v'\|_{L^2(]0, 1[)} \leq 2 \max(\|v(x)\|_{L^2(]0, 1[)}, \|v'\|_{L^2(]0, 1[)})$$

on a donc

$$\begin{aligned} \left(\|v\|_{L^2(]0, 1[)} + \|v'\|_{L^2(]0, 1[)} \right)^2 &\leq 4 \max(\|v(x)\|_{L^2(]0, 1[)}^2, \|v'\|_{L^2(]0, 1[)}^2) \\ &\leq 4(\|v\|_{L^2(]0, 1[)}^2 + \|v'\|_{L^2(]0, 1[)}^2). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$|v(1)| \leq \|v\|_{L^2(]0,1])} + \|v'\|_{L^2(]0,1])} \leq 2\|v\|_{H^1(]0,1])}.$$

En reportant dans (3.77), on obtient :

$$|T(v)| \leq (\|f\|_{L^2(]0,1])} + 2)\|v\|_{H^1(]0,1])}$$

ce qui montre que T est bien continue.

Remarquons que le raisonnement effectué ci-dessus pour montrer que $|v(1)| \leq 2\|v\|_{H^1(]0,1])}$ s'applique de la même manière pour montrer que

$$|v(a)| \leq 2\|v\|_{H^1(]0,1])} \text{ pour tout } a \in [0, 1]. \quad (3.78)$$

Ceci est une conséquence du fait que $H^1(]0, 1])$ s'injecte continûment dans $C([0, 1])$.

Il est clair que a est une forme bilinéaire symétrique (notons que le caractère symétrique n'est pas nécessaire pour l'application du théorème de Lax–Milgram). Montrons que a est continue. On a :

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \int_0^1 |u'(x)v'(x)| dx + \int_0^1 |u(x)| |v(x)| dx + |u(0)| |v(0)| \\ &\leq \|u'\|_{L^2(]0,1])} \|v'\|_{L^2(]0,1])} + \|u\|_{L^2(]0,1])} \|v\|_{L^2(]0,1])} + |u(0)| |v(0)| \end{aligned}$$

Grâce à (3.78), on en déduit que

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \|u'\|_{L^2(]0,1])} \|v'\|_{L^2(]0,1])} + \|u\|_{L^2(]0,1])} \|v\|_{L^2(]0,1])} + 4\|u\|_{H^1(]0,1])} \|v\|_{H^1(]0,1])} \\ &\leq 6\|u\|_{H^1(]0,1])} \|v\|_{H^1(]0,1])}. \end{aligned}$$

On en déduit que a est continue. Soit $u \in H^1(]0, 1])$, Par définition de a , on a :

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_0^1 (u'(x))^2 dx + \int_0^1 (u(x))^2 dx + u(0)^2 \\ &\geq \|u\|_{H^1(]0,1])}^2. \end{aligned}$$

Ceci prouve que la forme a est coercive. Par le théorème de Lax–Milgram, on en déduit l'existence et l'unicité des solutions faibles de (3.76).

Exercice 41 page 120

Soit $\varphi \in H = \{v \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$.

Multiplions la première équation de (3.42) par $\varphi \in H$. On obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx + \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} \nabla u \cdot n(x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx$$

et comme $\nabla u \cdot n = 0$ sur Γ_1 et $\varphi = 0$ sur Γ_0 , on obtient donc

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx.$$

On obtient donc la formulation faible.

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H; \\ \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) u(x) dx. \end{cases}$$

Notons que cette formulation ne diffère de la formulation faible du problème (3.1) que par la donnée de la condition aux limites de Dirichlet sur Γ_0 et non $\partial\Omega$ dans l'espace H . La condition de Neumann homogène est implicitement prise en compte dans la formulation faible.

La démonstration du fait que cette formulation satisfait les hypothèses du théorème de Lax–Milgram est similaire à celle de la proposition 3.7 en utilisant, pour la coercivité, le fait que les fonctions à trace nulle sur une partie du bord de Ω (de mesure non nulle) vérifient encore l'inégalité de Poincaré.

Exercice 42 page 120

1. Multiplions la première équation de (3.43) par $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ et intégrons sur Ω . Par la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega} p(x) \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx - \int_{\partial\Omega} p(x) \nabla u(x) \cdot n(x) \varphi(x) dx + \int_{\Omega} q(x) u(x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx.$$

En tenant compte des conditions aux limites sur u et en prenant φ nulle sur Γ_0 , on obtient alors :

$$a(u, \varphi) = T(\varphi)$$

avec :

$$a(u, \varphi) = \int_{\Omega} (p(x) \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) + q(x) u(x) \varphi(x)) dx + \int_{\Gamma_1} \sigma(x) u(x) \varphi(x) d\gamma(x), \quad (3.79)$$

et

$$T(\varphi) = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx + \int_{\Gamma_1} g_1(x) \varphi(x) d\gamma(x). \quad (3.80)$$

Pour assurer la condition aux limites de type Dirichlet non homogène, on choisit donc $u \in H_{\Gamma_0, g_0}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); u = g_0 \text{ sur } \Gamma_0\}$, qu'on peut aussi décomposer en : $u = \tilde{u} + u_0$ avec $\tilde{u} \in H_{\Gamma_0, g_0}^1(\Omega)$ ("relèvement" de u) et $u_0 \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); u = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$. Une formulation faible naturelle est alors :

$$\begin{cases} u \in H_{\Gamma_0, g_0}^1(\Omega) \\ a(u, v) = T(v), \forall v \in H_{\Gamma_0, 0}^1(\Omega), \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} u = u_0 + \tilde{u} \\ \tilde{u} \in H_{\Gamma_0, 0}^1(\Omega) \\ a(\tilde{u}, v) = T(v) - T(u_0), \forall v \in H_{\Gamma_0, 0}^1(\Omega), \end{cases} \quad (3.81)$$

L'espace $H = H_{\Gamma_0, 0}^1(\Omega)$ muni de la norme H^1 est un espace de Hilbert. Il est facile de montrer que l'application a définie de $H \times H$ dans \mathbb{R} est bilinéaire. Montrons qu'elle est continue ; soient $(u, v) \in H \times H$, alors

$$a(u, v) \leq \|p\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|q\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \sigma \|\gamma(u)\|_{L^2(\Omega)} \|\gamma(v)\|_{L^2(\partial\Omega)}.$$

Par le théorème de trace, il existe C_Ω ne dépendant que de Ω tel que

$$\|\gamma(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_\Omega \|u\|_{H^1(\Omega)} \text{ et } \|\gamma(v)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_\Omega \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

On en déduit que

$$a(u, v) \leq (\|p\|_{L^\infty(\Omega)} + \|q\|_{L^\infty(\Omega)} + \sigma C_\Omega^2) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

ce qui montre que a est continue. La démonstration de la coercivité de a est similaire à la démonstration du lemme 3.15 page 105. Enfin, il est facile de voir que T définie par (3.80) est une forme linéaire. On en déduit que le théorème de Lax-Milgram s'applique.

2. On a déjà vu à la question précédente que si u est solution de (3.81), alors u est solution de (3.43). Il reste à démontrer la réciproque. Soit donc u solution de (3.81), et soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega) \subset H$. En utilisant la formule de Green, et en notant que φ est nulle sur $\partial\Omega$, on obtient :

$$\int_{\Omega} (-\operatorname{div}(p \nabla u)(x) + q(x) u(x) - f(x)) \varphi(x) dx = 0, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Comme $u \in C^2(\bar{\Omega})$, on en déduit que :

$$-\operatorname{div}(p \nabla u)(x) + q(x) u(x) - f(x) = 0, \forall x \in \Omega.$$

Comme $u \in H_{\Gamma_0, g_0}^1$ et $u \in C^2(\bar{\Omega})$, on a aussi $u = g_0$ sur Γ_0 . Prenons maintenant $\varphi \in H_{\Gamma_0, 0}^1$ on a :

$$\int_{\Omega} p(x) \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx + \int_{\Omega} q(x) u(x) \varphi(x) dx + \int_{\Gamma_1} \sigma(x) u(x) \varphi(x) d\gamma(x) = \int_{\Omega} f(x) dx + \int_{\Gamma_1} g(x) \varphi(x) d\gamma(x).$$

Par intégration par parties, il vient donc :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\operatorname{div}(p(x)\nabla u(x))\varphi(x)dx + \int_{\Gamma_1} p(x)\nabla u(x)\cdot n(x)\varphi(x)dx + \int_{\Gamma_1} \sigma(x)u(x)\varphi(x)d\gamma(x) + \int_{\Omega} q(x)u(x)\varphi(x)dx &= \\ &= \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx + \int_{\Gamma_1} g_1(x)\varphi(x)d\gamma(x). \end{aligned}$$

Or on a montré que $-\operatorname{div}(p\nabla u) + qu = 0$. On a donc :

$$\int_{\Gamma_1} (p(x)\nabla u(x)\cdot n(x) + \sigma u(x) - g_1(x))\varphi(x)d\gamma(x) = 0, \quad \forall \varphi \in H_{\Gamma_0, g_0}^1.$$

On en déduit que :

$$p\nabla u \cdot n + \sigma u - g_1 = 0 \text{ sur } \Gamma_1.$$

Donc u vérifie bien (3.43).

Corrigé de l'exercice 44 page 121

1. Pour montrer que le problème (3.50) admet une unique solution, on aimerait utiliser le théorème de Lax-Milgram. Comme $V_h \subset V$ un Hilbert, que a une forme bilinéaire continue sur $V \times V$, et que L est une forme linéaire continue sur V , il ne reste qu'à montrer la coercivité de a sur V_h . Mais la condition (3.49) page 121 n'entraîne pas la coercivité de a sur V_h . Il suffit pour s'en convaincre de considérer la forme bilinéaire $a(u, v) = u_1u_2 - v_1v_2$ sur $V_h = \mathbb{R}^2$, et de vérifier que celle-ci vérifie la condition (3.49) sans être pour autant coercive. Il faut trouver autre chose...

On utilise le théorème de représentation de F. Riesz, que l'on rappelle ici : Soit H un espace de Hilbert et T une forme linéaire continue sur H , alors il existe un unique $u_T \in H$ tel que $T(v) = (u_T, v) \forall v \in H$. Soit A l'opérateur de V_h dans V_h défini par $a(u, v) = (Au, v)$ pour tout $v \in V_h$. Comme L est une forme linéaire continue sur $V_h \subset V$, par le théorème de Riesz, il existe un unique $\psi \in V_h$ tel que $L(v) = (\psi, v)$, pour tout $v \in V_h$. Le problème (3.50) s'écrit donc

$$\text{Trouver } u \in V_h \text{ tel que } (Au, v) = (\psi, v), \text{ pour tout } v \in V_h.$$

Si A est bijectif de V_h dans V_h , alors $u = A^{-1}\psi_u$ est donc la solution unique de (3.50). Comme V_h est de dimension finie, il suffit de montrer que A est injectif. Soit donc $w \in V_h$ tel que $Aw = 0$, on a dans ce cas $\|Aw\| = 0$ et donc

$$\sup_{(v \in V_h, \|v\|=1)} a(w, v) = 0.$$

Or par la condition (3.49), on a

$$\inf_{w \in V_h, w \neq 0} \sup_{(v \in V_h, \|v\|=1)} a(w, v) \geq \beta_h > 0.$$

On en déduit que $w = 0$, donc que A est bijectif et que le problème (3.50) admet une unique solution. On peut remarquer de plus que si A est inversible,

$$\inf_{v \in V_h, \|v\|=1} \sup_{v \in V_h, \|v\|=1} a(w, v) = \|A^{-1}\|^{-1}, \quad (3.82)$$

et donc si (3.49) est vérifiée, alors

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{\beta_h} \quad (3.83)$$

En effet, par définition,

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\|^{-1} &= \left(\sup_{v \in V_h, v \neq 0} \frac{\|A^{-1}v\|}{\|v\|} \right)^{-1} \\ &= \inf_{v \in V_h, v \neq 0} \frac{\|v\|}{\|A^{-1}v\|} \\ &= \inf_{f \in V_h, v \neq 0} \frac{\|Af\|}{\|f\|} \\ &= \inf_{f \in V_h, \|f\|=1} \|Af\| \\ &= \inf_{f \in V_h, \|f\|=1} \sup_{w \in V_h, \|w\|=1} (Af, w). \end{aligned}$$

2. Soit $v \in V_h, v \neq 0$; par l'inégalité triangulaire, on a :

$$\|u - u_h\| \leq \|u - v\| + \|v - u_h\|. \quad (3.84)$$

Mais grâce à (3.83), on a :

$$\begin{aligned} \|v - u_h\| &= \|A^{-1}A(v - u_h)\| \\ &\leq \frac{1}{\beta_h} \|A(v - u_h)\| \\ &\leq \frac{1}{\beta_h} \sup_{w \in V_h, \|w\|=1} a(v - u_h, w) \\ &\leq \frac{1}{\beta_h} \sup_{w \in V_h, \|w\|=1} (a(v, w) - a(u_h, w)) \\ &\leq \frac{1}{\beta_h} \sup_{w \in V_h, \|w\|=1} (a(v, w) - a(u, w)), \end{aligned}$$

car $a(u_h, w) = L(w) = a(u, w)$. On a donc

$$\begin{aligned} \|v - u_h\| &\leq \frac{1}{\beta_h} \sup_{w \in V_h, \|w\|=1} a(v - u, w) \\ &\leq \frac{1}{\beta_h} \sup_{w \in V_h, \|w\|=1} M \|v - u\| \|w\| \\ &\leq \frac{M}{\beta_h} \|v - u\|. \end{aligned}$$

En reportant dans (3.84), il vient alors :

$$\|u - u_h\| \leq \|u - v\| + \frac{M}{\beta_h} \|v - u\|, \quad \forall v \in V_h,$$

et donc

$$\|u - u_h\| \leq \left(1 + \frac{M}{\beta_h}\right) \inf_{v \in V_h} \|u - v\|.$$

Exercice 46 page 123

1. Soit K un volume de contrôle du maillage volumes finis. On intègre (3.1) sur K et en utilisant la formule de Stokes, on obtient :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot n_{K,\sigma} d\gamma(x) = m(K) f_K,$$

avec les notations du paragraphe 1.1.2 page 10.

On approche cette équation par :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} = m(K) f_K,$$

où $F_{K,\sigma}$ est le flux numérique à travers σ , qu'on approche par :

$$F_{K,\sigma} = \begin{cases} \frac{m(\sigma)}{d_{K,\sigma} + d_{L,\sigma}} (u_K - u_L) & \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_{int} \cap \mathcal{E}_K, \\ \frac{m(\sigma)}{d_{K,\sigma}} u_K & \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_{ext} \cap \mathcal{E}_K. \end{cases}$$

On obtient donc bien le schéma (3.57) - (3.58)

2. Soit $v = (v_K)_{K \in \mathcal{T}} \in H_{\mathcal{T}}(\Omega)$ une fonction constante par volumes de contrôle.

On multiplie l'équation (3.57) par V_K et on somme sur K . On obtient :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \left(\sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{int} \\ \sigma = K|L}} \tau_\sigma (u_K - u_L) v_K + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext} \cap \mathcal{E}_K} \tau_\sigma u_K v_K \right) = \sum_K m(K) f_K v_K.$$

Remarquons maintenant que le premier membre de cette égalité est aussi égal, en sommant sur les arêtes du maillage à :

$$\sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E} \\ \sigma = K|L}} (\tau_\sigma (u_K - u_L) v_K) + \tau_\sigma (u_L - u_K) v_L + \sum_{\tau \in \mathcal{E}_{ext}} \tau_\sigma u_{K_\sigma} v_{K_\sigma}$$

où K_σ désigne le volume de contrôle dont σ est une arête (du bord) dans la deuxième sommation. On obtient donc :

$$a_{\mathcal{T}}(u, v) = T_{\mathcal{T}}(V), \forall v \in H_{\mathcal{T}}(\Omega), \quad (3.85)$$

avec :

$$a_{\mathcal{T}}(u, v) = \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E} \\ \sigma = K|L}} \tau_\sigma (u_K - u_L) (v_K - v_L) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} u_{K_\sigma} v_{K_\sigma} \text{ et } T_{\mathcal{T}}(v) = \sum_K m(K) f_K v_K.$$

On a donc montré que si $u = (u_K)_{K \in \mathcal{T}}$ la solution de (3.57) - (3.58), alors u est solution de (3.85). Montrons maintenant la réciproque. Soit 1_K la solution caractéristique du volume de contrôle K , définie par

$$1_K(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in K \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

Prenons $v = 1_K$ dans (3.85), on obtient alors

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \tau_\sigma (u_K - u_L) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext} \cap \mathcal{E}_K} \tau_\sigma u_K = m(K) f_K.$$

On retrouve donc bien (3.57).

Notons qu'en faisant ceci, on a introduit une discrétisation de la formulation faible (3.5) page 100 par une méthode de discrétisation non conforme, puisque $H_{\mathcal{T}} \not\subset H^1(\Omega)$.