

Chapitre 4

Eléments finis de Lagrange

La construction d'une méthode d'éléments finis nécessite la donnée d'un maillage, de noeuds et d'un espace de polynômes, qui doivent être choisis de manière cohérente. Les éléments finis de type Lagrange font intervenir comme "degrés de liberté" (c.à.d. les valeurs qui permettent de déterminer entièrement une fonction) les valeurs de la fonction aux noeuds. Ils sont très largement utilisés dans les applications. Il existe d'autres familles d'éléments finis, comme par exemple les éléments finis de type Hermite qui font également intervenir les valeurs des dérivées directionnelles. Dans le cadre de ce cours, nous n'aborderons que les éléments finis de type Lagrange, et nous renvoyons aux ouvrages cités en introduction pour d'autres éléments.

4.1 Espace d'approximation

4.1.1 Cohérence "locale"

Soit \mathcal{T} un maillage de Ω , pour tout élément K de \mathcal{T} , on note Σ_K l'ensemble des noeuds de l'élément. On suppose que chaque élément a N_ℓ noeuds $K : \Sigma_K = \{a_1, \dots, a_{N_\ell}\}$, qui ne sont pas forcément ses sommets. On note P un espace de dimension finie constitué de polynômes, qui définit la méthode d'éléments finis choisie.

Définition 4.1 (Unisolvance, élément fini de Lagrange) Soit K un élément et $\Sigma_K = (a_i)_{i=1, \dots, N_\ell}$ un ensemble de noeuds de K . Soit P un espace de polynômes de dimension finie. On dit que le triplet (K, Σ_K, P) est un élément fini de Lagrange si Σ_K est P -unisolvant, c'est à dire si pour tout $(\alpha_1, \dots, \alpha_{N_\ell}) \in \mathbb{R}^{N_\ell}$, il existe un unique élément $f \in P$ tel que $f(a_i) = \alpha_i \quad \forall i = 1 \dots N_\ell$. Pour $i = 1, \dots, N_\ell$, on appelle degré de liberté la forme linéaire ζ_i définie par $\zeta_i(p) = p(a_i)$, pour tout $p \in P$. La propriété d'unisolvance équivaut à dire que la famille $(\zeta_i)_{i=1, \dots, N_\ell}$ forme une base de P' (espace dual de P).

La P -unisolvance revient à dire que toute fonction de P est entièrement déterminée par ses valeurs aux noeuds.

Exemple : l'élément fini de Lagrange P_1 Prenons par exemple, en dimension 1, l'élément $K = [a_1, a_2]$, avec $\Sigma_K = \{a_1, a_2\}$, et $P = P_1$ (ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 1). Le triplet (K, Σ_K, P) est unisolvant s'il existe une unique fonction f de P telle que :

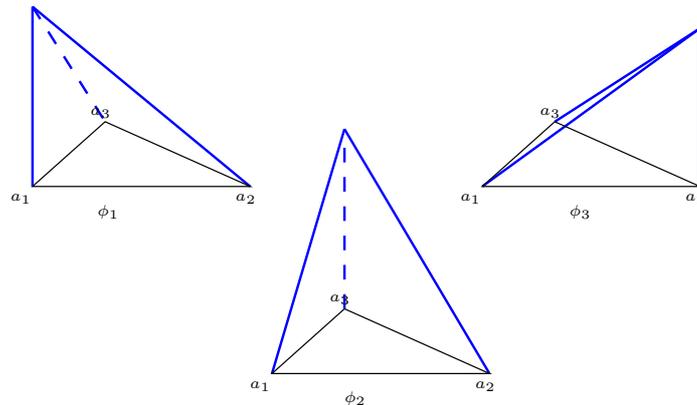
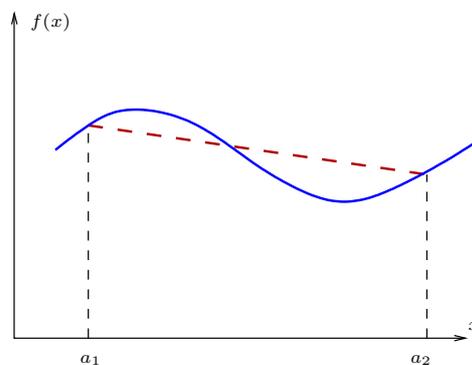
$$\begin{cases} f(a_1) = \alpha_1 \\ f(a_2) = \alpha_2 \end{cases}$$

Or toute fonction f de P s'exprime sous la forme $f(x) = \lambda x + \mu$ et le système

$$\begin{cases} \lambda a_1 + \mu = \alpha_1 \\ \lambda a_2 + \mu = \alpha_2 \end{cases}$$

détermine λ et μ de manière unique.

De même si on considère le cas $d = 2$. On prend comme élément K un triangle et comme noeuds les trois sommets, a_1, a_2, a_3 du triangle. Soit $P = P_1 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \lambda x_1 + \mu x_2 + \nu\}$ l'ensemble des fonctions affines. Alors le triplet (K, Σ_K, P) est un élément fini de Lagrange car $f \in P$ est entièrement déterminée par $f(a_1), f(a_2)$ et $f(a_3)$.

FIGURE 4.1 – fonctions de base locales pour l'élément fini de Lagrange P_1 en dimension 2FIGURE 4.2 – Interpolée P_1 sur $[a_1, a_2]$ (en trait pointillé) d'une fonction régulière (en trait continu)

Définition 4.2 (Fonctions de base locales) Si (K, Σ_K, P) est un élément fini de Lagrange, alors toute fonction f de P peut s'écrire :

$$f = \sum_{i=1}^{N_\ell} f(a_i) f_i$$

avec $f_i \in P$ et $f_i(a_j) = \delta_{ij}$. Les fonctions f_i sont appelées fonctions de base locales.

Pour l'élément fini de Lagrange P_1 en dimension 2 considéré plus haut, les fonctions de base locales sont décrites sur la figure 4.1

Définition 4.3 (Interpolée) Soit (K, Σ_K, P) un élément fini de Lagrange, et soit $v \in C(K, \mathbb{R})$. L'interpolée de v est la fonction $\Pi v \in P$ définie par :

$$\Pi v = \sum_{i=1}^{N_\ell} v(a_i) f_i$$

On montre sur la figure 4.2 un exemple d'interpolée pour l'élément fini de Lagrange P_1 en dimension 1. L'étude de $\|v - \Pi v\|$ va nous permettre d'établir une majoration de l'erreur de consistance $d(u, H_N)$.

Remarque 4.4 Pour que le triplet (K, Σ_K, P) soit un élément fini de Lagrange, il faut, mais il ne suffit pas, que $\dim P = \text{card} \Sigma_K$. Par exemple si $P = P_1$ et qu'on prend comme noeuds du triangle deux sommets et le milieu de l'arête joignant les deux sommets, (voir figure 4.3), (K, Σ_K, P) n'est pas un élément fini de Lagrange.

Proposition 4.5 (Critère de détermination) Soit (K, Σ, P) un triplet constitué d'un élément, d'un ensemble de noeuds et d'un espace de polynômes, tel que :

$$\dim P = \text{card} \Sigma = N_\ell \quad (4.1)$$

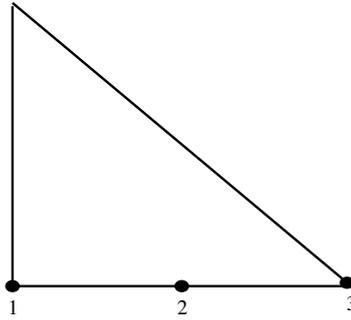


FIGURE 4.3 – Exemple de triangle à trois noeuds qui n'est pas un élément fini de Lagrange)

Alors

$$\text{si } \exists! f \in P; f = 0 \text{ sur } \Sigma \tag{4.2}$$

ou si

$$\forall i \in \{1 \dots N_\ell\} \exists! f_i \in P \quad f_i(a_j) = \delta_{ij} \tag{4.3}$$

alors (K, Σ, P) est un élément fini de Lagrange.

Démonstration : Soit :

$$\begin{aligned} \phi : P &\rightarrow \mathbb{R}^{N_\ell} \\ f &\mapsto (f(a_i))_{i=1, N_\ell}^t. \end{aligned}$$

L'application ϕ est linéaire de P dans \mathbb{R}^{N_ℓ} , et, par hypothèse $\text{card } s\Sigma = \dim P$. Donc ϕ est une application linéaire continue de P dans \mathbb{R}^{N_ℓ} , avec $\dim P = \dim(\mathbb{R}^{N_\ell}) = N_\ell$. Si (K, Σ, P) vérifie la condition (4.2) alors ϕ est injective. En effet, si $\phi(f) = 0$, alors $f(a_i) = 0, \forall i = 1, \dots, N_\ell$, et donc par hypothèse, $f = 0$. Donc ϕ est une application linéaire, ϕ est injective de P dans \mathbb{R}^{N_ℓ} avec $\dim P = N_\ell$. On en déduit que ϕ est bijective. Donc toute fonction de P est entièrement déterminée par ses valeurs aux noeuds : (K, Σ, P) est donc un élément fini de Lagrange.

On montre facilement que si la condition (4.3) est vérifiée alors ϕ est surjective. Donc ϕ est bijective, et (K, Σ, P) est un élément fini de Lagrange. ■

Proposition 4.6 Soit $(\bar{K}, \bar{\Sigma}, \bar{P})$, un élément fini de Lagrange, où $\bar{\Sigma}$ est l'ensemble des noeuds de \bar{K} et \bar{P} un espace de fonctions de dimension finie, et soit F une bijection de \bar{K} dans K , où K est une maille d'un maillage éléments finis. On pose $\Sigma = F(\bar{\Sigma})$ et $P = \{f : K \rightarrow \mathbb{R}; f \circ F \in \bar{P}\}$ (voir figure 4.4). Alors le triplet (K, Σ, P) est un élément fini de Lagrange.

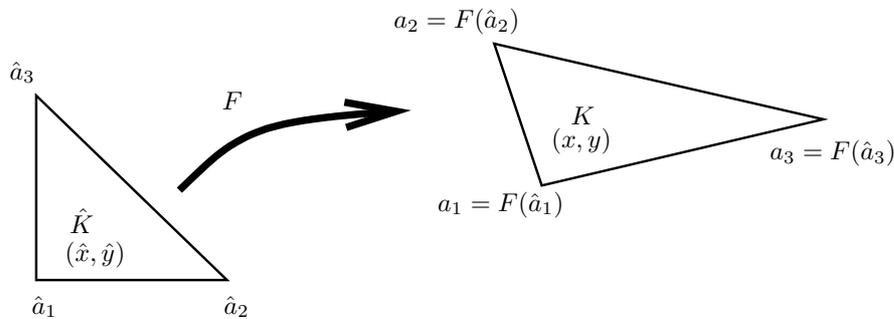


FIGURE 4.4 – Transformation F

Démonstration : Supposons que les hypothèses de la proposition sont réalisées. On veut donc montrer que (Σ, P) est unisolvant. Soit $\Sigma = (a_1, \dots, a_{N_\ell})$, et soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_{N_\ell}) \in \mathbb{R}^{N_\ell}$. On veut montrer qu'il existe une unique fonction $f \in P$ telle que

$$f(a_i) = \alpha_i, \quad \forall i = 1, \dots, N_\ell.$$

Or par hypothèse, $(\bar{\Sigma}, \bar{P})$ est unisolvant. Donc il existe une unique fonction $\bar{f} \in \bar{P}$ telle que

$$\bar{f}(\bar{a}_i) = \alpha_i, \quad \forall i = 1, \dots, N_\ell,$$

(où $(\bar{a}_i)_{i=1, \dots, N_\ell}$ désignent les noeuds de \bar{K}). Soit F la bijection de \bar{K} sur K , on pose $f = \bar{f} \circ F^{-1}$. Or par hypothèse, $a_i = F(\bar{a}_i)$. On a donc : $f(a_i) = \bar{f} \circ F^{-1}(a_i) = \bar{f}(\bar{a}_i) = \alpha_i$. On a ainsi montré l'existence de f telle que $f(a_i) = \alpha_i$.

Montrons maintenant que f est unique. Supposons qu'il existe f et $g \in P$ telles que :

$$f(a_i) = g(a_i) = \alpha_i, \quad \forall i = 1, \dots, N_\ell.$$

Soit $h = f - g$ on a donc :

$$h(a_i) = 0 \quad \forall i = 1 \dots N_\ell.$$

On a donc $h \circ F(\bar{a}_i) = h(a_i) = 0$. Or $h \circ F \in \bar{P}$, et comme $(\bar{\Sigma}, \bar{P})$ est unisolvant, on en déduit que $h \circ F = 0$. Comme, pour tout $x \in K$, on a $h(x) = h \circ F \circ F^{-1}(x) = h \circ F(F^{-1}(x)) = 0$, on en conclut que $h = 0$. ■

Définition 4.7 (Eléments affine-équivalents) . Sous les hypothèses de la proposition 4.6, si la bijection F est affine, on dit que les éléments finis $(\bar{K}, \bar{\Sigma}, \bar{P})$ et (K, Σ, P) sont affine-équivalents.

Remarque 4.8 Soient $(\bar{K}, \bar{\Sigma}, \bar{P})$ et (K, Σ, P) deux éléments finis affine-équivalents. Si les fonctions de base locales de $(\bar{K}, \bar{\Sigma}, \bar{P})$. (resp. de (K, Σ, P)) sont affines, alors celles de \bar{K} (resp. K) le sont aussi, et on a :

$$\begin{cases} \bar{f}_i &= f_i \circ F, \\ f_i &= \bar{f}_i \circ F^{-1}, \end{cases} \quad i = 1, \dots, \text{card}\Sigma$$

La preuve de cette remarque fait l'objet de l'exercice 55.

Proposition 4.9 (Interpolation) Sous les hypothèses de la proposition 4.10 page 140, soient $\Pi_{\bar{K}}$ et Π_K les opérateurs d'interpolation respectifs sur \bar{K} et K , voir définition 4.3 page 137. Soient $v \in C(K, \mathbb{R})$, $\Pi_{\bar{K}}v$ et Π_Kv les interpolées respectives de v sur (\bar{K}, \bar{P}) et (K, P) , alors on a :

$$\Pi_Kv \circ F = \Pi_{\bar{K}}(v \circ F)$$

Démonstration : Remarquons tout d'abord que $\Pi_Kv \circ F$ et $\Pi_{\bar{K}}(v \circ F)$ sont toutes deux des fonctions définies de \bar{K} à valeurs dans \mathbb{R} , voir figure 4.5. Remarquons ensuite que, par définition de l'interpolée, $\Pi_Kv \in P$. Comme

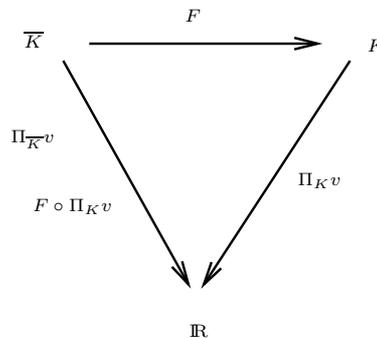


FIGURE 4.5 – Opérateurs d'interpolation $\Pi_{\bar{K}}$ et Π_K

$(\bar{K}, \bar{\Sigma}, \bar{P})$ est l'élément de référence, on a donc :

$$\Pi_K v \circ F \in \bar{P}$$

On a aussi, par définition de l'interpolée : $\Pi_{\bar{K}}(v \circ F) \in \bar{P}$. On en déduit que $\Pi_K v \circ F$ et $\Pi_{\bar{K}}(v \circ F)$ sont toutes deux des fonctions de \bar{P} . Comme l'élément $(\bar{K}, \bar{P}, \bar{\Sigma})$ est unisolvant (car c'est un élément fini de Lagrange), toute fonction de \bar{P} est uniquement déterminée par ses valeurs aux noeuds de $\bar{\Sigma}$. Pour montrer l'égalité de $\Pi_K v \circ F$ et $\Pi_{\bar{K}}(v \circ F)$, il suffit donc de montrer que :

$$\Pi_{\bar{K}}(v \circ F)(\bar{a}_i) = \Pi_K v \circ F(\bar{a}_i), \quad i = 1, \dots, N_\ell,$$

où $N_\ell = \text{card} \bar{\Sigma}$. Décomposons $\Pi_{\bar{K}}(v \circ F)$ sur les fonctions de base locales (\bar{f}_j) , $j = 1, \dots, N_\ell$. On obtient :

$$\Pi_{\bar{K}}(v \circ F)(\bar{a}_i) = \sum_{j=1}^{N_\ell} v \circ F(\bar{a}_j) \bar{f}_j(\bar{a}_i).$$

On a donc :

$$\Pi_{\bar{K}}(v \circ F)(\bar{a}_i) = v \circ \left(\sum_{j=1}^{N_\ell} F(\bar{a}_j) \bar{f}_j \right) (\bar{a}_i) = v \circ F(\bar{a}_i) = v(a_i).$$

Mais on a aussi :

$$\Pi_K v \circ F(\bar{a}_i) = \Pi_K v(F(\bar{a}_i)) = \Pi_K v(a_i) = v(a_i).$$

D'où l'égalité. ■

4.1.2 Construction de H_N et conformité

Nous allons considérer deux cas : le cas où l'espace H est l'espace H^1 tout entier, et le cas où l'espace H est l'espace H_0^1

Cas $H = H^1(\Omega)$

Plaçons-nous ici dans le cas où $H = H^1(\Omega)$, où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert borné polygonal (si $d = 2$, polyédrique si $d = 3$). Soit \mathcal{T} un maillage éléments finis, avec $\mathcal{T} = (K_\ell)_{\ell=1, \dots, L}$, où les éléments finis K_ℓ sont fermés et tels que $\cup_{\ell=1}^L K_\ell = \bar{\Omega}$. Soit $\mathcal{S} = (S_i)_{i=1, \dots, M}$ l'ensemble des noeuds du maillage éléments finis, avec $S_i \in \bar{\Omega}$, $\forall i = 1, \dots, M$. On cherche à construire une méthode d'éléments finis de Lagrange ; donc à chaque élément K_ℓ , $\ell = 1, \dots, L$, est associé un ensemble de noeuds $\Sigma_\ell = \mathcal{S} \cap K_\ell$, et un espace P_ℓ de polynômes. On veut que chaque triplet $(K_\ell, \Sigma_\ell, P_\ell)$ soit un élément fini de Lagrange. On définit les fonctions de base globales $(\phi_i)_{i=1, \dots, M}$, par :

$$\phi_i|_{K_\ell} \in P_\ell \quad \forall i = 1, \dots, M; \quad \forall \ell = 1; \dots, L, \quad (4.4)$$

et

$$\phi_i(S_j) = \delta_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, M, \quad \forall j = 1, \dots, M. \quad (4.5)$$

Chaque fonction ϕ_i est définie de manière unique, grâce au caractère unisolvant de $(K_\ell, \Sigma_\ell, P_\ell)$, $\ell = 1, \dots, M$. On pose $H_N = \text{Vect}(\phi_1, \dots, \phi_M)$. Pour obtenir une méthode d'éléments finis conforme, il reste à s'assurer que $H_N \subset H^1$.

Une manière de construire l'espace H_N est de construire un maillage à partir d'un élément de référence, grâce à la proposition suivante, qui se déduit facilement de la proposition 4.6 page 138

Proposition 4.10 (Élément fini de référence) *Soit \mathcal{T} un maillage constitué d'éléments K . On appelle élément fini de référence un élément fini de Lagrange $(\bar{K}, \bar{\Sigma}, \bar{P})$, où $\bar{\Sigma}$ est l'ensemble des noeuds de \bar{K} et \bar{P} un espace de fonctions, de dimension finie, tel que, pour tout autre élément $K \in \mathcal{T}$, il existe une bijection $F : \bar{K} \rightarrow K$ telle que $\Sigma = F(\bar{\Sigma})$ et $P = \{f : K \rightarrow \mathbb{R}; f \circ F \in \bar{P}\}$ (voir figure 4.4). Le triplet (K, Σ, P) est un élément fini de Lagrange.*

Proposition 4.11 (Critère de conformité, cas H^1) Soit Ω un ouvert polygonal (ou polyédrique) de \mathbb{R}^d , $d = 2$ ou 3 . Soit $\mathcal{T} = (K_\ell)_{\ell=1, \dots, L}$, un maillage éléments finis de Ω , $\mathcal{S} = (S_i)_{i=1, \dots, M}$ l'ensemble des noeuds de maillage. On se place sous les hypothèses de la proposition 4.10 ; soient $(\phi_i)_{i=1, \dots, M}$ les fonctions de base globales, vérifiant (4.4) et (4.5), et on suppose de plus que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

$$\text{Pour toute arête (ou face si } d = 3) \epsilon = K_{\ell_1} \cap K_{\ell_2}, \text{ on a : } \Sigma_{\ell_1} \cap \epsilon = \Sigma_{\ell_2} \cap \epsilon \text{ et } P_{\ell_1}|_\epsilon = P_{\ell_2}|_\epsilon, \quad (4.6)$$

où $P_{\ell_1}|_\epsilon$ (resp. $P_{\ell_2}|_\epsilon$) désigne l'ensemble des restrictions des fonctions de P_{ℓ_1} (resp. P_{ℓ_2}) à ϵ ,

$$\text{Si } \epsilon \text{ est un côté de } K_\ell, (\Sigma_\ell \cap \epsilon, P_\ell|_\epsilon) \text{ est isolant.} \quad (4.7)$$

Alors on a : $H_N \subset C(\bar{\Omega})$ et $H_N \subset H^1(\Omega)$. On a donc ainsi construit une méthode d'éléments finis conformes. (Notons que les côtés de K_ℓ sont des arêtes en 2D et des faces en 3D.)

Démonstration : Pour montrer que $H_N \subset C(\bar{\Omega})$ et $H_N \subset H^1(\Omega)$, il suffit de montrer que pour chaque fonction de base globale ϕ_i , on a $\phi_i \in C(\bar{\Omega})$ et $\phi_i \in H^1(\Omega)$. Or par hypothèse, (4.4), chaque fonction ϕ_i est polynômiale par morceaux. De plus, grâce à l'hypothèse (4.6), on a raccord des polynômes sur les interfaces des éléments, ce qui assure la continuité de ϕ_i . Il reste à montrer que $\phi_i \in H^1(\Omega)$ pour tout $i = 1, \dots, M$. Comme $\phi_i \in C(\bar{\Omega})$, il est évident que $\phi_i \in L^2(\Omega)$ (car Ω est un ouvert borné, donc $\phi_i \in L^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$).

Montrons maintenant que les dérivées faibles $D_j \phi_i$, $j = 1, \dots, d$, appartiennent à $L^2(\Omega)$. Par définition, la fonction ϕ_i admet une dérivée faible dans $L^2(\Omega)$ s'il existe une fonction $\psi_{i,j} \in L^2(\Omega)$ telle que :

$$\int_{\Omega} \phi_i(x) \partial_j \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} \psi_{i,j}(x) \varphi(x) dx, \quad (4.8)$$

pour toute fonction $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ (on rappelle que $C_c^1(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions de classe C^1 à support compact, et que ∂_j désigne la dérivée classique par rapport à la j -ème variable). Or, comme $\bar{\Omega} = \bigcup_{\ell=1}^L K_\ell$, on a :

$$\int_{\Omega} \phi_i(x) D_j \varphi(x) dx = \sum_{\ell=1}^L \int_{K_\ell} \phi_i(x) D_j \varphi(x) dx.$$

Sur chaque élément K_ℓ , la fonction ϕ_i est polynômiale. On peut donc appliquer la formule de Green, et on a :

$$\int_{K_\ell} \phi_i(x) \partial_j \varphi(x) dx = \int_{\partial K_\ell} \phi_i(x) \varphi(x) n_j(x) d\gamma(x) - \int_{K_\ell} \partial_j \phi_i(x) \varphi(x) dx,$$

où $n_j(x)$ est la j -ième composante du vecteur unitaire normal à ∂K_ℓ en x , extérieur à K_ℓ . Mais, si on note \mathcal{E}_{int} l'ensemble des arêtes intérieures du maillage (i.e. celles qui ne sont pas sur le bord), on a :

$$\begin{aligned} X &= \sum_{\ell=1}^L \int_{\partial K_\ell} \phi_i(x) \varphi(x) n_j(x) d\gamma(x) = \int_{\partial \bar{\Omega}} \phi_i(x) \varphi(x) n_j(x) d\gamma(x) \\ &+ \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}_{int}} \int [(\phi_i(x) \varphi(x) n_j(x))|_{K_{\ell_1}} + (\phi_i(x) \varphi(x) n_j(x))|_{K_{\ell_2}}] d\gamma(x). \end{aligned}$$

où K_{ℓ_1} et K_{ℓ_2} désignent les deux éléments dont ϵ est l'interface.

Comme φ est à support compact,

$$\int_{\partial \bar{\Omega}} \phi_i(x) \varphi(x) n_j(x) d\gamma(x) = 0.$$

Comme ϕ_i et φ sont continues et comme $n_j(x)|_{K_{\ell_1}} = -n_j(x)|_{K_{\ell_2}}$ pour tout $x \in \epsilon$, on en déduit que $X = 0$. En reportant dans (4.1.2), on obtient donc que :

$$\int_{\Omega} \phi_i(x) \partial_j \varphi(x) dx = - \sum_{\ell=1}^L \int_{K_\ell} \partial_j \phi_i(x) \varphi(x) dx.$$

Soit $\psi_{i,j}$ la fonction de Ω dans \mathbb{R} définie presque partout par

$$\psi_{i,j} \Big|_{K_\ell} = -\partial_j \phi_i.$$

Comme $\partial_j \phi_i$ est une fonction polynômiale par morceaux, on a $\psi_{i,j} \in L^2(\Omega)$ qui vérifie (4.8), ce qui termine la démonstration. ■

Cas $H = H_0^1(\Omega)$

Plaçons-nous maintenant dans le cas où $H = H_0^1(\Omega)$. On décompose alors l'ensemble \mathcal{S} des noeuds du maillage :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{int} \cup \mathcal{S}_{ext}$$

où

$$\mathcal{S}_{int} = \{S_i, i = 1, \dots, N\} \subset \Omega$$

est l'ensemble des noeuds intérieurs à Ω et

$$\mathcal{S}_{ext} = \{S_i, i = N + 1, \dots, M\} \subset \partial\Omega$$

est l'ensemble des noeuds de la frontière. Les fonctions de base globales sont alors les fonctions $\phi_i, i = 1, \dots, N$ telles que

$$\phi_i|_{K_\ell} \in P_\ell, \forall i = 1, \dots, N, \quad \forall \ell = 1, \dots, L \quad (4.9)$$

$$\phi_i(S_j) = \delta_{ij}, \forall j = 1, \dots, N, \quad (4.10)$$

et on pose là encore $H_N = Vect\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$. On a alors encore le résultat suivant :

Proposition 4.12 (Critère de conformité, cas H_0^1) Soit Ω un ouvert polygonal (ou polyédrique) de $\mathbb{R}^d, d = 2$ ou 3 . Soit $\mathcal{T} = (K_\ell)_{\ell=1, \dots, L}$ un maillage éléments finis de $\Omega, \mathcal{S} = (S_i)_{i=1, \dots, M} = \mathcal{S}_{int} \cup \mathcal{S}_{ext}$ l'ensemble des noeuds du maillage. On se place sous les hypothèses de la proposition 4.6. On suppose que les fonctions de base globale $(\phi_i)_{i=1, \dots, M}$ vérifient (4.9) et (4.10), et que les conditions (4.6) et (4.7) sont vérifiées. Alors on a : $H_N \subset C(\Omega)$ et $H_N \subset H_0^1(\Omega)$

Démonstration : La preuve de cette proposition est laissée à titre d'exercice. ■

Remarque 4.13 (Eléments finis conformes dans $H^2(\Omega)$) On a construit un espace d'approximation H_N inclus dans $C(\Omega)$. En général, on n'a pas $H_N \subset C^1(\Omega)$, et donc on n'a pas non plus $H_N \subset H^2(\Omega)$ (en dimension 1 d'espace, $H^2(\Omega) \subset C^1(\Omega)$). Même si on augmente le degré de l'espace des polynômes, on n'obtiendra pas l'inclusion $H_N \subset C^1(\Omega)$. Si on prend par exemple les polynômes de degré 2 sur les éléments, on n'a pas de condition pour assurer le raccord, des dérivées aux interfaces. Pour obtenir ce raccord, les éléments finis de Lagrange ne suffisent pas : il faut prendre des éléments de type Hermite, pour lesquels les degrés de liberté ne sont plus seulement les valeurs de la fonction aux noeuds, mais aussi les valeurs de ses dérivées aux noeuds. Les éléments finis de Hermite seront par exemple bien adaptés à l'approximation des problèmes elliptiques d'ordre 4, dont un exemple est l'équation :

$$\Delta^2 u = f \text{ dans } \Omega$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2, \Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$, et avec des conditions aux limites adéquates, que nous ne détaillerons pas ici. On peut, en fonction de ces conditions aux limites, trouver un espace de Hilbert H et une formulation faible de (4.13), qui s'écrit :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \Delta u(x) \Delta \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \\ u \in H, \forall \varphi \in H. \end{cases}$$

Pour que cette formulation ait un sens, il faut que $\Delta u \in L^2(\Omega)$ et $\Delta \varphi \in L^2(\Omega)$, et donc que $H \subset H^2(\Omega)$. Pour construire une approximation par éléments finis conforme de ce problème, il faut donc choisir $H_N \subset H^2(\Omega)$, et le choix des éléments finis de Hermite semble donc indiqué.

4.2 Exemples

Pour chaque méthode d'élément fini de Lagrange, on définit :

1. un élément de référence \bar{K}
2. des fonctions de base locales sur \bar{K}
3. une bijection F_ℓ de \bar{K} sur K_ℓ , pour $\ell = 1, \dots, L$, où L est le nombre d'éléments du maillage.

4.2.1 Élément fini de Lagrange $P1$ sur triangle ($d = 2$)

Le maillage du domaine est constitué de L triangles $(K_\ell)_{\ell=1,\dots,L}$, et les polynômes d'approximation sont de degré 1.

Élément fini de référence : on choisit le triangle \bar{K} de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$, et $\bar{P} = \{\psi : K \rightarrow \mathbb{R}(x, y) \mapsto ax + by + c, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

Proposition 4.14 (Unisolvance) Soit $\bar{\Sigma} = (\bar{a}_i)_{i=1,2,3}$ avec $\bar{a}_1 = (0, 0)$, $\bar{a}_2 = (1, 0)$ et $\bar{a}_3 = (0, 1)$, et

$$\bar{P} = \{\psi; K \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto a + bx + cy, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$$

Alors le couple $(\bar{\Sigma}, \bar{P})$ est unisolvant.

Démonstration : Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$, et $\psi \in \bar{P}$. On suppose que $\psi(\bar{a}_i) = \alpha_i$, $i = 1, 2, 3$. La fonction ψ est de la forme $\psi(x, y) = a + bx + cy$ et on a donc :

$$\begin{cases} a = \alpha_1 \\ a + b = \alpha_2 \\ a + c = \alpha_3 \end{cases}$$

d'où $c = \alpha_1, b_1 = \alpha_2 - \alpha_1$ et $b_2 = \alpha_3 - \alpha_2$. La connaissance de ψ aux noeuds $(\bar{a}_i)_{i=1,2,3}$ détermine donc entièrement la fonction ψ . ■

Fonctions de bases locales.

Les fonctions de base locales sur l'élément fini de référence \bar{K} sont définies par $\bar{\phi}_i \in \bar{P}$ $\bar{\phi}_i(\bar{a}_j) = \delta_{ij}$, ce qui détermine les $\bar{\phi}_i$; de manière unique, comme on vient de le voir. Et on a donc

$$\begin{cases} \bar{\phi}_1(\bar{x}, \bar{y}) = 1 - \bar{x} - \bar{y} \\ \bar{\phi}_2(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x} \\ \bar{\phi}_3(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y}. \end{cases}$$

Transformation F_ℓ

On construit ici une bijection affine qui transforme \bar{K} le triangle de référence en un autre triangle K du maillage. On cherche donc $\ell : \bar{K} \rightarrow K$, telle que

$$F_\ell(\bar{a}_i) = a_i \quad i = 1, \dots, 3$$

où $\Sigma = (a_i)_{i=1,2,3}$ est l'ensemble des sommets de K . Notons (x_i, y_i) les coordonnées de a_i , $i = 1, 2, 3$. Comme F_ℓ est une fonction affine de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 , elle s'écrit sous la forme.

$$F_\ell(\bar{x}, \bar{y}) = (\beta_1 + \gamma_1 \bar{x} + \delta_1 \bar{y}, \beta_2 + \gamma_2 \bar{x} + \delta_2 \bar{y})$$

et on cherche $\beta_i, \gamma_i, \delta_i$, $i = 1, 2$ tels que :

$$\begin{cases} F_\ell((0, 0)) = (x_1, y_1) \\ F_\ell((1, 0)) = (x_2, y_2) \\ F_\ell((0, 1)) = (x_3, y_3). \end{cases}$$

Une résolution de système élémentaire amène alors à :

$$F_\ell(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} x_1 + (x_2 - x_1)\bar{x} + (x_3 - x_1)\bar{y} \\ y_1 + (y_2 - y_1)\bar{x} + (y_3 - y_1)\bar{y} \end{pmatrix}$$

D'après la remarque 4.8 page 139, si on note $\bar{\phi}_k$, $k = 1, 2, 3$ les fonctions de base locales de l'élément de référence $(\bar{K}, \bar{\Sigma}, \bar{P})$, et $\phi_k^{(\ell)}$, $k = 1, 2, 3$ les fonctions de base locales de l'élément $(K_\ell, \Sigma_\ell, P_\ell)$, on a $\phi_k^{(\ell)} = \bar{\phi}_k \circ F_\ell^{-1}$

Si on note maintenant $(\phi_i)_{i=1,\dots,N}$ les fonctions de base globales, on a :

$$\phi_i \Big|_{K_\ell} = \phi_k^{(\ell)},$$

où $i = ng(\ell, k)$ est l'indice du k -ième noeud de l'élément ℓ dans la numérotation globale. Notons que l'élément fini de Lagrange ainsi défini vérifie les critères de cohérence 4.6 page 141 et (4.7) page 141. Pour compléter la définition de l'espace d'approximation H_N , il ne reste qu'à déterminer les "noeuds liés", de la façon dont on a traité le cas de l'espace $H_0^1(\Omega)$.

Il faut également insister sur le fait que cet élément est très souvent utilisé, en raison de sa facilité d'implantation et de la structure creuse des systèmes linéaires qu'il génère. Il est particulièrement bien adapté lorsqu'on cherche des solutions dans l'espace $H^1(\Omega)$. Il se généralise facilement en trois dimensions d'espace, où on utilise alors des tétraèdres, avec toujours comme espace de polynôme l'espace des fonctions affines.

4.2.2 Élément fini triangulaire P_2

Comme le titre du paragraphe l'indique, on considère un maillage triangulaire, et un espace de polynômes de degré 2 pour construire l'espace d'approximation.

Élément fini de référence On choisit comme élément fini de référence le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$, voir Figure 4.6 et on prend pour $\bar{\Sigma}$:

$$\bar{\Sigma} = \{(0,0), (1,0), (0,1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 0)\}$$

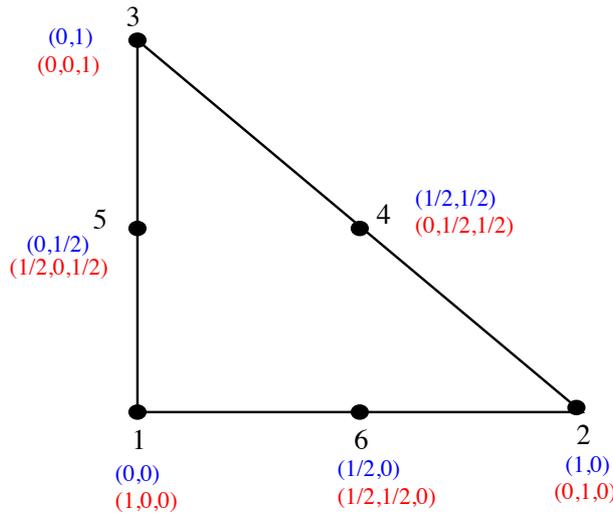


FIGURE 4.6 – Élément de référence pour les éléments finis P_2 , avec coordonnées cartésiennes et barycentriques des noeuds

Fonctions de base locales Les fonctions de base locales sont définies à partir des coordonnées barycentriques. On rappelle que les coordonnées barycentriques d'un point \mathbf{x} du triangle K de sommets a_1, a_2 et a_3 sont les réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que :

$$\mathbf{x} = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

Dans le cas du triangle de référence \bar{K} de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$, les coordonnées barycentriques d'un point $\{\mathbf{x}\}$ de coordonnées cartésiennes x et y sont donc : $\lambda_1 = 1 - x - y$, $\lambda_2 = x$, $\lambda_3 = y$. Par définition, on a $\sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1$ et $\lambda_i \geq 0$ (car le triangle K est l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses sommets). On peut alors déterminer les fonctions de base en fonction des coordonnées barycentriques des six noeuds de \bar{K} exprimés par leurs coordonnées barycentriques : $a_1 = (1, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, 0)$, $a_3 = (0, 0, 1)$, $a_4 = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $a_5 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, $a_6 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$. Les fonctions de base sont telles que $\phi_i \in P_2$, et $\phi_i(a_j) = \delta_{ij}$, $\forall i = 1, \dots, 6$, for all $j = 1, \dots, 6$. Commençons par ϕ_1 ; on veut $\phi_1(a_1) = 1$, et $\phi_1(a_i) = 0$, $\forall i = 2, \dots, 6$. La fonction ϕ_1 définie par

$$\phi_1(x, y) = 2\lambda_1(\lambda_1 - \frac{1}{2})$$

convient, et comme le couple $(\bar{\Sigma}, P_2)$ est unisolvant, c'est la seule fonction qui convient. Par symétrie, on définit

$$\phi_2(x, y) = 2\lambda_2(\lambda_2 - \frac{1}{2}),$$

et

$$\phi_3(x, y) = 2\lambda_3(\lambda_3 - \frac{1}{2}).$$

Les fonctions de base associées aux noeuds a_4, a_5, a_6 sont alors

$$\phi_4(x, y) = 4\lambda_2\lambda_3,$$

$$\begin{aligned}\phi_5(x, y) &= 4\lambda_1\lambda_3, \\ \text{et } \phi_6(x, y) &= 4\lambda_1\lambda_2.\end{aligned}$$

Il est facile de voir que ces fonctions forment une famille libre d'éléments de P_2 et comme $\text{card } \bar{\Sigma} = \text{card } P_2$, le couple $(\bar{\Sigma}, P_2)$ est bien unisolvant.

Transformation F_ℓ La bijection F_ℓ qui permet de passer de l'élément fini de référence \bar{K} à l'élément K_ℓ a déjà été vue dans le cas de l'élément fini P_1 c'est la fonction affine définie par :

$$F_\ell(x, y) = \begin{pmatrix} x_1 + (x_2 - x_1)x + (x_3 - x_1)y \\ y_1 + (y_2 - y_1)x + (y_3 - y_1)y \end{pmatrix}$$

où (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$ sont les coordonnées respectives des trois sommets du triangle K_ℓ . Comme cette transformation est affine, les coordonnées barycentriques restent inchangées par cette transformation.

On peut montrer (ce n'est pas facile) que l'erreur d'interpolation $\|u - u_N\|_{H^1}$ est contrôlée, en éléments finis P_1 et P_2 par les inégalités suivantes :

$$P_1 : \text{ si } u \in H^2(\Omega), \text{ on a } \|u - u_N\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch\|u\|_{H^2(\Omega)}$$

$$P_2 : \text{ si } u \in H^3(\Omega), \text{ on a } \|u - u_N\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^2\|u\|_{H^3(\Omega)}.$$

On peut généraliser les éléments finis P_1 et P_2 aux éléments finis P_k sur triangles, pour $k \geq 1$. On prend toujours le même élément de référence, dont on divise chaque côté en k intervalles. Les extrémités de ces intervalles sont les noeuds du maillage. On a donc $3k$ noeuds, qu'on peut repérer par leurs coordonnées barycentriques, qui prennent les valeurs $0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, 1$. On peut montrer que si $u \in H^{k+1}$, alors

$$\|u_N - u\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^k\|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}$$

4.2.3 Éléments finis sur quadrangles

Le cas rectangulaire

On prend comme élément fini de référence le carré $\bar{K} = [-1, 1] \times [-1, 1]$, et comme noeuds les coins de ce carré :

$$a_1 = (1, -1), a_2 = (1, 1), a_3 = (-1, 1), \text{ et } a_4 = (-1, -1).$$

On prend comme espace de polynômes

$$P = \{f : \bar{K} \rightarrow \mathbb{R}; f \in Q_1\}$$

où $Q_1 = \{f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; f(x, y) = a + bx + cy + dxy, (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4\}$ Le couple (Σ, P) est unisolvant. Les fonctions de base locales sont les fonctions :

$$\phi_1(x, y) = -\frac{1}{4}(x+1)(y-1)$$

$$\phi_2(x, y) = \frac{1}{4}(x+1)(y+1)$$

$$\phi_3(x, y) = -\frac{1}{4}(x-1)(y+1)$$

$$\phi_4(x, y) = \frac{1}{4}(x-1)(y-1).$$

La transformation F_ℓ permet de passer de l'élément de référence carré \bar{K} à un rectangle quelconque du maillage K_ℓ . Si on considère un rectangle K_ℓ parallèle aux axes, dont les noeuds sont notés (x_1, y_1) , (x_2, y_1) , (x_2, y_2) , (x_1, y_2) , les noeuds du rectangle K_ℓ , la bijection F_ℓ s'écrit :

$$F_\ell(x, y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (x_2 - x_1)x + x_2 + x_1 \\ (y_2 - y_1)y + y_2 + y_1 \end{pmatrix}.$$

Considérons maintenant le cas d'un maillage quadrangulaire quelconque. Dans ce cas, on choisit toujours comme élément de référence le carré unité. La transformation F_ℓ qui transforme l'élément de référence en un quadrangle K_ℓ est toujours affine, mais par contre, les composantes de $F_\ell((x, y))$ dépendent maintenant de x et de y voir exercice 54 page 163. En conséquence, le fait que $f \in Q_1$ n'entraîne plus que $f \circ F_\ell \in Q_1$. Les fonctions de base seront donc des polynômes Q_1 sur l'élément de référence \bar{K} , mais pas sur les éléments "courants" K_ℓ .

Eléments finis d'ordre supérieur Comme dans le cas d'un maillage triangulaire, on peut choisir un espace de polynômes d'ordre supérieur, Q_k , pour les fonctions de base de l'élément de référence $\bar{K} = [-1, 1] \times [-1, 1]$. On choisit alors comme ensemble de noeuds : $\bar{\Sigma} = \bar{\Sigma}_k = \{(x, y) \in \bar{K}, (x, y) \in \{-1, -1 + \frac{1}{k}, -1 + \frac{2}{k}, \dots, 1\}^2\}$. On peut montrer facilement que $(\bar{\Sigma}_k, Q_k)$ est unisolvant. Là encore, si la solution exacte de problème continu est suffisamment régulière, on peut démontrer l'estimation d'erreur suivante (voir [3]) :

$$\|u - u_N\|_{H^1(\Omega)} \geq C \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)} h^k.$$

Exprimons par exemple l'espace des polynômes Q_2 . On a :

$$Q_2 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7xy^2 + a_8x^2y + a_9x^2y^2, a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, 9\}$$

L'espace Q_2 comporte donc neuf degrés de liberté. On a donc besoin de neuf noeuds dans $\bar{\Sigma}$ pour que le couple $(\bar{\Sigma}, Q_2)$ soit unisolvant (voir exercice 59 page 165). On peut alors utiliser comme noeuds sur le carré de référence $[-1, 1] \times [-1, 1]$:

$$\bar{\Sigma} = \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, -1), (1, 0), (1, 1)\}$$

En général, on préfère pourtant supprimer le noeud central $(0,0)$ et choisir :

$$\Sigma^* = \bar{\Sigma} \setminus \{(0, 0)\}.$$

Il faut donc un degré de liberté en moins pour l'espace des polynômes. On définit alors :

$$Q_2^* = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7xy^2 + a_8x^2y, a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, 8\}$$

Le couple (Σ^*, Q_2^*) est unisolvant (voir exercice 60 page 165), et on peut montrer que l'élément Q_2^* est aussi précis (et plus facile à mettre en oeuvre que l'élément Q_2).

4.3 Construction du système linéaire

On construit ici le système linéaire pour un problème à conditions aux limites mixtes de manière 'à envisager plusieurs types de conditions aux limites. Soit Ω un ouvert polygonal¹, on suppose que $\partial\Omega : \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ avec $\text{mes}(\Gamma_0) \neq 0$. On va imposer des conditions de Dirichlet sur Γ_0 et des conditions de Fourier sur Γ_1 ; c'est ce qu'on appelle des conditions "mixtes". On se donne donc des fonctions $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $g_0 : \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R}$ et $g_1 : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}$, et on cherche à approcher u solution de :

$$\begin{cases} -\text{div}(p(x)\nabla u(x)) + q(x)u(x) = f(x), x \in \Omega, \\ u = g_0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ p(x)\nabla u(x) \cdot \mathbf{n}(x) + \sigma u(x) = g_1(x), x \in \Gamma_1, \end{cases} \quad (4.11)$$

où \mathbf{n} désigne le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$ extérieure à Ω . Pour assurer l'existence et unicité du problème (4.11), (voir exercice 42), on se place sous les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} p(x) \geq \alpha > 0, p.p. x \in \Omega \\ q \geq 0 \\ \sigma \geq 0 \\ \text{mes}(\Gamma_0) > 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Pour obtenir une formulation variationnelle, on introduit l'espace

$$H_{\Gamma_0, g_0}^1 = \{u \in H^1(\Omega); u = g_0 \text{ sur } \Gamma_0\}$$

et l'espace vectoriel associé :

$$H = H_{\Gamma_0, 0}^1 = \{u \in H^1(\Omega); u = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$$

1. Dans le cas où la frontière $\partial\Omega$ de Ω n'est pas polygonale mais courbe, il faut considérer des éléments finis dits "isoparamétriques" que nous verrons plus loin

Notons que H est un espace de Hilbert. Par contre, attention, l'espace H_{Γ_0, g_0}^1 n'est pas un espace vectoriel. On va chercher u solution de (4.11) sous la forme $u = \tilde{u} + u_0$, avec $u_0 \in H_{\Gamma_0, g_0}^1$ et $\tilde{u} \in H_{\Gamma_0, 0}^1$. Soit $v \in H$, on multiplie (4.11) par v et on intègre sur Ω . On obtient :

$$\int_{\Omega} -\operatorname{div}(p(x)\nabla u(x))v(x)dx + \int_{\Omega} q(x)u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H.$$

En appliquant la formule de Green, il vient alors :

$$\int_{\Omega} p(x)\nabla u(x)\nabla v(x)dx - \int_{\partial\Omega} p(x)\nabla u(x)nv(x)d\gamma(x) + \int_{\Omega} qu(x)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H.$$

Comme $v = 0$ sur Γ_0 on a :

$$\int_{\partial\Omega} p(x)\nabla u(x)nv(x)d\gamma(x) = \int_{\Gamma_1} p\nabla u(x)nv(x)d\gamma(x).$$

Mais sur Γ_1 , la condition de Fourier s'écrit : $\nabla u \cdot n = -\sigma u + g_1$, et on a donc

$$\int_{\Omega} p(x)\nabla u(x)\nabla v(x)dx + \int_{\Gamma_1} p(x)\sigma u(x)v(x)d\gamma(x) + \int_{\Omega} qu(x)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx + \int_{\Gamma_1} g_1(x)v(x)d\gamma(x).$$

On peut écrire cette égalité sous la forme : $a(u, v) = \tilde{T}(v)$, avec $a(u, v) = a_{\Omega}(u, v) + a_{\Gamma_1}(u, v)$, où :

$$\begin{cases} a_{\Omega}(u, v) = \int_{\Omega} p(x)\nabla u(x)\nabla v(x)dx + \int_{\Omega} q(x)u(x)v(x)dx, \\ a_{\Gamma_1}(u, v) = \int_{\Gamma_1} p(x)\sigma(x)u(x)v(x)d\gamma(x), \end{cases}$$

et $\tilde{T}(v) = T_{\Omega}(v) + T_{\Gamma_1}(v)$, avec

$$T_{\Omega}(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx \text{ et } T_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_1} g_1(x)v(x)d\gamma(x).$$

On en déduit une formulation faible associée à (4.11) :

$$\begin{cases} \text{chercher } \tilde{u} \in H \\ a(u_0 + \tilde{u}, v) = \tilde{T}(v), \forall v \in H, \end{cases} \quad (4.13)$$

où $u_0 \in H^1(\Omega)$ est un revêtement de g_0 , c'est à dire une fonction de $H^1(\Omega)$ telle que $u_0 = g_0$ sur Γ . Le problème (4.13) peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \tilde{u} \in H \\ a(\tilde{u}, v) = T(v), \forall v \in H. \end{cases} \quad (4.14)$$

où $T(v) = \tilde{T}(v) - a(u_0, v)$. Sous les hypothèses (4.12), on peut alors appliquer le théorème de Lax Milgram (voir théorème 3.6 page 100) au problème (4.14) pour déduire l'existence et l'unicité de la solution de (4.13); notons que, comme la forme bilinéaire a est symétrique, ce problème admet aussi une formulation variationnelle :

$$\begin{cases} J(u) = \min_{v \in H_{\Gamma_0, g_0}^1} J(v), \\ J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) + T(v), \forall v \in H_{\Gamma_0, g_0}^1. \end{cases} \quad (4.15)$$

Dans ce cas, les méthodes de Ritz et Galerkin sont équivalentes. Remarquons que l'on peut choisir u_0 de manière abstraite, tant que u_0 vérifie $u_0 = g_0$ sur Γ_0 et $u_0 \in H^1$. Intéressons nous maintenant à la méthode d'approximation variationnelle. On approche l'espace H par $H_N = \operatorname{Vect}\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ et on remplace (4.14) par :

$$\begin{cases} \tilde{u}_N \in H_N \\ a(\tilde{u}_N, \phi_i) = T(\phi_i) - a(u_0, \phi_i), \forall i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (4.16)$$

On pose maintenant $\tilde{u}_N = \sum_{j=1}^N \tilde{u}_j \phi_j$. Le problème (4.16) est alors équivalent au système linéaire :

$$\mathcal{K}\tilde{U} = \mathcal{G},$$

avec

$$\begin{cases} \mathcal{K}_{ij} = a(\phi_j, \phi_i), i, j = 1, \dots, N, \\ \tilde{U} = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_N), \\ \mathcal{G}_i = T(\phi_i) - a(u_0, \phi_i), i = 1, \dots, N. \end{cases}$$

L'implantation numérique de la méthode d'approximation nécessite donc de :

1. construire \mathcal{K} et \mathcal{G}
2. résoudre $\mathcal{K}\tilde{U} = \mathcal{G}$.

Commençons par la construction de l'espace H_N et des fonctions de base pour une discrétisation par éléments finis de Lagrange du problème (4.14).

4.3.1 Construction de H_N et Φ_i

On considère une discrétisation à l'aide d'éléments finis de Lagrange, qu'on note : $(K_\ell, \Sigma_\ell, P_\ell)$ $\ell = 1, \dots, L$, où L est le nombre d'éléments. On note $S_i, i = 1, \dots, M$, les noeuds du maillage, et ϕ_1, \dots, ϕ_N , les fonctions de base, avec $N \leq M$. On peut avoir deux types de noeuds :

- les noeuds libres : $S_i \notin \Gamma_0$. On a N noeuds libres
- les noeuds liés : $S_i \in \Gamma_0$. On a $M - N$ noeuds liés.

Notons qu'on a intérêt à mettre des noeuds à l'intersection de Γ_0 et Γ_1 (ce seront des noeuds liés). Grâce à ceci, et à la cohérence globale et locale des éléments finis de Lagrange, on a $H_N \subset H$. On a donc bien des éléments finis conformes. Récapitulons alors les notations :

- M : nombre de noeuds total
- N : nombre de noeuds libres
- $M_0 = M - N$: nombre de noeuds liés
- $J_0 = \{\text{indices des noeuds liés}\} \subset \{1, \dots, M\}$. On a $\text{card}J_0 = M_0$
- $J = \{\text{indices des noeuds libres}\} = \{1 \dots M\} \setminus J_0$. On a $\text{card}J = N$.

Pour la programmation des éléments finis, on a besoin de connaître, pour chaque noeud (local) de chaque élément, son numéro dans la numérotation globale. Pour cela on introduit un tableau $\text{ng}(L, N_\ell)$, où L est le nombre d'éléments et N_ℓ est le nombre de noeuds par élément. (on le suppose constant par souci de simplicité, N_ℓ peut en fait dépendre de L . Exemple : triangle - quadrangle). Pour tout $\ell \in \{1, \dots, L\}$ et tout $r \in \{1, \dots, N_\ell\}$, $\text{ng}(\ell, r)$ est alors le numéro global du r -ième noeud du ℓ -ième élément. On a également besoin de connaître les coordonnées de chaque noeud. On a donc deux tableaux x et y de dimension M , où $x(i), y(i)$ représentent les coordonnées du i -ième noeud. Notons que les tableaux ng, x et y sont des données du mailleur (qui est un module externe par rapport au calcul éléments finis proprement dit). Pour les conditions aux limites, on se donne deux tableaux :

- CF : conditions de Fourier
 - CD : conditions de Dirichlet
- (on verra plus tard le format de ces deux tableaux)

4.3.2 Construction de \mathcal{K} et \mathcal{G}

On cherche à construire la matrice \mathcal{K} d'ordre $(N \times N)$, définie par :

$$\mathcal{K}_{ij} = a(\phi_j, \phi_i) \quad i, j \in J$$

Ainsi que le vecteur \mathcal{G} , défini par :

$$\mathcal{G}_i = T(\phi_i) - a(u_0, \phi_i) \quad i \in J \quad \text{card}J = N$$

La première question à résoudre est le choix de u_0 . En effet, contrairement au cas unidimensionnel (voir exercice 38 page 119), il n'est pas toujours évident de trouver $u_0 \in H_{\Gamma_0, g_0}^1$. Pour se faciliter la tâche, on commet un "crime variationnel", en remplaçant u_0 par

$$u_{0,N} = \sum_{j \in J_0}^N u_0(S_j) \phi_j.$$

Notons qu'on a pas forcément : $u_{0,N} \in H_{\Gamma_0, g_0}^1$; c'est en ce sens que l'on commet un "crime". Mais par contre, on a bien $u_{0,N}(S_j) = u_0(S_j)$ pour tout $j \in J$. On peut voir la fonction $u_{0,N}$ comme une approximation non conforme de $u_0 \in H_{\Gamma_0, g_0}^1$. On remplace donc \mathcal{G}_i par :

$$\mathcal{G}_i = T(\phi_i) - \sum_{j \in J_0} g_0(S_j) a(\phi_j, \phi_i).$$

Calculons maintenant $a(\phi_j, \phi_i)$ pour $j = 1, \dots, M$, et $i = 1, \dots, M$. On se sert donc pour l'implémentation pratique de la méthode, des fonctions de forme associées aux noeuds "liés", même si dans l'écriture du problème discret théorique, on n'en avait pas besoin.

Calcul de \mathcal{K} et \mathcal{G}

1. Calcul des contributions intérieures : on initialise les coefficients de la matrice \mathcal{K} et les composantes par les contributions provenant de a_Ω et T_Ω .

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{K}_{ij} &= a_\Omega(\phi_j, \phi_i) \\ \mathcal{G}_i &= T_\Omega(\phi_i) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} i = 1, \dots, N, \\ j = 1, \dots, N. \end{array}$$

2. Calcul des termes de bord de Fourier. On ajoute maintenant à la matrice \mathcal{K} les contributions de bord :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{ij} &\leftarrow \mathcal{K}_{ij} + a_{\Gamma_i}(\phi_j, \phi_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N. \\ \mathcal{G}_i &\leftarrow \mathcal{G}_i + T_{\Gamma_i}(\phi_i) \quad i = 1 \dots M. \end{aligned}$$

3. Calcul des termes de bord de Dirichlet. On doit tenir compte ici du relèvement de la condition de bord :

$$\mathcal{G}_i \leftarrow \mathcal{G}_i - \sum_{j \in J_0} g_0(N_i) \mathcal{K}_{ij} \quad \forall i \in J$$

Après cette affectation, les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{ij} &= a(\phi_j, \phi_i) \quad i, j \in J(\cup J_0) \\ \mathcal{G}_i &= T(\phi_i) - a(u_{0,N}, \phi_i). \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à résoudre le système linéaire

$$\sum_{j \in J} \mathcal{K}_{ij} \alpha_j = \mathcal{G}_i, \quad \forall i \in J. \quad (4.17)$$

4. Prise en compte des noeuds liés. Pour des questions de structure de données, on inclut en général les noeuds liés dans la résolution du système, et on résout donc le système linéaire d'ordre $M \geq N$ suivant :

$$\sum_{j=1, \dots, N} \tilde{\mathcal{K}}_{ij} \alpha_j = \mathcal{G}_i, \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (4.18)$$

avec $\tilde{\mathcal{K}}_{ij} = \mathcal{K}_{ij}$ pour $i, j \in J$, $\tilde{\mathcal{K}}_{ij} = 0$ si $(i, j) \notin J^2$, et $i \neq j$, et $\tilde{\mathcal{K}}_{ii} = 1$ si $i \notin J$. Ces deux systèmes sont équivalents, puisque les valeurs aux noeuds liées sont fixées.

Si par chance on a numéroté les noeuds de manière à ce que tous les noeuds liés soient en fin de numérotation, c.à.d. si $J = \{1, \dots, N\}$ et $J_0 = \{N+1, \dots, M\}$, le système (4.18) est de la forme :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathcal{K} & & & & & 0 \\ \text{---} & & & & & \text{---} \\ 0 & & & & & Id_M \end{array} \right), \quad U = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \\ \text{---} \\ \alpha_{N+1} \\ \vdots \\ \alpha_M \end{pmatrix}, \quad \text{et } \mathcal{G} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{G}_N \\ \text{---} \\ \mathcal{G}_{N+1} \\ \vdots \\ \mathcal{G}_M \end{pmatrix}$$

Dans le cas où la numérotation est quelconque, les noeuds liés ne sont pas forcément à la fin, et pour obtenir le système linéaire d'ordre M (4.18) (donc incluant les inconnues α_i , $i \in J_0$, qui n'en sont pas vraiment) on peut adopter deux méthodes :

(a) Première méthode : on force les valeurs aux noeuds liés de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{ii} &\leftarrow 1 \text{ pour tout } i \in J_0 \\ \mathcal{K}_{ij} &\leftarrow 0 \text{ pour tout } i \in J_0 \quad j \in \{1 \dots M\} \quad i \neq j \\ \mathcal{G}_i &\leftarrow g_0(S_i) \text{ pour tout } i \in J_0\end{aligned}$$

(b) Deuxième méthode : on force les valeurs aux noeuds liés de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{ii} &\leftarrow 10^{20} \quad \forall i \in J_0 \\ \mathcal{G}_i &\leftarrow 10^{20} g_0(S_i) \quad \forall i \in J_0\end{aligned}$$

La deuxième méthode permet d'éviter l'affectation à 0 de coefficients extra-diagonaux de la matrice. Elle est donc un peu moins chère en temps de calcul.

Conclusion Après les calculs 1, 2, 3, 4, on a obtenu une matrice \mathcal{K} d'ordre $M \times M$ et le vecteur \mathcal{G} de \mathbb{R}^M . Soit $\alpha \in \mathbb{R}^M$ la solution du système $\mathcal{K}\alpha = \mathcal{G}$. Rappelons qu'on a alors :

$$\begin{aligned}u_N &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i, \\ &= \sum_{i \in J} \alpha_i \phi_i + \sum_{i \in J_0} \alpha_i \phi_i \\ u_N &= \tilde{u}_N + u_0\end{aligned}$$

Remarque 4.15 (Numérotation des noeuds) Si on utilise une méthode itérative sans préconditionnement, la numérotation des noeuds n'est pas cruciale. Elle l'est par contre dans le cas d'une méthode directe et si on utilise une méthode itérative avec préconditionnement. Le choix de la numérotation s'effectue pour essayer de minimiser la largeur de bande. On pourra à ce sujet étudier l'influence de la numérotation sur deux cas simples sur la structure de la matrice.

4.3.3 Calcul de a_Ω et T_Ω , matrices élémentaires.

Détaillons maintenant le calcul des contributions intérieures, c'est à dire $a_\Omega(\phi_i, \phi_j)$ $i = 1, \dots, M$, $j = 1, \dots, M$ et $T_\Omega(\phi_i)$ $i = 1, \dots, M$. Par définition,

$$a_\Omega(\phi_i, \phi_j) = \int_\Omega p(x) \nabla \phi_i(x) \nabla \phi_j(x) dx + \int_\Omega q(x) \phi_i(x) \phi_j(x) dx.$$

Décomposons Ω à l'aide du maillage éléments finis.

$$\Omega = \bigcup_{\ell=1}^L K_\ell.$$

En notant $\theta(\phi_i, \phi_j)(x) = p(x) \nabla \phi_i(x) \nabla \phi_j(x) + q(x) \phi_i(x) \phi_j(x)$,

On a donc :

$$a_\Omega(\phi_i, \phi_j) = \sum_{\ell=1}^L \int_{K_\ell} \theta(\phi_i, \phi_j) dx.$$

Pour r et s numéros locaux de l'élément K_ℓ , on pose :

$$k_{r,s}^\ell = \int_{K_\ell} \theta(\phi_s, \phi_r) dx.$$

On va calculer $k_{r,s}^\ell$ puis on calcule $a_\Omega(\phi_i, \phi_j)$, en effectuant un parcours sur les éléments, ce qui s'exprime par l'algorithme suivant :

Initialisation : $\mathcal{K}_{ij} \leftarrow 0$, $i = 1, \dots, M$, $j \leq i$.
 Boucle sur les éléments
 Pour $\ell = 1$ à L faire
 Pour $r = 1$ à N_ℓ faire

$i = \text{ng}(\ell, r)$ numéro global du noeud r de l'élément ℓ

Pour $s = 1$ à r faire

calcul de $k_{r,s}^\ell$

$j = \text{ng}(\ell, s)$

si $i \geq j$

$\mathcal{K}_{ij} \leftarrow \mathcal{K}_{ij} + k_{r,s}^\ell$

sinon

$\mathcal{K}_{ji} \leftarrow \mathcal{K}_{ji} + k_{r,s}^\ell$

Fin pour

Fin pour

On a ainsi construit complètement la matrice de rigidité \mathcal{K} . Il reste à savoir comment calculer

$$k_{r,s}^\ell = \int_{\ell_e} \theta(\phi_s, \phi_r)(x) dx.$$

Ce calcul s'effectue sur l'élément de référence, et non sur les éléments K_ℓ . On calcule ensuite la valeur de $k_{r,s}^\ell$ par des changements de variable à l'aide de la transformation F_ℓ (voir Figure 4.4 page 138). Notons :

$$F_\ell(\bar{x}, \bar{y}) = (x, y) = (a_0^\ell + a_1^\ell \bar{x} + a_2^\ell \bar{y}, b_0^\ell + b_1^\ell \bar{x} + b_2^\ell \bar{y}) \quad (4.19)$$

Notons que les coefficients a_i^ℓ et b_i^ℓ sont déterminés à partir des connaissances des coordonnées $(x(i), y(i))$ où $i = \text{ng}(\ell, r)$. En effet, on peut déduire les coordonnées locales $x(r), y(r)$, $r = 1, N_\ell$, des noeuds de l'élément ℓ , à partir des coordonnées globales des noeuds $(x(i), y(i))$, et du tableau $\text{ng}(\ell, r) = i$. Sur l'élément courant K_ℓ , le terme élémentaire $k_{r,s}^\ell$ s'écrit donc

$$k_{r,s}^\ell = \int_{\ell} \theta(\phi_s(x, y), \phi_r(x, y)) dx dy.$$

Or, $(x, y) = F_\ell(\bar{x}, \bar{y})$; donc par changement de variables, on a :

$$k_{r,s}^\ell = \int_{\bar{\ell}} \theta(\phi_s \circ F_\ell(\bar{x}, \bar{y}), \phi_r \circ F_\ell(\bar{x}, \bar{y})) \text{Jac}_{\bar{x}, \bar{y}}(F_\ell) d\bar{x} d\bar{y}$$

ou $\text{Jac}_{\bar{x}, \bar{y}}(F_\ell)$ désigne le Jacobien de F_ℓ en (\bar{x}, \bar{y}) . Or, $\phi_s \circ F_\ell = \bar{\phi}_s$, et, puisque F_ℓ est définie par (4.19), on a :

$$\text{Jac}(F_\ell) = \text{Det}(DF_\ell) = \begin{vmatrix} a_1^\ell & b_1^\ell \\ a_2^\ell & b_2^\ell \end{vmatrix} = |a_1^\ell b_2^\ell - a_2^\ell b_1^\ell|$$

donc $k_{r,s}^\ell = \text{Jac}(F_\ell) \bar{k}_{r,s}$, où

$$\bar{k}_{r,s} = \int_{\bar{\ell}} \theta(\bar{\phi}_s(\bar{x}, \bar{y}), \bar{\phi}_r(\bar{x}, \bar{y})) d\bar{x} d\bar{y}$$

Etudions maintenant ce qu'on obtient pour $\bar{k}_{r,s}$ dans le cas du problème modèle (4.11), on a :

$$\bar{k}_{r,s} = \int_{\bar{\ell}} [p(\bar{x}, \bar{y}) \nabla \bar{\phi}_s(\bar{x}, \bar{y}) \nabla \bar{\phi}_r(\bar{x}, \bar{y}) + q(\bar{x}, \bar{y}) \bar{\phi}_s(\bar{x}, \bar{y}) \bar{\phi}_r(\bar{x}, \bar{y})] d\bar{x} d\bar{y}.$$

Les fonctions de base $\bar{\phi}_s$ et $\bar{\phi}_r$ sont connues; on peut donc calculer $\bar{k}_{r,s}$ explicitement si p et q sont faciles à intégrer. Si les fonctions p et q ou les fonctions de base $\bar{\phi}$, sont plus compliquées, on calcule $\bar{k}_{r,s}$ en effectuant une intégration numérique. Rappelons que le principe d'une intégration numérique est d'approcher l'intégrale d'une fonction continue donnée ψ ,

$$I = \int_{\bar{\ell}} \psi(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y}, \text{ par } \tilde{I} = \sum_{i=1}^{NP_I} \omega_i(P_i) \psi(P_i),$$

où NP_I est le nombre de points d'intégration, notés P_i , qu'on appelle souvent points d'intégration de Gauss, et les coefficients ω_i sont les poids associés. Notons que les points P_i et les poids ω_i sont indépendants de ψ . Prenons par exemple, dans le cas unidimensionnel, $\bar{K} = [0, 1]$, $p_1 = 0, p_2 = 1$, et $\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2}$. On approche alors

$$I = \int_0^1 \psi(x) dx \text{ par } \tilde{I} = \frac{1}{2}(\psi(0) + \psi(1)).$$

C'est la formule (bien connue) des trapèzes. Notons que dans le cadre d'une méthode, il est nécessaire de s'assurer que la méthode d'intégration numérique choisie soit suffisamment précise pour que :

1. le système $\mathcal{K}_\alpha = \mathcal{G}(N \times N)$ reste inversible,
2. l'ordre de convergence de la méthode reste le même.

Examinons maintenant des éléments en deux dimensions d'espace.

1. Élément fini P_1 sur triangle Prenons $NP_I = 1$ (on a donc un seul point de Gauss), choisissons $p_1 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, le centre de gravité du triangle \bar{K} , et $\omega_1 = 1$. On approche alors

$$I = \int_{\bar{\ell}} \psi(\bar{x}) d\bar{x} \text{ par } \psi(p_1).$$

On vérifiera que cette intégration numérique est exacte pour les polynômes d'ordre 1 (exercice 58 page 165).

2. P_2 sur triangles. On prend maintenant $NP_I = 3$, et on choisit comme points de Gauss :

$$p_1 = \left(\frac{1}{2}, 0\right), p_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), p_3 = \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

et les poids d'intégration $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \frac{1}{6}$. On peut montrer que cette intégration numérique est exacte pour les polynômes d'ordre 2 (voir exercice 58 page 165).

Remarquons que, lors de l'intégration numérique du terme élémentaire

$$k_{r,s}^\ell = \int_{\bar{\ell}} [p(\bar{x}, \bar{y})(F_\ell(\bar{x}, \bar{y})) \nabla \bar{\phi}_r(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \nabla \bar{\phi}_s(\bar{x}, \bar{y}) + q(\bar{x}, \bar{y})(F_\ell(\bar{x}, \bar{y})) \bar{\phi}_r(\bar{x}, \bar{y}) \bar{\phi}_s] d\bar{x} d\bar{y},$$

on approche $k_{r,s}^\ell$ par

$$\bar{k}_{r,s} \simeq \sum_{i=1}^{NP_I} \omega_i [p(F_\ell(P_i)) \nabla \bar{\phi}_r(P_i) \cdot \nabla \bar{\phi}_s(P_i) + q(F_\ell(P_i)) \bar{\phi}_r(P_i) \bar{\phi}_s(P_i)].$$

Les valeurs $\nabla \bar{\phi}_r(P_i)$, $\nabla \bar{\phi}_s(P_i)$, $\bar{\phi}_r(P_i)$ et $\bar{\phi}_s(P_i)$ sont calculées une fois pour toutes, et dans la boucle sur ℓ , il ne reste donc plus qu'à évaluer les fonctions p et q aux points $F_\ell(P_i)$. Donnons maintenant un résumé de la mise en oeuvre de la procédure d'intégration numérique (indépendante de ℓ). Les données de la procédure sont :

- les coefficients $\omega_i, i = 1, \dots, NP_I$,
 - les coordonnées $(xpg(i), ypg(i)), i = 1, \dots, NP_I$ des points de Gauss,
 - les valeurs de $\phi_r, \frac{\partial \phi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ aux points de Gauss, notées $\phi(r, i), \phi_x(r, i)$ et $\phi_y(r, i), r = 1 \dots N_\ell, i = 1, \dots, NP_I$.
- Pour ℓ donné, on cherche à calculer :

$$I = \int_{\bar{K}} p(F_\ell(\bar{x}, \bar{y})) \frac{\partial \phi_r}{\partial \bar{x}}(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial \phi_s}{\partial \bar{y}}(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} + \int_e q(F_\ell(\bar{x}, \bar{y})) \phi_r(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} \phi_s(\bar{x}, \bar{y}).$$

On propose l'algorithme suivant :

Initialisation : $I \leftarrow 0$

Pour $i = 1$ à NP_I , faire :

$$p_i = p(F_e(P_i))$$

$$q_i = q(F_e(P_i))$$

$$I \leftarrow I + \omega_i (p_i \phi_x(r, i) \phi_y(s, i) + q_i \phi(r, i) \phi(s, i))$$

Fin pour

On procède de même pour le calcul du second membre

$$T_\Omega(\phi_i) = \int_\Omega f(x, y) \phi_i'(x, y) dx dy = \sum_{\ell=1}^L g_\ell, \text{ où } g_\ell = \int_{\ell_e} f(x, y) \phi_i(x, y) dx dy.$$

L'algorithme s'écrit :

Initialisation de \mathcal{G} à 0 : $\mathcal{G}_i \leftarrow 0 \quad i = 1$ à M

Pour $\ell = 1$ à L

Pour $r = 1$ à N_ℓ

$$\text{Calcul de } g_\ell^r = \int_{\ell_e} f(x, y) \phi_r(x, y) dx dy$$

$$i = \text{ng}(\ell, r)$$

$$\mathcal{G}_i \leftarrow \mathcal{G}_i + g_\ell^r$$

Fin pour

Fin pour

Il reste le calcul de g_ℓ^r qui se ramène au calcul de l'élément de référence par changement de variable.

On a :

$$g_\ell^r = \int_{K_\ell} f(x, y) \phi_r(x, y) dx dy = \int_{\bar{K}} f \circ F_\ell(\bar{x}, \bar{y}) \bar{\phi}_r(\bar{x}, \bar{y}) J_{ac_{\bar{x}, \bar{y}}}(F_\ell) d\bar{x} d\bar{y}.$$

L'intégration numérique est identique à celle effectuée pour $\bar{k}_{r,s}$.

4.3.4 Calcul de a_{Γ_1} et T_{Γ_1} (contributions des arêtes de bord "Fourier").

Détaillons maintenant le calcul des contributions des bords où s'applique la condition de Fourier, c'est à dire $a_{\Gamma_1}(\phi_i, \phi_j)$ $i = 1, \dots, M$, $j = 1, \dots, M$ et $T_{\Gamma_1}(\phi_i)$ $i = 1, \dots, M$. Par définition,

$$a_{\Gamma_1}(\phi_i, \phi_j) = \int_{\Gamma_1} p(x) \nabla \phi_i(x) \cdot \nabla \phi_j(x) dx + \int_{\Gamma_1} q(x) \phi_i(x) \phi_j(x) dx.$$

Notons que $a_{\Gamma_1}(\phi_i, \phi_j) = 0$ si ϕ_i et ϕ_j sont associées à des noeuds S_i, S_j de d'un élément sans arête commune avec les arêtes de la frontière. Soit $L1$ le nombre d'arêtes $\epsilon_k, k = 1, \dots, L1$ du maillage incluses dans Γ_1 . Rappelons que les noeuds soumis aux conditions de Fourier sont repertoriés dans un tableau CF , de dimensions $(L1, 2)$, qui donne les informations suivantes

1. $CF(k, 1)$ contient le numéro ℓ de l'élément K_ℓ auquel appartient l'arête ϵ_k .
2. $CF(k, 2)$ contient le premier numéro des noeuds de l'arête ϵ_k dans l'élément K_ℓ . On suppose que la numérotation des noeuds locaux a été effectuée de manière "adroite", par exemple dans le sens trigonométrique. Dans ce cas, $CF(k, 2)$ détermine tous les noeuds de l'arête ϵ_k dans l'ordre, puisqu'on connaît le nombre de noeuds par arête et le sens de numérotation des noeuds. Donnons des exemples pour trois cas différents, représentés sur la figure 4.7.
 - (a) Dans le premier cas (à droite sur la figure), qui représente un élément fini $P1$, on a $CF(k, 2) = 3$ et le noeud suivant sur l'arête est 1.
 - (b) Dans le second cas (au centre sur la figure), qui représente un élément fini $P2$, on a $CF(k, 2) = 3$ et les noeuds suivants sur l'arête sont 4 et 5.
 - (c) Enfin dans l'élément $P1$ "de coin" représenté à gauche sur la figure, on a $CF(k, 1) = \ell$, $CF(k', 1) = \ell$, $CF(k, 2) = 1$, $CF(k', 2) = 2$.

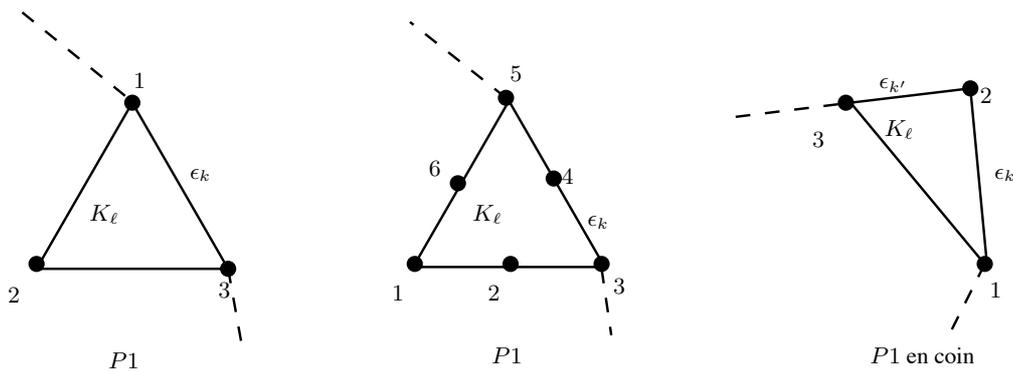


FIGURE 4.7 – Exemples de numérotation d'arête du bord

Pour $k = 1, \dots, L1$, on note \hat{S}_k l'ensemble des noeuds locaux de ϵ_k , donnés par $CF(k, 2)$ en appliquant la règle *ad hoc* (par exemple le sens trigonométrique). On peut alors définir :

$$S_k = \{(r, s) \in (\hat{S}_k)^2 / r < s\}$$

L'algorithme de prise en compte des conditions de Fourier s'écrit alors :

Pour $k = 1 \dots L1$

$\ell = CF(k, 1)$.
 Pour chaque $(r, s) \in S_k$ faire
 calcul de $I_{rs}^\ell = \int_{C_k} p(x)\sigma(x)\phi_r^\ell(x)\phi_s^\ell(x)dx$ (éventuellement avec intégration numérique)
 $i = \text{ng}(\ell, r)$
 $j = \text{ng}(\ell, s)$
 si $j \leq i$
 $\mathcal{K}_{ij} \leftarrow \mathcal{K}_{ij} + I_{rs}^\ell$
 sinon
 $\mathcal{K}_{ij} \leftarrow \mathcal{K}_{ji} + I_{rs}^\ell$
 Fin si
 Fin pour
 Fin pour

Le calcul de I_{rs}^ℓ s'effectue sur l'élément de référence (avec éventuellement intégration numérique). De même, on a une procédure similaire pour le calcul de $T_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_1} p(x)g_1(x)v(x)d\gamma(x)$.

$$\mathcal{G}_i \leftarrow \mathcal{G}_i + \int_{\Gamma_2} p(x)g_1(x)\phi_i(x)d\gamma(x)$$

4.3.5 Prise en compte des noeuds liés dans le second membre

Après les calculs précédents, on a maintenant dans \mathcal{G}_i :

$$\mathcal{G}_i = \int_{\Omega} f(x)\phi_i(x)dx + \int_{\Gamma_1} p(x)g_1(x)\phi_i(x)d\gamma(x)$$

Il faut maintenant retirer du second membre, les combinaisons venant des noeuds liés :

$$\mathcal{G}_i \leftarrow \mathcal{G}_i - \sum_{j \in J_0} g_0(S_j)a(\phi_j, \phi_i)$$

où J_0 est l'ensemble des indices des noeuds liés. On utilise pour cela le tableau CD qui donne les conditions, de Dirichlet, de dimension M_0 où $M_0 = \text{card}J_0$. Pour $i_0 = 1, \dots, M_0$, $CD(i_0) = j_0 \in J_0$ est le numéro du noeud lié dans la numérotation globale. La procédure est donc la suivante.

Pour $i_0 = 1, \dots, M_0$, faire
 $j = CD(i_0)$
 $a = g_0(S_j)$
 si $(i \leq j)$ $\mathcal{G}_i \leftarrow \mathcal{G}_i - a\mathcal{K}_{ij}$ sinon $\mathcal{G}_i \leftarrow$
 $\mathcal{G}_i - a\mathcal{K}_{ji}$ sinon Fin si Fin pour

4.3.6 Stockage de la matrice \mathcal{K}

Remarquons que la matrice \mathcal{K} est creuse (et même très creuse), en effet $a(\phi_j, \phi_i) = 0$ dès que

$$\text{supp}(\phi_i) \cap \text{supp}(\phi_j) = \emptyset$$

Examinons une possibilité de stockage de la matrice \mathcal{K} . Soit NK le nombre d'éléments non nuls de la matrice \mathcal{K} . On peut stocker la matrice dans un seul tableau $KMAT$ en mettant bout à bout les coefficients non nuls de la première ligne, puis ceux de la deuxième ligne, etc... jusqu'à ceux de la dernière ligne. Pour repérer les éléments de \mathcal{K} dans le tableau $KMAT$, on a alors besoin de pointeurs. Le premier pointeur, nommé, IC est de dimension NK . La valeur de $IC(k)$ est le numéro de la colonne de $K(k)$. On introduit alors le pointeur $IL(\ell)$, $\ell = 1, \dots, NL$, où NL est le nombre de lignes, où $IL(\ell)$ est l'indice dans $KMAT$ du début de la ℓ -ième ligne. L'identification entre $KMAT$ et \mathcal{K} se fait alors par la procédure suivante :

Pour $k = 1 \dots NK$
 si $IL(m) \leq k < IL(m+1)$ alors
 $KMAT(k) = \mathcal{K}_{m, IC(k)}$
 Fin si
 Fin pour

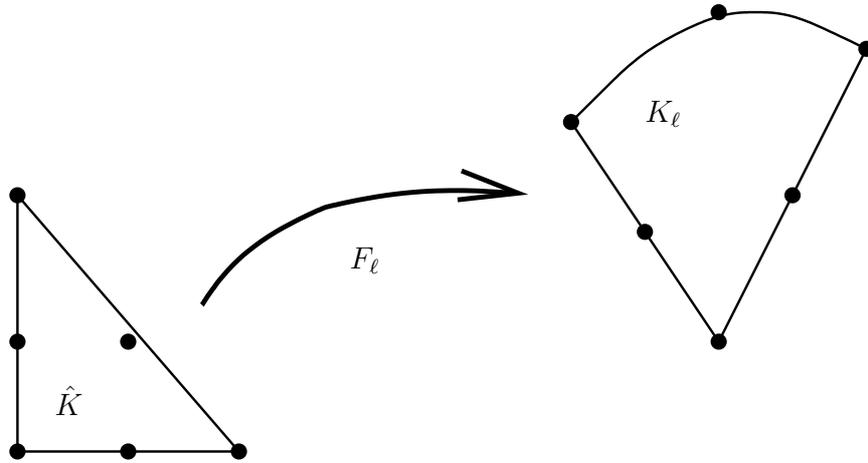


FIGURE 4.8 – Transformation isoparamétrique

La matrice \mathcal{K} est symétrique définie positive, on peut donc utiliser une méthode de type gradient conjugué préconditionné (voir cours de Licence). Notons que la structure de la matrice dépend de la numérotation des nœuds. Il est donc important d'utiliser des algorithmes performants de maillage et de numérotation.

4.4 Éléments finis isoparamétriques

Dans le cas où Ω est polygonal, si on utilise des éléments finis de type P_2 , les nœuds de la frontière sont effectivement sur la frontière même si on les calcule à partir de l'élément fini de référence. Par contre, si le bord est courbe, ce n'est plus vrai. L'utilisation d'éléments finis "isoparamétriques" va permettre de faire en sorte que tous les nœuds frontières soient effectivement sur le bord, comme sur la figure 4.8. Pour obtenir une transformation isoparamétrique, on définit

$$\begin{aligned} F_\ell : K &\rightarrow K_\ell \\ (\bar{x}, \bar{y}) &\mapsto (x, y) \end{aligned}$$

à partir des fonctions de base de l'élément fini de référence :

$$x = \sum_{r=1}^{N_\ell} x_r \bar{\phi}_r(\bar{x}, \bar{y}), \quad y = \sum_{r=1}^{N_\ell} y_r \bar{\phi}_r(\bar{x}, \bar{y}),$$

où N_ℓ est le nombre de nœuds de l'élément et (x_r, y_r) sont les coordonnées du r -ième nœud de K_ℓ . Remarquons que la transformation F_ℓ isoparamétrique P_1 est identique à celle des éléments finis classiques. Par contre, la transformation isoparamétrique P_2 n'est plus affine, alors qu'elle l'est en éléments finis classiques. Notons que les fonctions de base locales vérifient toujours

$$\phi_r^\ell \circ F_\ell = \phi_r, \quad \forall \ell = 1, \dots, L, \quad \forall r = 1, \dots, N_\ell.$$

On peut alors se poser le problème de l'inversibilité de F_ℓ . On ne peut pas malheureusement démontrer que F_ℓ est inversible dans tous les cas, toutefois, cela s'avère être le cas dans la plupart des cas pratiques. L'intérêt de la transformation isoparamétrique est de pouvoir traiter les bords courbes, ainsi que les éléments finis Q_1 sur quadrilatères. Notons que le calcul de ϕ_r^ℓ est toujours inutile, car on se ramène encore à l'élément de référence.

4.5 Analyse d'erreur

4.5.1 Erreurs de discrétisation et d'interpolation

On considère toujours le problème modèle (4.11) page 146 sur lequel on a étudié la mise en oeuvre de la méthode des éléments finis. On rappelle que la formulation faible de ce problème est donnée en (4.14) page 147, et que

sous les hypothèses (4.12) page 146, le problème (4.14) admet une unique solution $\tilde{u} \in H = H_{\Gamma_0}^1 = \{u \in H^1(\Omega); u = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$. La méthode d'approximation variationnelle du problème (4.14) consiste à chercher $\tilde{u}_N \in H_N = \text{Vect}\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ solution de (4.16) page 147, où les fonctions ϕ_1, \dots, ϕ_N sont les fonctions de base éléments finis associés aux noeuds x_1, \dots, x_N . Comme les hypothèses (3.21) page 107 sont vérifiées, l'estimation (3.29) page 110 entre \tilde{u} solution de (4.14) et $\tilde{u}^{(N)}$ solution de (4.16) est donc vérifiée. On a donc :

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_N\|_{H^1} \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} d(\tilde{u}, H_N),$$

où M (resp. α) est la constante de continuité (resp. de coercivité) de a . Comme $u = u_0 + \tilde{u}$, on a, en posant $c = \sqrt{\frac{M}{\alpha}}$,

$$\|u - u_N\| \leq C \|u - w\| \forall w \in H_N, \quad (4.20)$$

où $u_N = \tilde{u}_N + u_0$. Notons que dans l'implantation pratique de la méthode d'éléments finis, lorsqu'on calcule $T(v) = T(v) - a(u_0, v)$, on remplace u_0 par $u_{0,N} \in H_N$, donc on commet une légère erreur sur T . De plus, on calcule $a(\phi_i, \phi_j)$ à l'aide d'intégrations numériques : l'inégalité (4.20) n'est donc vérifiée en pratique que de manière approchée. On supposera cependant, dans la suite de ce paragraphe, que les erreurs commises sont négligeables et que l'inégalité (4.20) est bien vérifiée. De la même manière qu'on a défini l'interpolée sur un élément K , (voir définition 4.3 page 137, on va maintenant définir l'interpolée sur $H^1(\Omega)$ tout entier, de manière à établir une majoration de l'erreur de discrétisation grâce à (4.20).

Définition 4.16 (Interpolée dans H_N) . Soit $u \in H^1(\Omega)$ et $H_N = \text{Vect}\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ où les fonctions $\phi_1 \dots \phi_N$ sont des fonctions de base éléments finis associées aux noeuds $S_1 \dots S_N$ d'un maillage éléments finis de Ω . Alors on définit l'interpolée de u dans H_N , $u_I \in H_N$ par :

$$u_I = \sum_{i=1}^N u(S_i) \phi_i.$$

Comme $u_I \in H_N$, on peut prendre $W = u_I$ dans (4.20), ce qui fournit un majorant de l'erreur de discrétisation :

$$\|u - u_N\|_{H^1} \leq C \|u - u_I\|_{H^1}$$

On appelle erreur d'interpolation le terme $\|u - u_I\|_{H^1}$

4.5.2 Erreur d'interpolation en dimension 1

Soit $\Omega =]0, 1[$, on considère un maillage classique, défini par les $N + 2$ points $(x_i)_{i=0 \dots N+1}$, avec $x_0 = 0$ et $x_{N+1} = 1$, et on note

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, \dots, N + 1, \quad \text{et } h = \max\{h_i, i = 0, \dots, N + 1\}$$

On va montrer que si $u \in H^2(]0, 1[)$, alors on peut obtenir une majoration de l'erreur d'interpolation $\|u - u_I\|_{H^1}$. On rappelle (voir exercice 34 page 119) que si $u \in H^1(]0, 1[)$ alors u est continue.

En particulier, on a donc $H^2(]0, 1[) \subset C^1(]0, 1[)$. Remarquons que ce résultat est lié à la dimension 1, voir injection de Sobolev, cours d'analyse fonctionnelle ou [1]. On va démontrer le résultat suivant sur l'erreur d'interpolation.

Théorème 4.17 (majoration de l'erreur d'interpolation, dimension 1) Soit $u \in H^2(]0, 1[)$, et soit u_I son interpolée sur $H_N = \text{Vect}\{\phi_i, i = 1, \dots, N\}$, où ϕ_i désigne la i -ème fonction de base élément fini P1 associée au noeud x_i d'un maillage élément fini de $]0, 1[$. Alors il existe $C \in \mathbb{R}$ ne dépendant que de u , tel que

$$\|u - u_I\|_{H^1} \leq Ch. \quad (4.21)$$

Démonstration : On veut estimer

$$\|u - u_I\|_{H^1}^2 = |u - u_I|_0^2 + |u - u_I|_1^2$$

où $|v|_0 = \|v\|_{L^2}$ et $|v|_1 = \|Dv\|_{L^2}$. Calculons $|u - u_I|_1^2$:

$$|u - u_I|_1^2 = \int_0^1 |u' - u_I'|^2 dx = \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u'(x) - u_I'(x)|^2 dx.$$

Or pour $x \in]x_i, x_{i+1}[$ on a

$$u'_I = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_i} = u'(\xi_i),$$

pour un certain $\xi_i \in]x_i, x_{i+1}[$. On a donc :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |u'(x) - u'_I(x)|^2 dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u'(x) - u'(\xi_i)|^2 dx.$$

On en déduit que :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |u'(x) - u'_I(x)|^2 dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left| \int_{\xi_i}^x u''(t) dt \right|^2 dx,$$

et donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u'(x) - u'_I(x)|^2 dx &\leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{\xi_i}^x |u''(t)|^2 dt |x - \xi_i| dx \\ &\leq h_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\int_{\xi_i}^x |u''(t)|^2 dt \right) dx, \end{aligned}$$

car $|x - \xi_i| \leq h_i$. En réappliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |u'(x) - u'_I(x)|^2 dx \leq h_i^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(t)|^2 dt$$

En sommant sur i , ceci entraîne :

$$|u - u_I|_1^2 \leq h^2 \int_0^1 |u''(t)|^2 dt. \quad (4.22)$$

Il reste maintenant à majorer $|u - u_I|_0^2 = \int_0^1 |u - u_I|^2 dx$. Pour $x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$|u(x) - u_I(x)|^2 = \left(\int_{x_i}^x (u'(t) - u'_I(t)) dt \right)^2.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a donc :

$$|u(x) - u_I(x)|^2 \leq \int_{x_i}^x (u'(t) - u'_I(t))^2 dt \underbrace{|x - x_i|}_{\leq h_i}$$

Par des calculs similaires aux précédents, on obtient donc :

$$\begin{aligned} |u(x) - u_I(x)|^2 &\leq \int_{x_i}^x h_i \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(t)|^2 dt \right) dx h_i \\ &\leq h_i^3 \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

En intégrant sur $[x_i, x_{i+1}]$, il vient :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |u(x) - u_I(x)|^2 dx \leq h_i^4 \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(t)|^2 dt,$$

et en sommant sur $i = 1, \dots, N$:

$$\int_0^1 |u(x) - u_I(x)|^2 dx \leq h^4 \int_0^1 |u''(t)|^2 dt.$$

On a donc :

$$|u - u_I|_0 \leq h^2 |u|_2$$

ce qui entraîne, avec (4.22) :

$$\begin{aligned} \|u - u_I\|^2 &\leq h^4 |u|_2^2 + h^2 |u|_2^2 \\ &\leq (1 + h^2) h^2 |u|_2^2 \end{aligned}$$

On en déduit le résultat annoncé. ■

On en déduit le résultat d'estimation d'erreur suivant :

Corollaire 4.18 (Estimation d'erreur, P1, dimension 1) Soit $\Omega =]0, 1[$; soit $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H_0^1(\Omega)$ l'unique solution du problème

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx, \end{cases},$$

et $u_{\mathcal{T}}$ l'approximation éléments finis P1 obtenue sur un maillage admissible \mathcal{T} de pas $h_{\mathcal{T}} = \max_{i=1, \dots, N} \{h_i\}$. Alors il existe $C \in \mathbb{R}$ ne dépendant que de Ω et f tel que $\|u - u_{\mathcal{T}}\| < Ch$.

Ce résultat se généralise au cas de plusieurs dimensions d'espace (voir Ciarlet); si Ω un ouvert polygonal convexe de \mathbb{R}^d , $d \geq 1$, le résultat des conditions géométriques sur le maillage, nécessaires pour obtenir le résultat d'interpolation. Par exemple pour un maillage triangulaire en deux dimensions d'espace, intervient une condition d'angle : on demande que la famille de maillages considérée soit telle qu'il existe $\beta > 0$ tel que $\beta \leq \theta \leq \pi - \beta$ pour tout angle θ du maillage.

Remarque 4.19 (Sur les techniques d'estimation d'erreur) Lorsqu'on a voulu montrer des estimations d'erreur pour la méthode des différences finies, on a utilisé le principe de positivité, la consistance et la stabilité en norme L^∞ . En volumes finis et éléments finis, on n'utilise pas le principe de positivité. En volumes finis, la stabilité en norme L^2 est obtenue grâce à l'inégalité de Poincaré discrète, et la consistance est en fait la consistance des flux. Notons qu'en volumes finis on se sert aussi de la conservativité des flux numériques pour la preuve de convergence. Enfin, en éléments finis, la stabilité est obtenue grâce à la coercivité de la forme bilinéaire, et la consistance provient du contrôle de l'erreur d'interpolation.

Même si le principe de positivité n'est pas explicitement utilisé pour les preuves de convergence des éléments finis et volumes finis, il est toutefois intéressant de voir à quelles conditions ce principe est respecté, car il est parfois très important en pratique.

Reprenons d'abord le cas du schéma volumes finis sur un maillage \mathcal{T} admissible pour la discrétisation de l'équation (3.1).

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Rappelons que le schéma volumes finis s'écrit :

$$\sum_{K \in \mathcal{C}} \left(\sum_{\sigma \in \xi_K \cap \xi_{int}} \tau_{K,L} (u_K - u_L) + \sum_{\sigma \in \xi_K \cap \xi_{ext}} \tau_{K,\sigma} u_K \right) = |K| f_K, \quad (4.23)$$

avec

$$\tau_{K,L} = \frac{|K||L|}{d(x_K, x_L)} \text{ et } \tau_{K,\sigma} = \frac{|\sigma|}{d(x_K, \partial\Omega)},$$

où $|K|$, (resp. $|\sigma|$) désigne la mesure de Lebesgue en dimension d (resp. $d-1$) de K (resp. σ).

Notons que les coefficients $\tau_{K,L}$ et $\tau_{K,\sigma}$ sont positifs, grâce au fait que le maillage est admissible (et donc $X_K \vec{X}_L = d(X_K, X_L) n_{\vec{K}L}$, où $X_K \vec{X}_L$ désigne le vecteur d'extrémités X_K et X_L et $n_{\vec{K}L}$ la normale unitaire à $K|L$ sortante de K).

Notons que le schéma (4.23) s'écrit comme une somme de termes d'échange entre les mailles K et L , avec des coefficients τ_{KL} positifs. C'est grâce à cette propriété que l'on montre facilement que le principe de positivité est vérifié. Considérons maintenant la méthode des éléments finis P1, pour la résolution du problème (3.1) sur maillage triangulaire. On sait (voir par exemple Ciarlet) que si le maillage satisfait la condition faible de Delaunay (qui stipule que la somme de deux angles opposés à une même arête doit être inférieure à π), alors le principe du maximum est vérifié. Ce résultat peut se retrouver en écrivant le schéma éléments finis sous la forme d'un schéma volumes finis.

4.5.3 Super convergence

On considère ici un ouvert Ω polygonal convexe de \mathbb{R}^d , $d \geq 1$, et on suppose que $f \in L^2(\Omega)$. On s'intéresse à l'approximation par éléments finis P1 de la solution $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème (3.5). On a vu dans le paragraphe précédent (corollaire 4.18) qu'on peut estimer l'erreur en norme L^2 entre la solution exacte u et la solution approchée par éléments finis P1; en effet, comme l'erreur d'interpolation est d'ordre h , on déduit une estimation

sur l'erreur de discrétisation, également d'ordre h . En fait, si la solution u de (3.1) est dans H^2 , il se produit un "petit miracle", car on peut montrer grâce à une technique astucieuse, dite "truc d'Aubin-Nitsche", que l'erreur de discrétisation en norme L^2 est en fait d'ordre 2.

Théorème 4.20 (Super convergence des éléments finis P1) Soit Ω un ouvert polygonal convexe de \mathbb{R}^d , $d \geq 1$; soit $f \in L^2(\Omega)$, u solution de (3.5), $u_{\mathcal{T}}$ la solution approchée obtenue par éléments finis P1, sur un maillage éléments finis \mathcal{T} . Soit

$$h_{\mathcal{T}} = \max_{K \in \mathcal{T}} \text{diam} K.$$

Alors il existe $C \in \mathbb{R}$ ne dépendant que de Ω et f tel que :

$$\|u - u_{\mathcal{T}}\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch \text{ et } \|u - u_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2.$$

Démonstration : Par le théorème de régularité 3.9 page 102, il existe $C_1 \in \mathbb{R}_+$ ne dépendant que de Ω tel que

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C_1 \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Grâce à ce résultat, on a obtenu (voir le théorème 4.18) qu'il existe C_2 ne dépendant que de Ω , β et tel que

$$\|u - u_{\mathcal{T}}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2 \|f\|_{L^2} h$$

Soit maintenant $e_{\mathcal{T}} = u - u_{\mathcal{T}}$ et $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi(x) \cdot \nabla \psi(x) dx = \int_{\Omega} e_{\mathcal{T}}(x) \psi(x) dx, \forall \psi \in H_0^1(\Omega). \quad (4.24)$$

On peut aussi dire que φ est la solution faible du problème

$$\begin{cases} -\Delta \varphi = e_{\mathcal{T}} \text{ dans } \Omega \\ \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Comme $e \in L^2(\Omega)$, par le théorème 3.9, il existe $C_3 \in \mathbb{R}_+$ ne dépendant que Ω tel que

$$\|\varphi\|_{H^2(\Omega)} \leq C_3 \|e_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Or $\|e_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} e_{\mathcal{T}}(x) e_{\mathcal{T}}(x) dx = \int_{\Omega} \nabla \varphi(x) \cdot \nabla e(x) dx$, en prenant $\psi = e_{\mathcal{T}}$ dans (4.24).

Soit $\varphi_{\mathcal{T}}$ la solution approchée par éléments finis P1 du problème (4.24), c.à.d solution de :

$$\begin{cases} \varphi_{\mathcal{T}} \in V_{\mathcal{T},0} = \{v \in C(\bar{\Omega}); v|_K \in P_1, \forall K \in \mathcal{T}, v|_{\partial\Omega} = 0\} \\ \int_{\Omega} \nabla \varphi_{\mathcal{T}}(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} e(x) v(x) dx, \forall v \in V_{\mathcal{T},0} \end{cases} \quad (4.25)$$

On sait que $u_{\mathcal{T}}$ vérifie :

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_{\mathcal{T}}(x) \cdot \nabla (u - u_{\mathcal{T}})(x) dx = 0;$$

on peut donc écrire que :

$$\|e_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \nabla (\varphi - \varphi_{\mathcal{T}})(x) \cdot \nabla (u - u_{\mathcal{T}})(x) dx \geq \|\varphi - \varphi_{\mathcal{T}}\|_{H^1(\Omega)} \|u - u_{\mathcal{T}}\|_{H^1(\Omega)}$$

D'après le théorème 4.18, on a :

$$\|\varphi - \varphi_{\mathcal{T}}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2 \|e\|_{L^2(\Omega)} h_{\mathcal{T}} \text{ et } \|u - u_{\mathcal{T}}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2 \|f\|_{L^2(\Omega)} h_{\mathcal{T}}.$$

On en déduit que :

$$\|e_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2^2 \|f\|_{L^2(\Omega)} h_{\mathcal{T}}^2.$$

Ce qui démontre le théorème.

4.5.4 Traitement des singularités

Les estimations d'erreur obtenues au paragraphe précédent reposent sur la régularité H^2 de u . Que se passe-t-il si cette régularité n'est plus vérifiée ? Par exemple, si le domaine Ω possède un coin rentrant, on sait que dans ce cas, la solution u du problème (3.5) n'est plus dans $H^2(\Omega)$, mais dans un espace $H^{1+s}(\Omega)$, où s dépend de l'angle du coin rentrant. Considérons donc pour fixer les idées le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \text{ où } \Omega \text{ est un ouvert} \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ polygônale avec un coin rentrant.} \end{cases}$$

Pour approcher correctement la singularité, on peut raffiner le maillage dans le voisinage du coin. On peut également, lorsque cela est possible, modifier l'espace d'approximation pour tenir compte de la singularité. Dans le cas d'un polygone avec un coin rentrant par exemple, on sait trouver $\psi \in H_0^1(\Omega)$ (et $\psi \notin H^2(\Omega)$) telle que si u est solution de (3.5) avec $f \in L^2(\Omega)$, alors il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u - \alpha\psi \in H^2(\Omega)$.

Examinons le cas d'une approximation par éléments finis de Lagrange. Dans le cas où u est régulière, l'espace d'approximation est

$$V_{\mathcal{T}} = \text{Vect}\{\phi_i, i = 1, N_{\mathcal{T}}\},$$

où $N_{\mathcal{T}}$ est le nombre de noeuds internes du maillage \mathcal{T} de Ω considéré et $(\phi_i)_{i=1, N_{\mathcal{T}}}$ la famille des fonctions de forme associées aux noeuds.

Dans le cas d'une singularité portée par la fonction ψ introduite ci-dessus, on modifie l'espace V et on prend maintenant : $V_{\mathcal{T}} = \text{Vect}\{\phi_i, i = 1, N_{\mathcal{T}}\} \oplus \mathbb{R}\psi$. Notons que $V_{\mathcal{T}} \subset H_0^1(\Omega)$, car $\psi \in H_0^1(\Omega)$. Reprenons maintenant l'estimation d'erreur. Grâce au lemme de Céa, on a toujours

$$\|u - u_{\mathcal{T}}\|_{H^1} \leq \frac{M}{\alpha} \|u - w\|_{H^1(\Omega)}, \forall w \in V_{\mathcal{T}}.$$

On a donc également :

$$\|u - u_{\mathcal{T}}\|_{H^1} \leq \frac{M}{\alpha} \|u - \alpha\psi - w\|_{H^1(\Omega)}, \forall w \in V_{\mathcal{T}}.$$

puisque $\alpha\psi + w \in V_{\mathcal{T}}$. Or, $u - \alpha\psi = \tilde{u} \in H^2(\Omega)$.

Donc $\|u - u_{\mathcal{T}}\|_{H^1} \leq \frac{M}{\alpha} \|\tilde{u} - w\|_{H^1(\Omega)}, \forall w \in V_{\mathcal{T}}$.

Et grâce aux résultats d'interpolation qu'on a admis, si on note \tilde{u}_I l'interpolée de \tilde{u} dans $V_{\mathcal{T}}$, on a :

$$\|u - u_{\mathcal{T}}\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha} \|\tilde{u} - \tilde{u}_I\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha} C_2 \|\tilde{u}\|_{H^2(\Omega)} h.$$

On obtient donc encore une estimation d'erreur en h .

Examinons maintenant le système linéaire obtenu avec cette nouvelle approximation. On effectue un développement de Galerkin sur la base de $V_{\mathcal{T}}$. On pose

$$u_{\mathcal{T}} = \sum_{i=1, N_{\mathcal{T}}} u_i \phi_i + \gamma \psi.$$

Le problème discrétisé revient donc à chercher

$$\begin{cases} (u_s)_{i=1, N_{\mathcal{T}}} \subset \mathbb{R}^{N_{\mathcal{T}}} \text{ et } \gamma \in \mathbb{R} \quad t.q. \\ \sum_{j=1, N_{\mathcal{T}}} u_j \int_{\Omega} \nabla \phi_j(x) \cdot \nabla \phi_i(x) dx + \gamma \int_{\Omega} \nabla \psi(x) \cdot \nabla \phi_i(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \phi_i(x) dx, \forall i = 1, N_{\mathcal{T}} \\ \sum_{j=1, N_{\mathcal{T}}} u_j \int_{\Omega} \nabla \phi_j(x) \cdot \nabla \psi(x) dx + \gamma \int_{\Omega} \nabla \psi(x) \cdot \nabla \psi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \psi(x) dx. \end{cases}$$

On obtient donc un système linéaire de $N_{\mathcal{T}} + 1$ équations à $N_{\mathcal{T}} + 1$ inconnues.

4.6 Exercices

Exercice 48 (Eléments finis P1 pour le problème de Dirichlet) *Corrigé en page 165*

Soit $f \in L^2(]0, 1[)$. On s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), \quad x \in]0, 1[, \\ u(0) &= 0, \quad u(1) = 0. \end{aligned}$$

dont on a étudié une formulation faible à l'exercice 36.

Soient $N \in \mathbb{N}$, $h = 1/(N + 1)$ et $x_i = ih$, pour $i = 0, \dots, N + 1$, et $K_i = [x_i, x_{i+1}]$, pour $i = 0, \dots, N$. Soit $H_N = \{v \in C([0, 1], \mathbb{R}) \text{ t.q. } v|_{K_i} \in P_1, i = 0, \dots, N, \text{ et } v(0) = v(1) = 0\}$, où P_1 désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 1.

1. Montrer que $H_N \subset H_0^1$.
2. Pour $i = 1, \dots, N$, on pose :

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x - x_i|}{h} & \text{si } x \in K_i \cup K_{i-1}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $\phi_i \in H_N$ pour tout $i = 1, \dots, N$ et que H_N est engendré par la famille $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$.

3. Donner le système linéaire obtenu en remplaçant H par H_N dans la formulation faible. Comparer avec le schéma obtenu par différences finies.

Exercice 49 (Conditions aux limites de Fourier et Neumann) *Corrigé en page 167*

Soit $f \in L^2(]0, 1[)$. On s'intéresse au problème :

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), & x \in]0, 1[, \\ u'(0) - u(0) = 0, & u'(1) = -1. \end{cases} \quad (4.26)$$

L'existence et l'unicité d'une solution faible ont été démontrées à l'exercice 49 page 161. On s'intéresse maintenant à la discrétisation de (4.26).

1. Ecrire une discrétisation d par différences finies pour un maillage non uniforme. Ecrire le système linéaire obtenu.
2. Ecrire une discrétisation de (4.26) par volumes finis pour un maillage non uniforme. Ecrire le système linéaire obtenu.
3. Ecrire une discrétisation par éléments finis conformes de type Lagrange P_1 de (4.26) pour un maillage non uniforme. Ecrire le système linéaire obtenu.

Exercice 50 (Conditions aux limites de Fourier et Neumann, bis)

Soit $f \in L^2(]0, 1[)$. On s'intéresse au problème :

$$\begin{cases} -u''(x) - u'(x) + u(x) = f(x), & x \in]0, 1[, \\ u(0) + u'(0) = 0, & u(1) = 1 \end{cases}$$

1. Ecrire une discrétisation par éléments finis conformes de type Lagrange P_1 pour un maillage uniforme. Ecrire le système linéaire obtenu.
2. Ecrire une discrétisation par volumes finis centrés pour un maillage uniforme. Ecrire le système linéaire obtenu.
3. Ecrire une discrétisation par différences finies centrés de pour un maillage uniforme. Ecrire le système linéaire obtenu.
4. Quel est l'ordre de convergence de chacune des méthodes étudiées aux questions précédentes ?

Exercice 51 (Eléments finis pour un problème périodique)

Soit $\Omega =]0, 1[$. On cherche à déterminer $u \in H^2(\Omega)$ tel que

$$-u'' + u = f \text{ p.p. dans } \Omega \quad (4.27a)$$

$$u(1) = u(0) \quad (4.27b)$$

$$u'(1) = u'(0) + p \quad (4.27c)$$

avec $f \in L^2(\Omega)$ et p un réel donné.

1. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $v \in H^1(\Omega)$, $\sup_{x \in [0, 1]} |v(x)| \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}$. [On pourra commencer par montrer que $|v(x)| \leq |v(y)| + \int_0^1 |v'(t)| dt$ et intégrer cette inégalité entre 0 et 1 par rapport à y .]

2. Soit $V = \{v \in H^1(\Omega) : v(0) = v(1)\}$.

(a) Vérifier que V est un sous espace vectoriel $H^1(\Omega)$.

(b) Donner une formulation faible associée au problème aux limites (4.27) de la forme

$$\begin{aligned} u &\in V, \\ a(u, v) &= T(v), \forall v \in V \end{aligned} \quad (4.28)$$

en explicitant la forme bilinéaire a et la forme linéaire T .

(c) Prouver l'existence et l'unicité de la solution de la formulation faible (4.28).

(d) Prouver l'équivalence de la formulation (4.27) avec la formulation faible (4.28), dans le cas d'une solution $u \in H^2(\Omega)$.

3. On cherche à résoudre numériquement ce problème par éléments finis P_1 . On se donne pour cela une discrétisation uniforme de l'intervalle $[0, 1]$, de pas $h = \frac{1}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $i = 0, \dots, n$ on pose $x_i = ih$. Soit $V_h = \{u \in V : u|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_1, i = 0, \dots, n-1\}$, où P_1 désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 1. Soit ϕ la fonction définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par :

$$\phi(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \in [0, 1], \\ 1+x & \text{si } x \in [-1, 0], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit les fonctions $\phi_i, i = 1, \dots, n$, de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , par

$$\begin{cases} \phi_i(x) = \phi\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \text{ pour } i = 1, \dots, n-1, \\ \phi_n(x) = \max\left(\phi\left(\frac{x}{h}\right), \phi\left(\frac{x-1}{h}\right)\right) \end{cases}$$

(a) Représenter graphiquement les fonctions $\phi_i, i = 1, \dots, n$ et montrer que (ϕ_1, \dots, ϕ_n) forme une base de l'espace V_h .

(b) Vérifier que la méthode d'éléments finis ainsi choisie est une méthode conforme..

(c) Montrer que le problème faible approché qui consiste à trouver u_h solution de

$$u_h \in V_h; a(u_h, v_h) = T(v_h) \text{ pour tout } v_h \in V_h \quad (4.29)$$

est équivalent à déterminer $U_h \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$A_h U_h = b_h,$$

où A_h est une matrice $n \times n$ et $b_h \in \mathbb{R}^n$; donner l'expression de b_h et des coefficients de A_h en fonction de f et p .

4. Montrer qu'il existe $C > 0$ indépendant de u et u_h tel que

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}. \quad (4.30)$$

5. On définit l'opérateur d'interpolation $r_h : V \rightarrow V_h$ qui à tout $v \in V$ associe l'élément $r_h(v) \in V_h$ défini par $r_h(v)(x_i) = v(x_i)$ pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

(a) Vérifier que r_h est défini de manière unique, et montrer qu'il existe $\tilde{C} \in \mathbb{R}_+$ ne dépendant ni de v ni de h tel que pour tout $v \in V \cap H^2(\Omega)$,

$$\|v - r_h(v)\|_{H^1(\Omega)} \leq \tilde{C}h \|v\|_{H^2(\Omega)}.$$

(b) En déduire que u_h converge vers u lorsque h tend vers 0.

Exercice 52 (Eléments finis pour un problème avec conditions mixtes)

Soit $f \in L^2(]0, 1[$. On s'intéresse ici au problème

$$\begin{aligned} -u''(x) + u(x) &= f(x), x \in]0, 1[, \\ u(0) &= 0, \\ u'(1) &= 0, \end{aligned} \quad (4.31)$$

Ce problème est un cas particulier du problème (3.43) étudié à l'exercice 42 page 120, en prenant : $\Omega =]0, 1[$, $p \equiv 1$ et $q \equiv 1$, $\Gamma_0 = \{0\}$, $\Gamma_1 = \{1\}$, $g_0 \equiv 0$, $g_1 \equiv 0$ et $\sigma = 0$.

On s'intéresse ici à la discrétisation du problème (4.31). Soient $N \in \mathbb{N}$, $h = 1/(N+1)$ et $x_i = ih$, pour $i = 0, \dots, N+1$, et $K_i = [x_i, x_{i+1}]$, pour $i = 0, \dots, N$. On cherche une solution approchée de (4.31), notée u_h , en utilisant les éléments finis $(K_i, \{x_i, x_{i+1}\}, P_1)_{i=0}^N$.

1. Déterminer l'espace d'approximation V_h . Montrer que les fonctions de base globales sont les fonctions Φ_i de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} définies par $\Phi_i(x) = (1 - \frac{|x-x_i|}{h})^+$, pour $i = 1, \dots, N+1$.

2. Construire le système linéaire à résoudre et comparer avec les systèmes obtenus par différences finies et volumes finis.

3 A-t-on $u'_h(1) = 0$?

Exercice 53 (Eléments finis pour un problème de réaction-diffusion) Corrigé en page 169

Soit α un réel positif ou nul, et f une fonction continue. On considère le problème suivant

$$\begin{aligned} -u''(x) + \alpha u(x) &= f(x), \quad x \in]0, 1[, \\ u'(0) &= u(0), \\ u'(1) &= 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

où u'' désigne la dérivée seconde de u par rapport à x .

Dans toute la suite, on considère une subdivision uniforme de l'intervalle $[0, 1]$: on note $h = 1/N$ où $N \geq 2$ est un entier fixé. On pose $x_i = ih$, pour $i = 0, \dots, N$.

1. Formulation variationnelle

1.1 Ecrire une formulation variationnelle de (4.32).

1.2. On considère le problème

$$u \in H^1(]0, 1[) \quad \int_0^1 u'(x)v'(x) dx + \alpha \int_0^1 u(x)v(x) dx + u(0)v(0) = \int_0^1 f(x)v(x) dx, \quad \forall v \in H^1(]0, 1[). \quad (4.33)$$

1.2.a Déterminer le problème aux limites dont la formulation faible est (4.33).

1.2.b. Montrer que si $\alpha > 0$, (4.33) admet une unique solution.

Démontrer que ceci est encore vrai pour $\alpha = 0$ en appliquant l'inégalité de Poincaré à la fonction $v - v(0)$.

2. Discrétisation par éléments finis.

Soit V_h l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ dont la restriction à chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est affine pour $0 \leq i \leq N-1$.

2.1 Quelle est la dimension de V_h ?

2.2. Donner la discrétisation éléments finis de (4.33).

2.3 Montrer que le problème discret ainsi obtenu admet une solution unique.

2.4 Ecrire le problème discret sous la forme d'un système linéaire $AU = b$ en explicitant les dimensions des vecteurs et matrice et en donnant leur expression.

2.5 Donner une borne supérieure de l'erreur $\|u_h - u\|_{H^1(0,1)}$.

Exercice 54 (Eléments finis Q1) Corrigé en page 171

On considère le rectangle Ω de sommets $(-1, 0)$, $(2, 0)$, $(-1, 1)$, $(2, 1)$. On s'intéresse à la discrétisation par éléments finis de l'espace fonctionnel $H^1(\Omega)$.

I. On choisit de découper Ω en deux éléments e_1 et e_2 définis par les quadrilatères de sommets respectifs $M_1(-1, 1)$, $M_2(0, 1)$, $M_5(1, 0)$, $M_4(-1, 0)$ et $M_2(0, 1)$, $M_3(2, 1)$, $M_6(2, 0)$, $M_5(1, 0)$.

On prend comme noeuds les points M_1, \dots, M_6 et comme espace par élément l'ensemble des polynômes Q_1 . On note $\Sigma_1 = \{M_4, M_5, M_2, M_1\}$ et $\Sigma_2 = \{M_5, M_6, M_3, M_2\}$.

On a donc construit la discrétisation $\{(e_1, \Sigma_1, Q_1), (e_2, \Sigma_2, Q_1)\}$.

I.1 Montrer que les éléments (e_1, Σ_1, Q_1) et (e_2, Σ_2, Q_1) sont des éléments finis de Lagrange.

I.2. Montrer que l'espace de dimension finie correspondant à cette discrétisation n'est pas inclus dans $H^1(\Omega)$ (construire une fonction de cet espace dont la dérivée distribution n'est pas dans L^2). Quelle est dans les hypothèses appelées en cours "cohérence globale" celle qui n'est pas vérifiée ?

II. On fait le même choix des éléments et des noeuds que dans I. On introduit comme élément de référence e le carré de sommets $(\pm 1, \pm 1)$, Σ est l'ensemble des sommets de e et $P = Q_1$.

II.1. Quelles sont les fonctions de base locales de (e, Σ, P) . On note ces fonctions Φ_1, \dots, Φ_4 .

II.2 A partir des fonctions Φ_1, \dots, Φ_4 , construire des bijections F_1 et F_2 de e dans e_1 et e_2 . Les fonctions F_1 et F_2 sont elles affines ?

II.3 On note $P_{e_i} = \{f : e_i \rightarrow \mathbb{R}, f \circ F_i|_e \in Q_1\}$, pour $i = 1, 2$, où les F_i sont définies à la question précédente. Montrer que les éléments (e_1, Σ_1, P_{e_1}) et (e_2, Σ_2, P_{e_2}) sont des éléments finis de Lagrange et que l'espace vectoriel construit avec la discrétisation $\{(e_1, \Sigma_1, P_{e_1}), (e_2, \Sigma_2, P_{e_2})\}$ est inclus dans $H^1(\Omega)$ (i.e. vérifier la "cohérence globale" définie en cours). On pourra pour cela montrer que si $S = e_1 \cap e_2 = \{(x, y); x + y = 1\}$, alors $\{f|_S, f \in P_{e_i}\} = \{f : S \rightarrow \mathbb{R}; f(x, y) = a + by, a, b \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 55 (Eléments affine-équivalents) *Corrigé en page 174*

Soit Ω un ouvert polygonal de \mathbb{R}^2 , et \mathcal{T} un maillage de Ω .

Soient $(\bar{K}, \bar{\Sigma}, \bar{P})$ et (K, Σ, P) deux éléments finis de Lagrange affine - équivalents. On suppose que les fonctions de base locales de \bar{K} sont affines.

Montrer que toute fonction de P est affine.

En déduire que les fonctions de base locales de (K, Σ, P) affines.

Exercice 56 (Eléments finis P_2 en une dimension d'espace)

On veut résoudre numériquement le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = x^2, & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0, \\ u'(1) = 1. \end{cases} \quad (4.34)$$

1. Donner une formulation faible du problème (4.34)

2. Démontrer que le problème (4.34) admet une unique solution.

3. On partage l'intervalle $]0, 1[$ en N intervalles égaux et on approche la solution par une méthode d'éléments finis de degré 2. Ecrire le système qu'il faut résoudre.

Exercice 57 (Eléments finis P_1 sur maillage triangulaire) *Corrigé en page 175*

On veut résoudre numériquement le problème

$$\begin{aligned} -\Delta u(x, y) &= f(x, y), & (x, y) \in D &= (0, a) \times (0, b), \\ u(x, y) &= 0, & (x, y) \in \partial D, \end{aligned}$$

où f est une fonction donnée, appartenant à $L^2(D)$. Soient M, N deux entiers. On définit

$$\Delta x = \frac{a}{M+1}, \Delta y = \frac{b}{N+1}$$

et on pose

$$x_k = k\Delta x, 0 \leq k \leq M+1, y_l = l\Delta y, 0 \leq l \leq N+1$$

On note

$$T_{k+1/2, l+1/2}^0 \text{ le triangle de sommets } (x_k, y_l), (x_{k+1}, y_l), (x_{k+1}, y_{l+1}),$$

$$T_{k+1/2, l+1/2}^1 \text{ le triangle de sommets } (x_k, y_l), (x_k, y_{l+1}), (x_{k+1}, y_{l+1}).$$

Ecrire la matrice obtenue en discrétisant le problème avec les éléments finis triangulaires linéaires (utilisant le maillage précédent).

Exercice 58 (Intégration numérique) *Corrigé en page 177*

1. Vérifier que l'intégration numérique à un point de Gauss, donné par le centre de gravité du triangle, sur l'élément fini P_1 sur triangle, est exacte pour les polynômes d'ordre 1.

2. Vérifier que l'intégration numérique à trois points de Gauss définis sur le triangle de référence par $p_1 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $p_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $p_3 = \left(0, \frac{1}{2}\right)$. avec les poids d'intégration $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \frac{1}{6}$, est exacte pour les polynômes d'ordre 2.

Exercice 59 (Eléments finis Q_2) *Corrigé en page 177*

On note C le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ de sommets

$$a_1 = (0, 0), \quad a_2 = (1, 0), \quad a_3 = (1, 1), \quad a_4 = (0, 1).$$

On note

$$a_5 = (1/2, 0), \quad a_6 = (1, 1/2), \quad a_7 = (1/2, 1), \quad a_8 = (0, 1/2), \quad a_9 = (1/2, 1/2)$$

et

$$\Sigma = \{a_i, 1 \leq i \leq 8\}.$$

1. Montrer que pour tout $p \in P_2$

$$\sum_{i=1}^4 p(a_i) - 2 \sum_{i=5}^8 p(a_i) + 4p(a_9) = 0.$$

2. En déduire une forme linéaire ϕ telle que si $p \in P = \{p \in Q_2, \phi(p) = 0\}$ et $p(a_i) = 0$ pour $i = 1, \dots, 8$, alors $p = 0$. 3. Calculer les fonctions de base de l'élément fini (C, P, Σ) , avec $\Sigma = \{a_1, \dots, a_8\}$.

Exercice 60 (Eléments finis Q_2^*)

Soit $C = [-1, 1] \times [-1, 1]$. On note a_1, \dots, a_8 les noeuds de C , définis par

$$a_1 = (-1, -1), \quad a_2 = (1, -1), \quad a_3 = (1, 1), \quad a_4 = (-1, 1),$$

$$a_5 = (0, -1), \quad a_6 = (1, 0), \quad a_7 = (0, 1), \quad a_8 = (-1, 0).$$

On rappelle que $Q_2 = \text{Vect}\{1, x, y, xy, x^2, y^2, x^2y, xy^2, x^2y^2\}$ et que $\dim Q_2 = 9$. On note Q_2^* l'espace de polynôme engendré par les fonctions $\{1, x, y, xy, x^2, y^2, x^2y, xy^2\}$.

a) Construire $(\varphi_i^*)_{i=1, \dots, 8} \subset Q_2^*$ tel que

$$\varphi_j^*(a_i) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, 8.$$

b) Montrer que Σ est Q_2^* -unisolvant, avec $\Sigma = \{a_1, \dots, a_8\}$.

c) Soit $S = [-1, 1] \times \{1\}$, $\Sigma_S = \Sigma \cap S$, et soit P l'ensemble des restrictions à S des fonctions de Q_2^* , i.e. $P = \{f|_S; f \in Q_2^*\}$. Montrer que Σ_S est P -unisolvant. La propriété est elle vraie pour les autres arêtes de C ?

4.7 Corrigés des exercices

Exercice 48 page 160

1. Soit $v \in H_N$, comme $H_N \subset C([0, 1])$, on a $v \in L^2([0, 1])$. D'autre part, comme $v|_{K_i} \in P_1$, on a $v|_{K_i}(x) = \alpha_i x + \beta_i$, avec $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$. Donc v admet une dérivée faible dans $L^2([0, 1])$, et $Dv|_{K_i} = \alpha_i$ on a donc :

$$\|Dv\|_{L^2} \leq \max_{i=1, \dots, N} |\alpha_i| < +\infty.$$

De plus $v(0) = v(1) = 0$, donc $v \in H_0^1([0, 1])$.

On en déduit que $H_N \subset H_0^1([0, 1])$.

2. On a :

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x - x_i}{h} & \text{si } x \in K_i \\ 1 + \frac{x - x_i}{h} & \text{si } x \in K_{i-1} \\ 0 & \text{si } x \in]0, 1[\setminus (K_i \cup K_{i-1}) \end{cases}$$

On en déduit que $\phi_i|_{K_j} \subset P_1$ pour tout $j = 0, \dots, N$.

De plus, les fonctions ϕ_i sont clairement continues. Pour montrer que $\phi_i \in H_N$, il reste à montrer que $\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0$. Ceci est immédiat pour $i = 2, \dots, N-1$, car dans ce cas $\phi_i|_{K_0} = \phi_i|_{K_{N+1}} = 0$. On vérifie alors facilement que $\phi_1(0) = 1 - \frac{h}{h} = 0$ et $\phi_N(1) = 0$.

Pour montrer que $H_N = \text{Vect}\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$, il suffit de montrer que $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ est une famille libre de H_N .

En effet, si $\sum_{i=1}^N a_i \phi_i = 0$, alors en particulier $\sum_{i=1}^N a_i \phi_i(x_k) = 0$, pour $k = 1, \dots, N$, et donc $a_k = 0$ pour $k = 1, \dots, N$.

3. Soit $u = \sum_{j=1}^N u_j \phi_j$ solution de

$$a(u, \phi_i) = T(\phi_i) \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

La famille $(u_j)_{j=1, \dots, N}$ est donc solution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^N \mathcal{K}_{i,j} u_j = \mathcal{G}_i \quad i = 1, \dots, N$$

où $\mathcal{K}_{i,j} = a(\phi_j, \phi_i)$ et $\mathcal{G}_i = T(\phi_i)$. Calculons $\mathcal{K}_{i,j}$ et \mathcal{G}_i ; on a :

$$\mathcal{K}_{i,j} = \int_0^1 \phi_j'(x) \phi_i'(x) dx; \text{ or } \phi_i'(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{si } x \in]x_{i-1}, x_i[\\ -\frac{1}{h} & \text{si } x \in]x_i, x_{i+1}[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{i,i} &= \int_0^1 (\phi_i'(x))^2 dx = 2h \frac{1}{h^2} = \frac{2}{h} \text{ pour } i = 1, \dots, N, \\ \mathcal{K}_{i,i+1} &= \int_0^1 \phi_i'(x) \phi_{i+1}'(x) dx = -h \times \frac{1}{h^2} = -\frac{1}{h}, \text{ pour } i = 1, \dots, N-1, \\ \mathcal{K}_{i,i-1} &= \int_0^1 \phi_i'(x) \phi_{i-1}'(x) dx = -\frac{1}{h} \text{ pour } i = 2, \dots, N, \\ \mathcal{K}_{i,j} &= 0 \text{ pour } |i-j| > 1. \end{aligned}$$

Calculons maintenant \mathcal{G}_i :

$$\mathcal{G}_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \phi_i(x) dx$$

Si f est constante, on a alors $\mathcal{G}_i = f \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i(x) dx = hf$. Si f n'est pas constante, on procède à une intégration

numérique. On peut, par exemple, utiliser la formule des trapèzes pour le calcul des intégrales $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \phi_i(x) dx$

et $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \phi_i(x) dx$. On obtient alors :

$$\mathcal{G}_i = hf(x_i).$$

Le schéma obtenu est donc :

$$\begin{cases} 2u_i - u_{i-1} - u_{i+1} = h^2 f(x_i) & i = 1, \dots, N \\ u_0 = u_{N+1} = 0 \end{cases}$$

C'est exactement le schéma différences finis avec un pas constant h .

Exercice 49 page 161

1. Soit $(x_i)_{i=1, \dots, N+1}$ une discrétisation de l'intervalle $[0, 1]$, avec $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < x_N < x_{N+1} = 1$. Pour $i = 1, \dots, N$, on pose $h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i$. L'équation (4.26) au point x_i s'écrit :

$$-u''(x_i) + u(x_i) = f(x)$$

On écrit les développements de Taylor de $u(x_{i+1})$ et $u(x_{i-1})$:

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + h_{i+\frac{1}{2}}u'(x_i) + \frac{1}{2}h_{i+\frac{1}{2}}^2u''(x_i) + \frac{1}{6}h_{i+\frac{1}{2}}^3u'''(\zeta_i), \text{ avec } \zeta_i \in [x_i, x_{i+1}],$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - h_{i-\frac{1}{2}}u'(x_i) + \frac{1}{2}h_{i-\frac{1}{2}}^2u''(x_i) - \frac{1}{6}h_{i-\frac{1}{2}}^3u'''(\theta_i), \text{ avec } \theta_i \in [x_{i-1}, x_i],$$

En multipliant la première égalité par $h_{i-\frac{1}{2}}$, la deuxième par $h_{i+\frac{1}{2}}$ et en additionnant :

$$\begin{aligned} u''(x_i) &= \frac{2}{h_{i+\frac{1}{2}}h_{i-\frac{1}{2}}(h_{i+\frac{1}{2}} + h_{i-\frac{1}{2}})} \left[h_{i-\frac{1}{2}}u(x_{i+1}) + h_{i+\frac{1}{2}}u(x_{i-1}) + (h_{i+\frac{1}{2}} + h_{i-\frac{1}{2}})u(x_i) \right] \\ &\quad - \frac{1}{6} \frac{h_{i+\frac{1}{2}}^2}{h_{i+\frac{1}{2}} + h_{i-\frac{1}{2}}} u'''(\zeta_i) + \frac{1}{6} \frac{h_{i-\frac{1}{2}}^2}{h_{i+\frac{1}{2}} + h_{i-\frac{1}{2}}} u'''(\theta_i). \end{aligned}$$

En posant $\gamma_i = \frac{2}{h_{i+\frac{1}{2}}h_{i-\frac{1}{2}}(h_{i+\frac{1}{2}} + h_{i-\frac{1}{2}})}$, on déduit donc l'approximation aux différences finies suivante pour tous les noeuds internes :

$$\gamma_i \left[h_{i-\frac{1}{2}}u_{i+1} + h_{i+\frac{1}{2}}u_{i-1} + (h_{i+\frac{1}{2}} + h_{i-\frac{1}{2}})u_i \right] + u_i = f(x_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

La condition de Fourier en 0 se discrétise par

$$\frac{u_1 - u_0}{h_{\frac{1}{2}}} - u_0 = 0,$$

et la condition de Neumann en 1 par :

$$\frac{u_{N+1} - u_N}{h_{N+\frac{1}{2}}} = -1.$$

On obtient ainsi un système linéaire carré d'ordre $N + 1$.

2. On prend maintenant une discrétisation volumes finis non uniforme ; on se donne $N \in \mathbb{N}^*$ et $h_1, \dots, h_N > 0$ t.q. $\sum_{i=1}^N h_i = 1$. On pose $x_{\frac{1}{2}} = 0, x_{i+\frac{1}{2}} = x_{i-\frac{1}{2}} + h_i$, pour $i = 1, \dots, N$ (de sorte que $x_{N+\frac{1}{2}} = 1$), $h_{i+\frac{1}{2}} = \frac{h_{i+1} + h_i}{2}$, pour $i = 1, \dots, N-1$, et $f_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x) dx$, pour $i = 1, \dots, N$.

En intégrant la première équation de (4.26), et en approchant les flux $u'(x_{i+\frac{1}{2}})$ par le flux numérique $F_{i+\frac{1}{2}}$, on obtient le schéma suivant :

$$F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} + h_i u_i = h_i f_i, \quad i \in \{1, \dots, N\}, \quad (4.35)$$

où $(F_{i+\frac{1}{2}})_{i \in \{0, \dots, N\}}$ donné en fonction des inconnues discrètes (u_1, \dots, u_N) par les expressions suivantes, tenant compte des conditions aux limites :

$$F_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}, \quad i \in \{1, \dots, N-1\}, \quad (4.36)$$

$$F_{\frac{1}{2}} = -\frac{u_1 - u_0}{\frac{x_1}{2}}, \quad (4.37)$$

$$F_{\frac{1}{2}} - u_0 = 0 \quad (4.38)$$

$$F_{N+\frac{1}{2}} = -1. \quad (4.39)$$

Notons que u_0 peut être éliminé des équations (4.37) et (4.38). On obtient ainsi un système linéaire de N équations à N inconnues :

$$-\frac{u_2 - u_1}{h_{\frac{3}{2}}} + \frac{u_1}{1 - \frac{x_1}{2}} + h_1 u_1 = h_1 f_1, \quad (4.40)$$

$$-\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}} + h_i u_i = h_i f_i, \quad i \in \{2, \dots, N-1\}, \quad (4.41)$$

$$-1 + \frac{u_N - u_{N-1}}{h_{N-\frac{1}{2}}} + h_N u_N = h_N f_N, \quad (4.42)$$

3. Comme pour les différences finies, on se donne $(x_i)_{i=1, \dots, N+1}$ une discrétisation de l'intervalle $[0, 1]$, avec $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < x_N < x_{N+1} = 1$. Pour $i = 1, \dots, N$, on pose $h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i$ et $K_{i+\frac{1}{2}} = [x_i, x_{i+1}]$, pour $i = 0, \dots, N$. On définit l'espace d'approximation $H_N = \{v \in C([0, 1], \mathbb{R}) \text{ t.q. } v|_{K_{i+\frac{1}{2}}} \in P_1, i = 0, \dots, N\}$, où P_1 désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 1. Remarquons que l'on a bien $H_N \subset H$.

Pour $i = 1, \dots, N$, on pose :

$$\begin{aligned} \phi_i(x) &= \frac{1}{h_{i-\frac{1}{2}}} (x - x_{i-1}) \text{ si } x \in K_{i-\frac{1}{2}}, \\ \phi_i(x) &= \frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}} (x_{i+1} - x) \text{ si } x \in K_{i+\frac{1}{2}}, \\ \phi_i(x) &= 0 \text{ sinon,} \end{aligned} \quad (4.43)$$

et on pose également

$$\begin{aligned} \phi_{N+1}(x) &= \frac{1}{h_{N+\frac{1}{2}}} (x - x_N) \text{ si } x \in K_{N+\frac{1}{2}}, \\ \phi_{N+1}(x) &= 0 \text{ sinon,} \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= \frac{1}{h_{\frac{1}{2}}} (x_1 - x) \text{ si } x \in K_{\frac{1}{2}}, \\ \phi_0(x) &= 0 \text{ sinon,} \end{aligned} \quad (4.45)$$

On vérifie facilement que $\phi_i \in H_N$ pour tout $0 = 1, \dots, N+1$ et que $H_N = \text{Vect}\{\phi_0, \dots, \phi_{N+1}\}$.

La formulation éléments finis s'écrit alors :

$$\begin{aligned} u^{(N)} &\in H_N, \\ a(u^{(N)}, v) &= T(v), \forall v \in H_N, \end{aligned} \quad (4.46)$$

Pour construire le système linéaire à résoudre, on prend successivement $v = \phi_i, i = 0, \dots, N+1$ dans (4.46).

Soit $u^{(N)} = \sum_{j=0}^{N+1} u_j \phi_j$ solution de

$$a(u^{(N)}, \phi_i) = T(\phi_i) \quad \forall i = 0, \dots, N+1.$$

La famille $(u_j)_{j=0, \dots, N+1}$ est donc solution du système linéaire

$$\sum_{j=0}^N \mathcal{K}_{i,j} u_j = \mathcal{G}_i \quad i = 0, \dots, N+1,$$

où $\mathcal{K}_{i,j} = a(\phi_j, \phi_i)$ et $\mathcal{G}_i = T(\phi_i)$. Calculons $\mathcal{K}_{i,j}$ et \mathcal{G}_i ; on a : $\mathcal{K}_{ij} = \int_0^1 \phi_j'(x) \phi_i'(x) dx + \int_0^1 \phi_j(x) \phi_i(x) dx$.

Or

$$\phi_i'(x) = \begin{cases} \frac{1}{h_{i-\frac{1}{2}}} \text{ si } x \in]x_{i-1}, x_i[\\ -\frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}} \text{ si } x \in]x_i, x_{i+1}[\\ 0 \text{ ailleurs.} \end{cases}$$

Donc si $1 \leq i = j \leq N$, on a

$$\mathcal{K}_{i,i} = \int_0^1 (\phi_i'(x))^2 dx + \int_0^1 (\phi_i(x))^2 dx = \frac{1}{h_{i-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{h_{i-\frac{1}{2}}}{3} + \frac{h_{i+\frac{1}{2}}}{3}.$$

Si $i = j = N + 1$, alors

$$\mathcal{K}_{N+1,N+1} = \int_0^1 (\phi'_{N+1}(x))^2 dx + \int_0^1 (\phi_{N+1}(x))^2 dx = \frac{1}{h_{N+\frac{1}{2}}} + \frac{h_{N+\frac{1}{2}}}{3}.$$

Si $i = j = 0$, alors

$$\mathcal{K}_{0,0} = \int_0^1 (\phi'_0(x))^2 dx + \int_0^1 (\phi_0(x))^2 dx + \phi_0^2 = \frac{1}{h_{\frac{1}{2}}} + \frac{h_{\frac{1}{2}}}{3} + 1.$$

Si $0 \leq i \leq N$ et $j = i + 1$, on a :

$$\mathcal{K}_{i,i+1} = \int_0^1 \phi'_i(x)\phi'_{i+1}(x)dx + \int_0^1 \phi_i(x)\phi_{i+1}(x)dx = -h_{i+\frac{1}{2}} \times \frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}^2} + \frac{h_{i+\frac{1}{2}}}{2} - \frac{h_{i+\frac{1}{2}}}{3} = -\frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{h_{i+\frac{1}{2}}}{6}.$$

La matrice étant symétrique, si $2 \leq i \leq N + 1$ et $j = i - 1$, on a :

$$\mathcal{K}_{i,i-1} = \mathcal{K}_{i-1,i} = -\frac{1}{h_{i-\frac{1}{2}}} + \frac{h_{i-\frac{1}{2}}}{6}.$$

Calculons maintenant \mathcal{G}_i .

$$\mathcal{G}_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\phi_i(x)dx + \phi_i(1).$$

Si f est constante, on a alors $\mathcal{G}_i = f \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i(x)dx + \phi_i(1) = \frac{1}{2}(h_{i-\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2}})f + \phi_i(1)$.

Si f n'est pas constante, on procède à une intégration numérique. On peut, par exemple, utiliser la formule des trapèzes pour le calcul des intégrales $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\phi_i(x)dx$ et $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\phi_i(x)dx$. On obtient alors :

$$\mathcal{G}_i = \frac{1}{2}(h_{i-\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2}})f(x_i) + \phi_i(1).$$

Le schéma obtenu est donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{h_{i-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{h_{i-\frac{1}{2}}}{3} + \frac{h_{i+\frac{1}{2}}}{3} \right) u_i + \left(\frac{h_{i-\frac{1}{2}}}{6} - \frac{1}{h_{i-\frac{1}{2}}} \right) u_{i-1} + \left(\frac{h_{i+\frac{1}{2}}}{6} - \frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}} \right) u_{i+1} \\ \quad = \frac{1}{2}(h_{i-\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2}})f(x_i) \quad i = 1, \dots, N \\ \left(\frac{1}{h_{\frac{1}{2}}} + \frac{h_{\frac{1}{2}}}{3} + 1 \right) u_0 + \left(\frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{h_{i+\frac{1}{2}}}{6} \right) u_1 = \frac{1}{2}h_{\frac{1}{2}}f(x_0) \\ \left(\frac{1}{h_{N+\frac{1}{2}}} + \frac{h_{N+\frac{1}{2}}}{3} \right) u_{N+1} + \left(\frac{h_{N+\frac{1}{2}}}{6} - \frac{1}{h_{N+\frac{1}{2}}} \right) u_N = \frac{1}{2}h_{N+\frac{1}{2}}f(x_{N+1}) + 1. \end{array} \right.$$

Exercice 53 page 163 : Eléments finis pour un problème de réaction-diffusion

1.1 Soit v une fonction suffisamment régulière, on multiplie la première équation de (4.32) par v et on intègre sur $]0, 1[$. En effectuant des intégrations par parties et en tenant compte des conditions aux limites, on obtient :

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) dx + \alpha \int_0^1 u(x)v(x) dx + u(0)v(0) = \int_0^1 f(x)v(x) dx.$$

Pour que les intégrales aient un sens, il suffit de prendre $u, v \in H^1(]0, 1[)$, auquel cas les fonctions sont continues et donc les valeurs $u(0)$ et $v(0)$ ont aussi un sens. On en déduit qu'une formulation faible est

$$u \in H^1(]0, 1[) \\ \int_0^1 u'(x)v'(x) dx + \alpha \int_0^1 u(x)v(x) dx + u(0)v(0) = \int_0^1 f(x)v(x) dx, \quad \forall v \in H^1(]0, 1[).$$

On en déduit que la formulation variationnelle est

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u \in H^1(]0, 1[); \\ &J(u) = \min_{v \in H} J(v), \end{aligned}$$

avec $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - T(v)$, où a est la forme bilinéaire définie par $a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x) dx + \alpha \int_0^1 u(x)v(x) dx + u(0)v(0)$ et T la forme linéaire continue définie par $T(v) = \int_0^1 f(x)v(x) dx$.

1.2.a Supposons u régulière, et prenons d'abord $v \in C_c^1(]0, 1[)$. On a alors

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) dx + \alpha \int_0^1 u(x)v(x) dx + u(0)v(0) = \int_0^1 f(x)v(x) dx$$

et donc en intégrant par parties :

$$\int_0^1 (-u''(x) + \alpha u(x) - f(x))v(x) dx = 0.$$

Comme ceci est vrai pour toute fonction $v \in C_c(]0, 1[)$, on en déduit que $-u''(x) + \alpha u(x) = f(x)$, $x \in]0, 1[$.

Prenons maintenant $v \in H^1(]0, 1[)$, en intégrant par parties et tenant compte de ce qui précède, on obtient

$$(-u'(0) + u(0))v(0) + u'(1)v(1) = 0.$$

Comme ceci est vrai pour toute fonction $v \in H^1(]0, 1[)$, on en déduit que u vérifie (4.32).

1.2.b. On peut appliquer le lemme de Lax Milgram ; en effet,

- la forme linéaire T est continue car $|T(v)| = |\int_0^1 f(x)v(x) dx| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2}$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et donc $|T(v)| \leq C\|v\|_{L^2}$ avec $C = \|f\|_{L^2}$.
- la forme bilinéaire a (qui est évidemment symétrique, ce qui n'est d'ailleurs pas nécessaire pour appliquer Lax-Milgram) est continue ; en effet :

$$|a(u, v)| \leq \|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} + \alpha\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + |u(0)|v(0);$$

or pour tout $x \in]0, 1[$ $v(0) = v(x) + \int_0^x v'(t)dt$ et donc par inégalité triangulaire et par Cauchy-Schwarz, on obtient que $|v(0)| \leq |v(x)| + \|v'\|_{L^2}$. En intégrant cette inégalité entre 0 et 1, on obtient

$$|v(0)| \leq \|v\|_{L^1} + \|v'\|_{L^2} \leq \|v\|_{L^2} + \|v'\|_{L^2} \leq 2\|v\|_{H^1}.$$

La même inégalité est évidemment vraie pour $u(0)$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} a(u, v) &\leq \|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} + \alpha\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + 4\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} \\ &\leq \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} + \alpha\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} + 4\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} \\ &\leq (5 + \alpha)\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}, \end{aligned}$$

ce qui prouve que a est continue.

Montrons maintenant que a est coercive. Dans le cas où $\alpha > 0$, ceci est facile à vérifier, car on a

$$a(u, u) = \int_0^1 u'(x)^2 dx + \alpha \int_0^1 u(x)^2 dx + u(0)^2 \geq \min(\alpha, 1)\|u\|_{H^1}^2.$$

Par le lemme de Lax-Milgram, on peut donc conclure à l'existence et l'unicité de la solution de (4.33).

Dans le cas où $\alpha = 0$, on applique l'inégalité de Poincaré à la fonction $w = u - u(0)$, ce qui est licite car $w(0) = 0$; on a donc : $\|w\|_{L^2} \leq \|w'\|_{L^2}$, et donc $\|u'\|_{L^2} \geq \|u - u(0)\|_{L^2}$. On en déduit que $a(u, u) \geq \|u - u(0)\|_{L^2}^2 + u(0)^2 \geq \frac{1}{2}\|u\|_{L^2}^2$.

On écrit alors que

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \frac{1}{2}a(u, u) + \frac{1}{2}a(u, u) \\ &\geq \frac{1}{2}\|u'\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\|u\|_{L^2}^2 \\ &\geq \frac{1}{4}\|u\|_{H^1}^2, \end{aligned}$$

ce qui montre que la forme bilinéaire a est encore coercive.

2.1 Une base de l'espace V_h est la famille des fonctions dites "chapeau", définies par

$$\begin{aligned}\varphi_i(x) &= \min\left(\frac{1}{h}(x - x_{i-1})^+, \frac{1}{h}(x_{i+1} - x)^+\right) \text{ pour } i = 1, \dots, N-1, \\ \varphi_1(x) &= \frac{1}{h}(x_1 - x)^+, \\ \varphi_N(x) &= \frac{1}{h}(x - x_{N+1})^+.\end{aligned}$$

On en déduit que l'espace V_h est de dimension $N+1$.

2.2. Le problème discrétisé par éléments finis s'écrit :

$$\int_0^1 u_h'(x)v_h'(x) dx + \alpha \int_0^1 u_h(x)v_h(x) dx + u_h(0)v_h(0) = \int_0^1 f(x)v_h(x) dx, \forall v_h \in V_h. \quad (4.47)$$

2.3 Comme on a effectué une discrétisation par éléments finis conformes, le lemme de Lax Milgram s'applique à nouveau.

2.4 Commençons par le second membre : $B = (b_i)_{0 \leq i \leq N}$, avec $b_i = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx$.

Calculons $A_{i,j} = A_{j,i} = a(\phi_i, \phi_j) = \int_0^1 \phi_i'(x)\phi_j'(x) dx + \alpha \int_0^1 \phi_i(x)\phi_j(x) dx + \phi_i(0)\phi_j(0)$, pour $i = 1, \dots, N$. En raison de la forme des fonctions de base $(\phi_i)_{i=0,N}$ les seuls termes non nuls sont les termes $A_{i-1,i}$, $A_{i,i}$ et $A_{i,i+1}$. Après calculs, on obtient :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} + \frac{\alpha h}{3} + 1 & -\frac{1}{h} + \frac{\alpha h}{6} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h} + \frac{\alpha h}{6} & \frac{2}{h} + \frac{2\alpha h}{3} & -\frac{1}{h} + \frac{\alpha h}{6} & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{h} + \frac{\alpha h}{6} & \frac{2}{h} + \frac{2\alpha h}{3} & -\frac{1}{h} + \frac{\alpha h}{6} \\ 0 & \dots & & 0 & -\frac{1}{h} + \frac{\alpha h}{6} & \frac{1}{h} + \frac{\alpha h}{3} \end{bmatrix}$$

2.5 Soit $u \in H^1(]0, 1[)$ une solution de (4.33). Alors $-u'' = f - \alpha u$ au sens des distributions, mais comme $f \in L^2(]0, 1[)$ et $u \in L^2(]0, 1[)$, on en déduit que $u \in H^2(]0, 1[)$. On peut donc appliquer les résultats du cours. On a vu en cours que si u_I l'interpolée de u dans V_h , On a $\|u - u_h\|_{L^2(0,1)} \leq C\|u - u_I\|_{L^2(0,1)}$ où C est la racine carrée du rapport de la constante de continuité sur la constante de coercivité, c.à.d. $C = \sqrt{\frac{5+\alpha}{\min(\alpha, 1)}}$. De plus, on a aussi vu que si $u \in H^2(]0, 1[)$, l'erreur d'interpolation est d'ordre h ; plus précisément, on a :

$$\|u - u_I\|_{L^2(0,1)}^2 \leq (1 + h^2)h^2 \|u''\|_{L^2(0,1)}^2$$

On en déduit que

$$\|u_h - u\|_{H^1(0,1)} \leq \sqrt{\frac{5+\alpha}{\min(\alpha, 1)}} \sqrt{1+h^2} \|u''\|_{L^2(0,1)} h.$$

Correction de l'exercice 54 page 163

I.1. On note x, y les deux variables de \mathbb{R}^2 . L'espace Q_1 est l'ensemble des polynômes de la forme $a+bx+cy+dxy$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On a donc $\dim Q_1 = 4 = \text{Card } \Sigma_1 = \text{Card } \Sigma_2$ pour montrer que (e_1, Σ_1, Q_1) est un élément fini de Lagrange, il suffit de montrer que $f \in Q_1$ et $f|_{\Sigma_1} = 0$ implique $f = 0$. Soient donc $a, b, c, d, \in \mathbb{R}$. On pose $f(x, y) = a + bx + cy + dxy$ pour $(x, y) \in e_1$ et on suppose que $f|_{\Sigma_1} = 0$, c'est à dire : $f(-1, 1) = 0, f(0, 1) = 0, f(1, 0) = 0$ et $f(-1, 0) = 0$. On a donc :

$$\begin{cases} a - b + c - d = 0 \\ a + c = 0 \\ a + b = 0 \\ a - b = 0 \end{cases}$$

Les deux dernières équations donnent que $a = b = 0$, la troisième donne alors que $c = 0$, et la première donne enfin que $d = 0$. On a donc montré que $f = 0$. On en déduit que (e_1, Σ_1, Q_1) est un élément fini de Lagrange. Pour montrer que (e_2, Σ_2, Q_1) est un élément fini de Lagrange, on procède de la même façon : soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $f(x, y) = a + bx + cy + dxy$ pour $(x, y) \in e_2$. On suppose que $f|_{\Sigma_2} = 0$, c'est à dire : $f(0, 1) = 0, f(2, 1) = 0, f(2, 0) = 0$ et $f(1, 0) = 0$. On a donc :

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a + 2b + c + 2d = 0 \\ a + 2b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

Les deux dernières équations donnent $a = b = 0$, la première donne alors $c = 0$ et, finalement, la quatrième donne $d = 0$. On a donc montré que $f = 0$. On en déduit que (e_2, Σ_2, Q_1) est un élément fini de Lagrange.

I.2. L'espace (de dimension finie) associé à cette discrétisation est engendré par les six fonctions de base globales. On va montrer que la fonction de base associée à M_1 (par exemple) n'est pas dans $H^1(\Omega)$. On note ϕ_1 cette fonction de base. On doit avoir $\phi_1|_{e_1} \in Q_1, \phi_1|_{e_2} \in Q_1$ et $\phi_1(M_1) = 1, \phi_1(M_i) = 0$ si $i \neq 1$. On en déduit que $\phi_1 = 0$ sur e_2 et $\phi_1(x, y) = -xy$ si $(x, y) \in e_1$. On a bien $\phi_1 \in L^2(\Omega)$ mais on va montrer maintenant que ϕ_1 n'a pas de dérivée faible dans $L^2(\Omega)$ (et donc que $\phi_1 \notin H^1(\Omega)$). On va s'intéresser à la dérivée faible par rapport à x (mais on pourrait faire un raisonnement similaire pour la dérivée faible par rapport à y). On suppose que ϕ_1 a une dérivée faible par rapport à x dans $L^2(\Omega)$ (et on va montrer que ceci mène à une contradiction). Supposons donc qu'il existe une fonction $\psi \in L^2(\Omega)$ telle que

$$I = \int_{-1}^2 \int_0^1 \phi_1(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) dx dy = \int_{-1}^2 \int_0^1 \psi(x, y) \varphi(x, y) dx dy, \text{ pour tout } \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (4.48)$$

Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, comme ϕ_1 est nulle sur e_2 , on a $I = \int \int_{e_1} \phi_1(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) dx dy$ et donc :

$$I = \int_0^1 \left(\int_{-1}^{1-y} (-xy) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) dx \right) dy.$$

Par intégration par parties, en tenant compte du fait que φ est à support compact sur Ω , on obtient :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left[\int_{-1}^{1-y} y \varphi(x, y) dx - (1-y)y\varphi(1-y, y) \right] dy \\ &= \int_0^1 \int_{-1}^2 y 1_{e_1}(x, y) \varphi(x, y) dx - \int_0^1 (1-y)y\varphi(1-y, y) dy. \end{aligned}$$

En posant $\tilde{\psi}(x, y) = -\psi(x, y) + y 1_{e_1}(x, y)$, on a $\tilde{\psi} \in L^2(\Omega)$ et :

$$\int_0^1 (1-y)y\varphi(1-y, y) dy = \int_{-1}^2 \int_0^1 \tilde{\psi}(x, y) \varphi(x, y) dx dy. \quad (4.49)$$

Pour aboutir à une contradiction, on va montrer que (4.49) est fautive pour certains $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. On remarque tout d'abord qu'il existe $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ t.q.

$$\int_0^1 (1-y)(y)\varphi(1-y, y) dy > 0.$$

(Il suffit de choisir $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ t.q. $\varphi \leq 0$ et $\varphi(1-y, y) > 0$ pour $y = \frac{1}{2}$, par exemple.) On se donne maintenant une fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ t.q. $\varphi(0) = 1$ et $\rho = 0$ sur $[-1, 1]^c$ et on écrit (4.49) avec φ_n au lieu de φ , où φ_n est définie par :

$$\varphi_n(x, y) = \varphi(x, y)\rho(n(x+y-1))$$

(noter que l'on a bien $\varphi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ car $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$) On a donc

$$\int_0^1 (1-y)y\varphi_n(1-y, y) dy = \int_{-1}^2 \int_0^1 \tilde{\psi}(x, y) \varphi_n(x, y) dx dy.$$

Le terme de gauche de cette égalité est indépendant de n et non nul car $\varphi_n(1-y, y) = \varphi(1-y, y)$ pour tout n et tout $y \in [0, 1]$. Le terme de droite tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$ par convergence dominée car

$$\tilde{\psi}\varphi_n \rightarrow 0 \text{ p.p., et } |\tilde{\psi}\varphi_n| \leq \|\rho\|_\infty |\tilde{\psi}| |\varphi| \in L^1(\Omega).$$

Ceci donne la contradiction désirée et donc que $\phi_1 \notin H^1(\Omega)$. L'hypothèse non vérifiée (pour avoir la cohérence globale) est l'hypothèse (4.7). En posant $S = \bar{e}_1 \cap \bar{e}_2$, on a

$$\Sigma_1 \cap S = \Sigma_2 \cap S = \{M_2, M_5\},$$

et on a, bien sûr, $\varphi_1|_S = \varphi_1|_S$ mais on remarque que $(\{M_2, M_5\}, Q_1|_S)$ n'est pas unisolvant car $\text{Card}(\{M_2, M_5\}) = 2$ et $\dim(Q_1|_S) = 3$.

II.1. Les quatre fonctions de base de (e, Σ, P) sont :

$$\phi_1(x, y) = \frac{1}{4}(x+1)(y+1)$$

$$\phi_2(x, y) = -\frac{1}{4}(x+1)(y-1)$$

$$\phi_3(x, y) = -\frac{1}{4}(x-1)(y+1)$$

$$\phi_4(x, y) = \frac{1}{4}(x-1)(y-1).$$

II.2.

Construction de F_1 Pour $(x, y) \in e$, on pose

$$F_1(x, y) = M_1\phi_3(x, y) + M_2\phi_1(x, y) + M_5\phi_2(x, y) + M_4\phi_4(x, y),$$

ce qui donne

$$4F_1(x, y) = \binom{-1}{1} (1-x)(1+y) + \binom{0}{1} (1+x)(1+y) + \binom{1}{0} (1+x)(1-y) + \binom{-1}{0} (1-x)(1-y)$$

et donc

$$4F_1(x, y) = \begin{pmatrix} -1 + 3x - y - xy \\ 2(1+y) \end{pmatrix}.$$

Pour $y \in [-1, 1]$ fixé, la première composante de $F_1(x, y)$ est linéaire par rapport à x et $F_1(\cdot, y)$ est une bijection de $[-1, 1] \times \{y\}$ dans $[-1, \frac{1-y}{2}] \times \{\frac{1+y}{2}\}$. On en déduit que F_1 est une bijection de e dans e_1 .

Construction de F_2 Pour $(x, y) \in e$, on pose

$$F_2(x, y) = M_2\phi_3(x, y) + M_3\phi_1(x, y) + M_6\phi_2(x, y) + M_5\phi_4(x, y),$$

ce qui donne

$$4F_2(x, y) = \binom{0}{1} (1-x)(1+y) + \binom{2}{1} (1+x)(1+y) + \binom{2}{0} (1+x)(1-y) + \binom{1}{0} (1-x)(1-y)$$

et donc $4F_2(x, y) = \begin{pmatrix} 5 + 3x - y + xy \\ 2 + 2y \end{pmatrix}$ Pour $y \in [-1, 1]$ fixé, la première composante de $F_2(x, y)$ est linéaire par rapport à x et $F_2(\cdot, y)$ est une bijection de $[-1, 1] \times \{y\}$ dans $[\frac{1-y}{2}, 2] \times \{\frac{1+y}{2}\}$ On en déduit que F_2 est une bijection de e dans e_2 . Les fonctions F_1 et F_2 ne sont pas affines.

II.3. Les éléments (e_1, Σ_1, P_{e_1}) et (e_2, Σ_2, P_{e_2}) sont les éléments finis de Lagrange construits à partir de l'élément fini de Lagrange (e, Σ, P) et des bijections F_1 et F_2 (de e dans e_1 et de e dans e_2), voir la proposition 4.10 page 140. Pour montrer que l'espace vectoriel construit avec (e_1, Σ_1, P_{e_1}) et (e_2, Σ_2, P_{e_2}) est inclus dans $H^1(\Omega)$, il suffit de vérifier la propriété de "cohérence globale" donnée dans la proposition 4.11 page 141. On pose

$$\begin{aligned} S = \bar{e}_1 \cap \bar{e}_2 &= \{(x, y) \in \bar{\Omega}, x + y = 1\} \\ &= \{(1-y, y), y \in [0, 1]\} \end{aligned}$$

On remarque tout d'abord que $\Sigma_1 \cap S = \Sigma_2 \cap S = \{M_2, M_5\}$. On détermine maintenant $P_{e_1|_S}$ et $P_{e_2|_S}$. Soit $f \in P_{e_1}$. Soit $(x, y) \in S$ (c'est à dire $y \in [0, 1]$ et $x + y = 1$) on a $f(x, y) = f \circ F_1(1, 2y - 1)$. (On a utilisé ici le fait que $F_1(\{1\} \times [-1, 1]) = 5$). Donc $P_{e_1|_S}$ est l'ensemble des fonctions de S dans \mathbb{R} de la forme : $(x, y) \mapsto g(1, 2y - 1)$, où $g \in Q_1$, c'est à dire l'ensemble des fonctions de S dans \mathbb{R} de la forme :

$$(x, y) \mapsto \alpha + \beta + \gamma(2y - 1) + \delta(2y - 1),$$

avec α, β, γ , et $\delta \in \mathbb{R}$. On en déduit que $P_{e_1|_S}$ est l'ensemble des fonctions de S dans \mathbb{R} de la forme $(x, y) \mapsto a + by$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On a donc $P_{e_1|_S} = P_{e_2|_S}$. Ceci donne la condition (4.6) page 141. Enfin, la condition (4.7) est bien vérifiée, c'est à dire $(\Sigma_1, P_{e_1|_S})$ est unisolvant, car un élément de $P_{e_1|_S}$ est bien déterminé de manière unique par ses valeurs en $(0, 1)$ et $(1, 0)$.

Correction de l'exercice 55 page 164(Eléments affine-équivalents)

Si les fonctions de base de $(\bar{K}, \bar{\Sigma}, \bar{P})$ sont affines, alors l'espace \bar{P} est constitué des fonctions affines, on peut donc écrire.

$$\bar{P} = \{\bar{f} : \bar{K} \rightarrow \mathbb{R}, \bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \mapsto f(\bar{x}) = a_1\bar{x}_1 + a_2\bar{x}_2 + b\}.$$

Comme $(\bar{K}, \bar{\Sigma}, \bar{P})$ et $((K, \Sigma, P))$ sont affines équivalents, on a par définition :

$$P = \{f : K \rightarrow \mathbb{R}; f = \bar{f} \circ F^{-1}, \bar{f} \in \bar{P}\},$$

où F est une fonction affine de \bar{K} dans K la fonction F^{-1} est donc aussi affine et s'écrit donc sous la forme :

$$F^{-1}(x) = F^{-1}((x_1, x_2)) = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \gamma, \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \delta)$$

Donc si $f = \bar{f} \circ F^{-1} \in P$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \bar{f} \circ F^{-1}((x_1, x_2)) \\ &= \bar{f}[(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \gamma, \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \delta)] \\ &= A_1 x_1 + A_2 x_2 + B \end{aligned}$$

où A_1, A_2 et $B \in \mathbb{R}^2$. On en déduit que f est bien affine. L'espace P est donc constitué de fonctions affines. Pour montrer que les fonctions de base locales sont affines, il suffit de montrer que l'espace P est constitué de toutes les fonctions affines. En effet, si f est affine, i.e. $f(x_1, x_2) = A_1 x_1 + A_2 x_2 + B$, avec $A_1, A_2, B \in \mathbb{R}^2$, on montre facilement que $\bar{f} : f \circ F \in \bar{P}$, ce qui montre que $f \in P$.

Exercice 57 page 164

La formulation faible du problème s'écrit :

$$\begin{cases} \int_D \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \int_D f(x) v(x) dx, \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

On note $I = \{(k, \ell), 1 \leq k \leq M, 1 \leq \ell \leq N\}$ noter que $\text{Card } I = MN$. L'espace vectoriel de dimension finie dans lequel on cherche la solution approchée (en utilisant les éléments finis suggérés par l'énoncé) est donc $H = \text{Vect} \{\phi_i, i \in I\}$, où ϕ_i est la fonction de base globale associée au noeud i . Cette solution approchée s'écrit $u = \sum_{j \in I} u_j \phi_j$ où la famille $\{u_j, j \in I\}$ est solution du système linéaire :

$$\sum_{j \in I} a_{ij} u_j = b_i, \forall i \in I \quad (4.50)$$

avec $b_i = \int_D f(x, y) \phi_i(x, y) dx dy$, pour tout $i \in I$ et $a_{ij} = \int_D \nabla \phi_i(x, y) \nabla \phi_j(x, y) dx dy$, pour tout $i, j \in I$.

La matrice de ce système linéaire est donc donnée par le calcul de a_{ij} pour $i, j \in I$ et un ordre de numérotation des inconnues, plus précisément, soit $\varphi : I \rightarrow \{1, \dots, MN\}$ bijective. On note ψ la fonction réciproque de φ . Le système (4.50) peut alors s'écrire :

$$\sum_{n=1}^{MN} a_{i, \psi(n)} u_{\psi(n)} = b_i, \forall i \in I$$

ou encore :

$$\sum_{n=1}^{MN} a_{\psi(m), \psi(n)} u_{\psi(n)} = b_{\psi(m)}, \forall m \in \{1, \dots, MN\},$$

$\{u_j, j \in I\}$ est donc solution de (4.50) si et seulement si $u_{\psi(n)} = \lambda_n$ pour tout $n \in \{1, \dots, MN\}$ où $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{MN}) \in \mathbb{R}^{MN}$ est solution du système linéaire :

$$A\lambda = C$$

avec $C = (C_1, \dots, C_{MN})$, $C_m = b_{\psi(m)}$ pour tout $m \in \{1, \dots, MN\}$ et $A = (A_{m,n})_{m,n=1}^{MN} \in \mathbb{R}^{MN}$ avec $A_{m,n} = a_{\psi(m), \psi(n)}$ pour tout $m, n \in \{1, \dots, MN\}$. Il reste donc à calculer a_{ij} pour $i, j \in I$. Un examen de support des fonctions ϕ_i et ϕ_j et le fait que le maillage soit à pas constant nous montrent que seuls 4 nombres différents peuvent apparaître dans la matrice :

1. $i = j$. On pose alors $a_{ii} = \alpha$.
2. $i = (k, \ell), j = (k \pm 1, \ell)$. On pose alors $a_{ij} = \beta$.
3. $i = (k, \ell), j = (k, \ell \pm 1)$. On pose alors $a_{ij} = \gamma$.
4. $i = (k, \ell), j = (k + 1, \ell + 1)$ ou $(k - 1, \ell - 1)$. On pose alors $a_{ij} = \delta$.

En dehors des quatre cas décrits ci-dessus, on a nécessairement $a_{ij} = 0$ (car les supports de ϕ_i et ϕ_j sont disjoints). Calculons maintenant α, β, γ et δ .

Calcul de β On prend ici $i = (k, \ell)$ et $j = (k + 1, \ell)$ On calcule tout d'abord $\int_{T^0} \nabla \phi_i - \nabla \phi_j dx$ avec $T^0 = T_{k+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^0$. Un argument d'invariance par translation permet de supposer que $x_k = y_\ell = 0$. On a alors

$$\phi_i(x, y) = \frac{\Delta x - x}{\Delta x} \text{ et } \phi_j(x, y) = \frac{x \Delta y - y \Delta x}{\Delta x \Delta y},$$

de sorte que

$$\nabla \phi_i(x, y) - \nabla \phi_j(x, y) = - \left(\frac{1}{\Delta x} \right)^2.$$

On a donc

$$\int_{T^0} \nabla \phi_i - \nabla \phi_j dx = - \left(\frac{1}{\Delta x} \right)^2 \frac{\Delta x \Delta y}{2} = - \frac{\Delta y}{2 \Delta x}$$

Un calcul similaire donne l'intégrale de $\nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j$ sur le deuxième triangle commun aux supports de ϕ_i et ϕ_j . Sur ce deuxième triangle, formé par les points $(k, \ell), k+1, \ell)$ et $(k, \ell-1)$, noté T^2 , on a

$$\phi_i(x, y) = 1 - \frac{x \Delta y - y \Delta x}{\Delta x \Delta y} \text{ et } \phi_j(x, y) = \frac{x}{\Delta x},$$

de sorte que

$$\nabla\phi_i(x, y) \cdot \nabla\phi_j(x, y) = -\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 \text{ et } \int_{T^2} \nabla\phi_i(x, y) \cdot \nabla\phi_j(x, y) dx dy = -\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 \frac{\Delta x \Delta y}{2} = -\frac{\Delta y}{2\Delta x}.$$

On a donc, finalement,

$$\beta = \int_D \nabla\phi_i(x, y) \cdot \nabla\phi_j(x, y) dx dy = -\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Calcul de γ Le calcul de γ est le même que celui de β en changeant les rôles de Δx et Δy , on obtient donc

$$\gamma = -\frac{\Delta x}{\Delta y}$$

Calcul de δ On prend ici $i = (k, \ell)$ et $j = (k+1, \ell+1)$. On a donc, en notant $T^0 = T_{k+\frac{1}{2}, \ell+\frac{1}{2}}^0$ et $T^1 = T_{k+\frac{1}{2}, \ell+\frac{1}{2}}^1$,

$$\delta = \int_{T^0} \nabla\phi_i(x, y) \cdot \nabla\phi_j(x, y) dx dy + \int_{T^1} \nabla\phi_i(x, y) \cdot \nabla\phi_j(x, y) dx dy.$$

On peut supposer (par translation) que $x_k = 0 = y_\ell$. Sur T_1 , on a alors $\phi_i(x, y) = \frac{\Delta y - y}{\Delta y}$ et $\phi_j(x, y) = \frac{x}{\Delta x}$ de sorte que $\int_{T^1} \nabla\phi_i(x, y) \cdot \nabla\phi_j(x, y) dx dy = 0$ (car $\nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j = 0$). En changeant les rôles de x et y , on a aussi $\int_{T^0} \nabla\phi_i(x, y) \cdot \nabla\phi_j(x, y) dx dy = 0$. On a donc $\delta = 0$.

Calcul de α On prend ici $i = j = (k, \ell)$. On peut toujours supposer que $x_k = y_\ell = 0$. En reprenant les notations précédentes, on a, par raison de symétrie :

$$\alpha = \int_D \nabla\phi_i - \nabla\phi_i dx = 2 \int_{T^0} |\nabla\phi_i|^2(x, y) dx dy + 2 \int_{T^1} |\nabla\phi_i|^2(x, y) dx dy + 2 \int_{T^2} |\nabla\phi_i|^2(x, y) dx dy.$$

Sur T^0 , on a $\phi_i(x, y) = \frac{\Delta x - x}{\Delta x}$ et donc

$$\int_{T^0} |\nabla\phi_i|^2(x, y) dx dy = \left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 \frac{\Delta x \Delta y}{2} = \frac{1}{2} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Sur T_1 , on a $\phi_1(x, y) = \frac{\Delta y - y}{\Delta y}$ et donc

$$\int_{T^2} |\nabla\phi_i|^2(x, y) dx dy = \left[\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta y}\right)^2 \right] \frac{\Delta x \Delta y}{2} = \frac{1}{2} \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

On en déduit

$$\alpha = 2 \frac{\Delta x}{\Delta y} + 2 \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Exercice 58 page 165

1. Soit K le triangle de référence, de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$. On veut montrer que si p est un polynôme de degré 1, alors

$$\int \int_K p(x, y) \, dx dy = \int \int_K dx dy p(x_G, y_G) \quad (4.51)$$

où (x_G, y_G) est le centre de gravité de K . Comme K est le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$, on a $x_G = y_G = \frac{1}{3}$. Pour montrer (4.51), on va le montrer pour $p \equiv 1$, pour $p(x, y) = x$ et pour $p(x, y) = y$. On a

$$\int \int_K dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} dy dx = \frac{1}{2}.$$

On a donc bien (4.51) si $p \equiv 1$. Et

$$\int \int_K x \, dx dy = \int_0^1 x \int_0^{1-x} dy dx = \int_0^1 (x - x^2) \, dx = \frac{1}{6}$$

Or si $p(x, y) = x$, on a $p(x_G, y_G) = \frac{1}{3}$, et donc on a encore bien (4.51). Le calcul de $\int \int_K y \, dx dy$ est identique ; on a donc bien montré que l'intégration numérique à un point de Gauss est exacte pour les polynômes d'ordre 1.

2. On veut montrer que pour tout polynôme p de degré 2, on a :

$$\int \int_K p(x, y) \, dx dy = L(p), \text{ où on a posé } L(p) = \frac{1}{6} \left(p\left(\frac{1}{2}, 0\right) + p\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + p\left(0, \frac{1}{2}\right) \right) \quad (4.52)$$

On va démontrer que (4.52) est vérifié pour tous les monômes de P_2 . Si $p \equiv 1$, on a $L(p) = \frac{1}{2}$, et (4.52) est bien vérifiée. Si $p(x, y) = x$, on a $L(p) = \frac{1}{6}$, et on a vu à la question 1 que $\int \int_K x \, dx dy = \frac{1}{6}$. On a donc bien (4.52).

Par symétrie, si $p(x, y) = y$ vérifie aussi (4.52). Calculons maintenant $I = \int \int_K xy \, dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} y \, dy dx$. On a donc

$$I = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3) dx = \frac{1}{24},$$

et si $p(x, y) = xy$, on a bien : $L(p) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4}$. Donc (4.52) est bien vérifiée. Il reste à vérifier que (4.52) est vérifiée pour $p(x, y) = x^2$ (ou $p(x, y) = y^2$, par symétrie). Or, $J = \int \int_K x^2 \, dx dy = \int_0^1 x^2 \int_0^{1-x} dy dx = \int_0^1 (x^2 - x^3) dx$. Donc $J = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. Et pour $p(x, y) = x^2$, on a bien : $L(p) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{12}$.

Exercice 59 page 165

I. Comme $p \in P_2$, p est de la forme : $p(x, y) = a + bx + cy + dxy + \alpha x^2 + \beta y^2$, on a par développement de Taylor (exact car $p''' = 0$) :

$$2p(a_9) - p(a_6) - p(a_8) = p_{xx}(a_9) = \alpha$$

$$2p(a_9) - p(a_5) - p(a_7) = p_{yy}(a_9) = \beta$$

d'où on déduit que

$$4p(a_9) - \sum_{i=5}^8 p(a_i) = \alpha + \beta. \quad (4.53)$$

De même, on a :

$$2p(a_5) - p(a_1) - p(a_2) = \alpha$$

$$2p(a_7) - p(a_3) - p(a_4) = \alpha$$

$$2p(a_6) - p(a_2) - p(a_3) = \beta$$

$$2p(a_8) - p(a_1) - p(a_4) = \beta.$$

Ces quatre dernières égalités entraînent :

$$\sum_{i=5}^8 p(a_i) - \sum_{i=1}^4 p(a_i) = \alpha + \beta \quad (4.54)$$

De (4.53) et (4.54), on déduit que :

$$\sum_{i=1}^4 p(a_i) - 2 \sum_{i=5}^8 p(a_i) + 4p(a_9) = 0.$$

2. La question précédente nous suggère de choisir $\phi : Q_2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(p) = \sum_{i=1}^4 p(a_i) - 2 \sum_{i=5}^8 p(a_i) + 4p(a_9).$$

Soit $p \in \mathcal{P}$ tel que $p(a_i) = 0$, $i = 1, \dots, 8$. Comme $p \in Q_2$, p est une combinaison linéaire des fonctions de base $\varphi_1, \dots, \varphi_9$, associées aux noeuds a_1, \dots, a_9 , et comme $p(a_i) = 0$, $i = 1, \dots, 8$, on en déduit que $p = \alpha\varphi_9$, $\alpha \in \mathbb{R}$. On a donc $\phi(p) = \alpha\phi(\varphi_9) = 4\alpha = 0$, ce qui entraîne $\alpha = 0$. On a donc $p = 0$.

3. Calculons les fonctions de base $\varphi_1^*, \dots, \varphi_8^*$ associées aux noeuds a_1, \dots, a_8 qui définissent Σ . On veut que $\varphi_i^* \in \mathcal{P}$ et $\varphi_i^*(a_j) = \delta_{ij}$ pour $i, j = 1, \dots, 8$. Or $\varphi_9(a_j) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, 8$, et $\phi(\varphi_9) = 4$. Remarquons alors que pour $i = 1$, à 4 on a

$$p(\varphi_i) = 1, \text{ et donc si } \varphi_i^* = \varphi_i - \frac{1}{4} \varphi_9,$$

on a $p(\varphi_i^*) = 0$ et $\varphi_i^*(a_j) = \delta_{ij}$ pour $j = 1, \dots, 8$. De même, pour $i = 5$ à 8, on a $p(\varphi_i) = -2$, et donc si $\varphi_i^* = \varphi_i + \frac{1}{2}\varphi_9$, on a $p(\varphi_i^*) = 0$ et $\varphi_i^*(a_j) = \delta_{ij}$, pour $j = 1, \dots, 8$. On a ainsi trouvé les fonctions de base de l'élément fini (C, \mathcal{P}, Σ) . Notons que cet élément fini n'est autre que l'élément fini (C, Q_2^*, Σ) vu en cours (voir paragraphe 4.2.3 page 146 et que $\text{Ker } \phi = \mathcal{P} = Q_2^*$.