

Chapitre 6

Problèmes hyperboliques

6.1 Une équation de transport

L'exemple type d'équation hyperbolique est l'équation de transport. Supposons par exemple, qu'on connaisse l'emplacement d'une nappe de pétrole due au dégazement intempestif d'un supertanker au large des côtes, et qu'on cherche à prévoir son déplacement dans les heures à venir, par exemple pour la mise en oeuvre efficace de barrages. On suppose connu $v : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2$, le champ des vecteurs vitesse des courants marins, qui dépend de la variable d'espace x et du temps t ; ce champ de vecteurs est donné par exemple par la table des marées (des exemples de telles cartes de courants sont données en Figure 6.1). A $t = 0$, on connaît $\rho_0(x)$: la densité

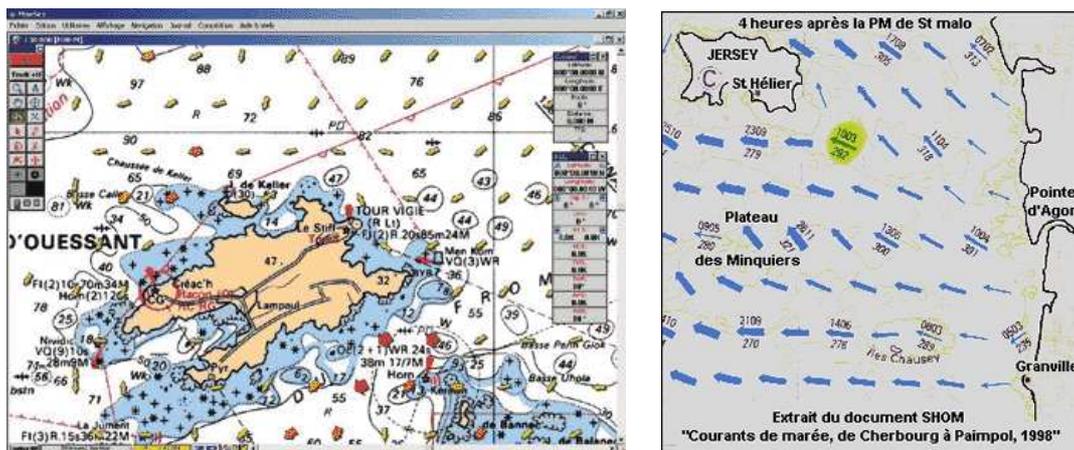


FIGURE 6.1 – Exemples de cartes de courants marins au large de côtes de Bretagne (source : SHOM)

d'hydrocarbure initiale, et on cherche à calculer $\rho(x, t)$ = densité de d'hydrocarbure au point x et au temps t . On écrit alors l'équation de conservation de la masse :

$$\rho_t + \text{div}(\rho v) = 0, \tag{6.1.1}$$

$$\rho_0(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \in A^c, \end{cases} \quad (6.1.2)$$

où A représente le lieu initial de la nappe de pétrole. Dans le cas d'un déplacement maritime, le vecteur $v : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2$, n'est évidemment pas constant (la marée n'est pas la même à Brest qu'à Saint Malo). De plus le déplacement de la nappe dépend également du vent, qui affecte donc le vecteur v . On supposera pourtant ici, pour simplifier l'exposé, que v soit constant en espace et en temps. Alors le problème (6.1.1) - (6.1.2) admet comme solution :

$$\rho(x, t) = \rho_0(x - vt), \quad (6.1.3)$$

qui exprime le transport de la nappe à la distance vt du point de départ dans la direction de V , au temps t . En fait, il est clair que (6.1.3) n'est pas une solution "classique" de puisque ρ n'est pas continue, et que ces dérivées en temps ne sont donc pas définies au sens habituel. Nous verrons par la suite comment on peut donner une formulation correcte des solutions de (6.1.1) - (6.1.2). Notons que les systèmes d'équations hyperboliques sont très importants en mécanique des fluides ; les équations d'Euler, par exemple sont utilisées pour modéliser l'écoulement de l'air autour d'une aile d'avion. Dans le cadre de ce cours, nous n'étudierons que le cas des équations scalaires. Par souci de simplicité, nous n'aborderons dans le cadre de ce cours que les problèmes posés en une dimension d'espace, tout d'abord dans le cas relativement simple d'une équation linéaire (section 6.2 page 208, puis dans le cas d'une équation non linéaire (section 6.4 page 216. Par souci de clarté, les schémas numériques seront introduits pour l'équation linéaire $u_t + u_x = 0$ (section 6.3 page 212). On donnera ensuite quelques schémas pour les équations hyperboliques non linéaires (section 6.5 page 226).

6.2 Equation linéaire, cas 1D

Commençons par étudier le cas d'une équation hyperbolique linéaire :

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (6.2.4)$$

où la vitesse de transport $c \in \mathbb{R}$ et la condition initiale $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont données. Le problème (6.2.4) s'appelle "problème de Cauchy". On cherche $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, solution de ce problème. Nous commençons par une étude succincte du problème continu, pour lequel on peut trouver une solution exacte explicite.

Solution classique et solution faible

Définition 6.1 (Solution classique) On dit qu'une fonction $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est solution classique du problème (6.2.4) si $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et u vérifie (6.2.4).

Une condition nécessaire pour avoir une solution classique est que $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$.

Théorème 6.2 Si $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, alors il existe une unique solution classique du problème (6.2.4), qui s'écrit $u(x, t) = u_0(x - ct)$.

Démonstration : Pour montrer l'existence de la solution, il suffit de remarquer que u définie par (6.1) est de classe C^1 , et que $u_t + cu_x = 0$ en tout point. Pour montrer l'unicité de la solution, on va introduire la notion de caractéristique, qui est d'ailleurs aussi fort utile dans le cadre de la résolution numérique. Soit u solution classique de (6.2.4). On appelle droite caractéristique de (6.2.4) issue de x_0 la droite d'équation $x(t) = ct + x_0$, qui est illustrée sur la figure 6.2. Montrons que si u est solution de (6.2.4), alors u est constante sur la droite \mathcal{D}_{x_0} , pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et φ_{x_0} la fonction de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} définie par $\varphi_{x_0}(t) = u(x_0 + ct, t)$. Dérivons φ_{x_0}

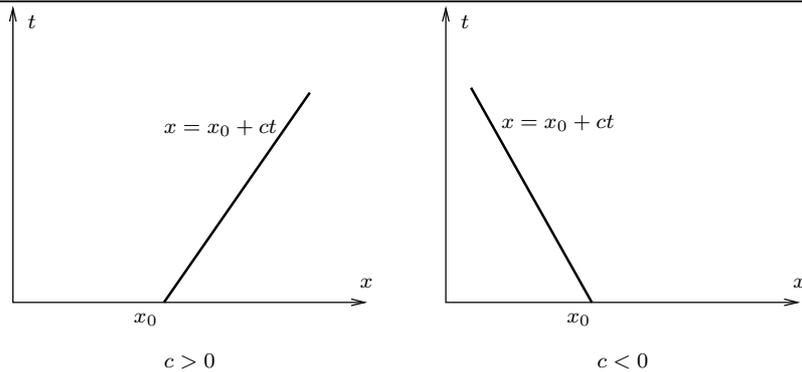


FIGURE 6.2 – Droites caractéristiques, cas linéaire

par rapport au temps :

$$\begin{aligned}\varphi'_{x_0}(t) &= cu_x(x_0 + ct, t) + u_t(x_0 + ct, t) \\ &= (u_t + cu_x)(x_0 + ct, t) = 0,\end{aligned}$$

car u est solution de (6.2.4). On en déduit que

$$\varphi_{x_0}(t) = \varphi_{x_0}(0) = u_0(x_0), \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

On a donc $u(x_0 + ct, t) = u_0(x_0), \forall x_0 \in \mathbb{R}$, donc u est constante sur la droite caractéristique \mathcal{D}_{x_0} , et en posant $x = x_0 + ct$:

$$u(x, t) = u_0(x - ct),$$

ce qui prouve l'existence et l'unicité de (6.2.4). ■

Remarque 6.3 (Terme source) *Le modèle physique peut amener à une équation avec terme source au second membre $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$:*

$$\begin{cases} u_t + cu_x = f(x, t), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (6.2.5)$$

et $u_0 \in C(\mathbb{R})$. Ceci peut modéliser un dégazage sur un temps plus long, comme dans le cas du Prestige sur les côtes de Galice en 2003 par exemple. Pour montrer l'unicité de la solution de (6.2.5), on suppose que u est solution classique et on pose : $\varphi_{x_0}(t) = u(x_0 + ct, t)$. Par un calcul identique au précédent, on a

$$\varphi'_{x_0}(t) = f(x_0 + ct, t).$$

Donc $\varphi_{x_0}(t) = \varphi_{x_0}(0) + \int_0^t f(x_0 + cs, s)ds$ On en déduit que :

$$u(x_0 + ct, t) = \varphi_{x_0}(0) + \int_0^t f(x_0 + cs, s)ds.$$

on pose alors : $x = x_0 + ct$, et on obtient :

$$u(x, t) = u_0(x - ct) + \int_0^t f(x - c(t - s), s)ds,$$

ce qui prouve l'unicité. On obtient alors l'existence en remarquant que la fonction $u(x, t)$ ainsi définie est effectivement solution de (6.2.5), car elle est de classe C^1 et elle vérifie $u_t + cu_x = f$.

Dans ce qui précède, on a fortement utilisé le fait que u_0 est C^1 . Ce n'est largement pas toujours le cas dans la réalité. Que faire si, par exemple, $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$?

Définition 6.4 (Solution faible) On dit que u est solution faible de (6.2.4) si $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et u vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} [u(x, t)\varphi_t(x, t) + cu(x, t)\varphi_x(x, t)] dt dx + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(x, 0) dx = 0, \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}). \quad (6.2.6)$$

Notons que dans la définition ci-dessus, on note $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, et $C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ l'ensemble des restrictions à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ des fonctions $C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. On insiste sur le fait qu'on peut donc avoir $\varphi(x, 0) \neq 0$. Voyons maintenant les liens entre solution classique et solution faible.

Proposition 6.5 Si u est solution classique de (6.2.4) alors u est solution faible. Réciproquement, si $u \in C^1(\mathbb{R} \times]0, +\infty[) \cap C(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ est solution classique de (6.4.17) alors u est solution forte de (6.2.4).

La démonstration de cette proposition est effectuée dans le cadre plus général des équations hyperboliques non linéaires (voir Proposition 6.20). Notons que si on prend $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times]0, +\infty[, \mathbb{R})$ au lieu de $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[, \mathbb{R})$ dans (6.2.6), on obtient :

$$u_t + cu_x = 0,$$

mais on ne récupère pas la condition initiale. Il est donc essentiel de prendre des fonctions test dans $C_c^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[, \mathbb{R})$.

Théorème 6.6 (Existence et unicité de la solution faible) Si $u_0 \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$, il existe une unique fonction u solution faible de (6.2.4).

Démonstration : On va montrer que $u(x, t) = u_0(x - ct)$ est solution faible. Comme $u_0 \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$, on a $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. Soit $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on veut montrer que :

$$\int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} u(x, t)\varphi_t(x, t) dx dt + \int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} cu(x, t)\varphi_x(x, t) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(x, 0) dx = 0.$$

Posons

$$A = \int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} u(x, t)\varphi_t(x, t) dx dt + \int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} cu(x, t)\varphi_x(x, t) dx dt.$$

Si $u(x, t) = u_0(x - ct)$, on a donc :

$$A = \int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} [u_0(x - ct)\varphi_t(x, t) + cu_0(x - ct)\varphi_x(x, t)] dx dt.$$

En appliquant le changement de variable $y = x - ct$ et en utilisant le théorème de Fubini, on obtient :

$$A = \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \int_{\mathbb{R}_+} [\varphi_t(y + ct, t) + c\varphi_x(y + ct, t)] dt dy.$$

Posons alors

$$\psi_y(t) = \varphi(y + ct, t).$$

On a donc :

$$A = \int_{\mathbb{R}} \left(u_0(y) \int_0^{+\infty} \psi'_y(t) dt \right) dy,$$

et comme ψ est à support compact sur $[0, +\infty[$,

$$A = - \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \psi_y(0) dy,$$

donc finalement :

$$A = - \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \varphi(y, 0) dy.$$

On a ainsi démontré que la fonction u définie par $u(x, t) = u_0(x - ct)$ est solution faible de l'équation (6.2.4). On a donc existence d'une solution faible. Montrons maintenant que celle-ci est unique. Soient u et v deux solutions faibles de (6.2.4). On pose $w = u - v$ et on va montrer que $w = 0$. Par définition, w satisfait :

$$\int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} w(x, t) (\varphi_t(x, t) + c\varphi_x(x, t)) dx dt = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \quad (6.2.7)$$

Par le lemme 6.7 donné ci-dessous, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$ il existe $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, telle que $\varphi_t + c\varphi_x = f$, et on a donc par (6.2.7) :

$$\int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} w(x, t) f(x, t) dx dt = 0, \quad \forall f \in C_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$$

Ceci entraîne que $w = 0$ p.p.. ■

Lemme 6.7 (Résultat d'existence) Soit $f \in C_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, alors il existe

$$\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \text{ telle que } \varphi_t + c\varphi_x = f$$

Démonstration : Soit $f \in C_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, et $T > 0$ tel que $f(x, t) = 0$ si $t \geq T$. On considère le problème :

$$\begin{cases} \varphi_t + c\varphi_x = f \\ \varphi(x, T) = 0 \end{cases} \quad (6.2.8)$$

On vérifie facilement que le problème (6.2.8) admet une solution classique

$$\varphi(x, t) = - \int_t^T f(x - c(s - t), s) ds$$

En effet, avec ce choix de φ , on a effectivement

$$\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \text{ et } \varphi_t + c\varphi_x = f.$$

De plus, comme f est à support compact, φ est à support compact. ■

Remarque 6.8 (Sur les propriétés de la solution) Remarquons que la solution faible de (6.2.4) possède les propriétés suivantes :

1. Si $u_0 \geq 0$ p.p. alors $u \geq 0$ p.p.,
2. $\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|u_0(x)\|_{L^p(\mathbb{R})} \quad \forall p \quad p \in [1, +\infty[.$

Lors de l'élaboration de schémas numériques pour la recherche d'une approximation, on s'attachera à vérifier que ces propriétés sont encore satisfaites par la solution approchée.

6.3 Schémas numériques pour $u_t + u_x = 0$

On considère ici le problème de transport linéaire :

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}). \end{cases} \quad (6.3.9)$$

On sait que la solution de ce problème s'écrit :

$$u(x, t) = u_0(x - ct).$$

On rappelle que u est une solution classique si $u \in C^1(\mathbb{R})$, et que u est une solution faible si $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. On va chercher à retrouver cette solution par une approximation numérique. Notons que dans le cas linéaire, l'utilisation d'un schéma numérique, n'est évidemment pas utile, mais nous commençons par ce cas par souci pédagogique.

6.3.1 Schéma explicite différences finies centrées

On effectue une discrétisation espace temps en se donnant un pas de discrétisation en espace h , et en posant : $x_i = ih, \forall i \in \mathbb{Z}$; de même on se donne un pas de discrétisation en temps k , et on pose $t_n = nk, \forall n \in \mathbb{N}$. Écrivons le schéma d'Euler explicite pour l'approximation de u_t et un schéma centré pour l'approximation de u_x . On approche $u_t(x_i, t_n)$ par $\frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{k}$ et $u_x(x_i, t_n)$ par $\frac{u(x_{i+1}, t_n) - u(x_{i-1}, t_n)}{2h}$. Le schéma centré s'écrit donc, en fonction des inconnues discrètes :

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} = 0, \\ u_i^0 = u_0(x_i). \end{cases} \quad (6.3.10)$$

(où on a supposé $u_0 \in C(\mathbb{R})$) Ce schéma est inconditionnellement instable, et il faut donc éviter de l'utiliser. Qu'entend-on par instable ? On peut montrer que :

1. Le schéma (6.3.10) ne respecte pas la positivité, car $u_0(x) \geq 0 \forall x$ n'entraîne pas forcément $u_i^n \geq 0$. En effet si u_0 est telle que

$$\begin{cases} u_i^0 = 0, \forall i \leq 0, \\ u_i^0 = 1, \forall i > 0. \end{cases}$$

Alors :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{k}{2h}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

donne, pour $n = 0$

$$u_0^1 = -\frac{k}{2h} < 0$$

2. Le schéma (6.3.10) n'est pas L^∞ stable :

$$\|u^n\|_\infty \leq C \text{ n'entraîne pas } \|u^{n+1}\|_\infty \leq C.$$

3. Le schéma (6.3.10) n'est pas L^2 stable :

$$\|u^n\|_2 \leq C \text{ n'entraîne pas que } \|u^{n+1}\|_2 \leq C.$$

4. Le schéma n'est pas stable au sens de Von Neumann. En effet, si

$$u_0(x) = e^{ipx}, \text{ où } i^2 = -1 \text{ et } p \in \mathbb{Z},$$

la solution exacte est $u(x, t) = e^{ip(x-t)}$. Une discrétisation de u_0 s'écrit :

$$u_j^0 = e^{ipjh} \quad j \in \mathbb{Z}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} u_i^1 &= u_i^0 - \frac{k}{2h}(u_{i+1}^0 - u_{i-1}^0) \\ &= e^{ipjh} - \frac{k}{2h}(e^{ip(j+1)h} - e^{ip(j-1)h}) \\ &= \mathcal{J}_{k,h} u_j^0, \end{aligned}$$

avec $\mathcal{J}_{k,h} = 1 - \frac{ik}{h} \sin ph$. On a donc $|\mathcal{J}_{k,h}| > 1$ si $\sin ph \neq 0$, ce qui montre que le schéma n'est pas stable au sens de Von Neuman.

5. Le schéma (6.3.10) n'est pas convergent. En effet, on peut montrer qu'il existe u_0, k et h telle que la solution approchée $u_{h,k} : (u_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}^{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers u lorsque h et k tendent vers 0.

6.3.2 Schéma différences finies décentré amont

On utilise toujours le schéma d'Euler explicite pour la discrétisation en temps, mais on approche maintenant

$$u_x(x_i, t_n) \text{ par } \frac{u(x_i, t_n) - u(x_{i-1}, t_n)}{h_{i-1/2}}.$$

On considère de plus un pas de discrétisation variable, défini par $h_{i-1/2} = x_i - x_{i-1}$. Le schéma par différences

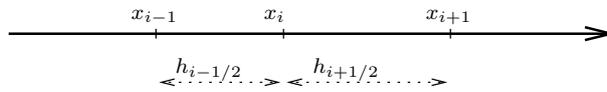


FIGURE 6.3 – Maillage volumes finis

finies avec décentrement amont s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h_{i-1/2}} = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (6.3.11)$$

Proposition 6.9 *Le schéma (6.3.11) est stable sous condition de Courant-Friedrichs-Levy (CFL)*

$$k \leq h = \inf_{i \in \mathbb{Z}} h_{i-1/2} > 0. \quad (6.3.12)$$

c'est à dire que si $A \leq u_i^n \leq B$, alors $A \leq u_i^{n+1} \leq B$.

Démonstration : On a : $u_i^{n+1} = u_i^n(1 - \alpha_i) + \alpha_i u_{i-1}^n$ avec $\alpha_i = \frac{k}{h_{i-1/2}}$. Donc, si la condition (6.3.12) est vérifiée, u_i^{n+1} est une combinaison convexe de u_i^n et u_{i-1}^n , et donc $u_i^{n+1} \in [u_{i-1}^n, u_i^n]$. ■

Théorème 6.10 (Convergence du schéma (6.3.11)) On suppose que $u_0 \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que u_0, u_0', u_0'' sont bornées. Soit $A = \inf_{x \in \mathbb{R}} u_0(x)$ et $B = \sup_{x \in \mathbb{R}} u_0(x)$. Alors :

1. $A \leq u_i^n \leq B, \forall i \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $\bar{u}_i^n = u(x_i, t_n)$, à u est la solution exacte de (6.3.9), alors :

$$\sup_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ nk \leq T}} |u_i^n - \bar{u}_i^n| \leq TC_{u_0}(k + h),$$

où $TC_{u_0} \geq 0$ ne dépend que de u_0 .

Démonstration : le point 1 se démontre par récurrence sur n à partir de la propriété précédente. Le point 2 (estimation d'erreur) se démontre en remarquant d'abord que l'erreur de consistance

$$\frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n}{k} + \frac{\bar{u}_i^n - \bar{u}_{i-1}^n}{h_{i-1/2}} = R_i^n$$

vérifie :

$$|R_i^n| \leq C_{u_0}(\bar{h} + k)$$

où $\bar{h} = \max_{i \in \mathbb{Z}} h_{i-1/2}$. On a donc :

$$\bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^n \left(1 - \frac{k}{h_{i-1/2}}\right) + \frac{k}{h_{i-1/2}} \bar{u}_{i-1}^n + kR_i^n,$$

or le schéma numérique s'écrit :

$$u_i^{n+1} = u_i^n \left(1 - \frac{k}{h_{i-1/2}}\right) + \frac{k}{h_{i-1/2}} u_{i-1}^n$$

Par différence, on obtient :

$$u_i^{n+1} - \bar{u}_i^{n+1} = (u_i^n - \bar{u}_i^n) \left(1 - \frac{k}{h_{i-1/2}}\right) + (u_{i-1}^n - \bar{u}_{i-1}^n) \frac{k}{h_{i-1/2}} - kR_i^n$$

et donc :

$$|u_i^{n+1} - \bar{u}_i^{n+1}| \leq |u_i^n - \bar{u}_i^n| \left(1 - \frac{k}{h_{i-1/2}}\right) + |u_{i-1}^n - \bar{u}_{i-1}^n| \frac{k}{h_{i-1/2}} + kC_{u_0}(\bar{h} + k) \quad (6.3.13)$$

On effectue alors l'hypothèse de récurrence :

$$\sup |u_i^n - \bar{u}_i^n| \leq (n-1)kC_{u_0}(k + \bar{h}) \quad (6.3.14)$$

grâce à (6.3.13) et (6.3.14), on obtient :

$$|u_i^{n+1} - \bar{u}_i^{n+1}| \leq (n-1)kC_{u_0}(k + \bar{h}) + k(C_{u_0}(k + \bar{h})).$$

Donc finalement :

$$|u_i^{n+1} - \bar{u}_i^{n+1}| \leq TC_{u_0}(k + \bar{h}).$$

Remarque 6.11 (Décentrement) . Pour une équation de transport telle que (6.3.9), le choix du décentrement est crucial. Ici, on a approché $u_x(x_i)$ par $\frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1/2}}$. Dans le cas où on étudie une équation de transport de type, $u_t + cu_x = 0$, avec $c \in \mathbb{R}$, le choix décentré amont sera toujours

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{h} \text{ si } c > 0,$$

par contre, si $c < 0$, le choix amont donnera

$$\frac{u_i - u_{i+1}}{h}.$$

Regardons ce qui se passe si l'on effectue un "mauvais" décentrement. Considérons toujours l'équation $u_t + u_x = 0$. Effectuer le "mauvais décentrement" amène au schéma :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} = 0,$$

c'est à dire :

$$u_i^{n+1} = u_i^n \left(1 + \frac{k}{h}\right) - \frac{k}{h} u_{i+1}^n.$$

Examinons le comportement de la solution approchée donnée par le schéma si on prend une condition initiale u_0 telle que $u_0(x) = 0, \forall x \geq 0$. Dans ce cas, on sait que $u(x, t) \neq 0$ pour t assez grand, or après calculs on obtient $u_{-1}^{n+1} = u_{-1}^n \left(1 + \frac{k}{h}\right) + 0 = u_{-1}^0 \left(1 + \frac{k}{h}\right)^n$, alors que $u_i^{n+1} = 0 \quad \forall i \geq 0$. On en déduit que la solution approchée est très mauvaise.

Remarque 6.12 (Equation non linéaire, donnée initiale) 1. Dans le cas non linéaire, la démonstration précédente de convergence ne s'adapte pas car les solutions ne sont pas régulières.

2. On a défini (6.3.11) pour $u_0 \in C(\mathbb{R})$. Si $u_0 \notin C(\mathbb{R})$, on peut prendre comme donnée initiale $u_i^0 = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_0(x) dx$.

6.3.3 Schéma volumes finis décentrés amont

On considère toujours le problème (6.3.9), avec condition initiale $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. On se donne une discrétisation en espace, c'est à dire un ensemble de points $(x_{i+1/2})_{i \in \mathbb{Z}}$, tels que $x_{i+1/2} > x_{i-1/2}$, et on note $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$. On approche toujours la dérivée en temps par un schéma d'Euler explicite, on intègre (6.3.9) sur la maille $]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$, et on obtient :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (u_t + u_x) dx = 0.$$

En approchant $u(x_{i+1/2})$ (resp. $u(x_{i-1/2})$) par u_i^n (resp. u_{i-1}^n) et en approchant u_t par un schéma d'Euler explicite, on obtient :

$$\begin{cases} h_i \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + u_i^n - u_{i-1}^n = 0, \\ u_i^0 = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_0(x) dx. \end{cases} \quad (6.3.15)$$

Proposition 6.13 Soit $(u_i^n)_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ i \in \mathbb{Z}}}$ la solution de (6.3.15). Si $k \leq h = \min h_i$ et si $A \leq u_0(x) \leq B$, alors $A \leq u_i^n \leq B \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$.

La démonstration est similaire à celle de la proposition (6.9), et laissée à titre d'exercice.

Définition 6.14 (Solution approchée) Soit \mathcal{T} un maillage volumes finis de \mathbb{R} défini par $\mathcal{T} = (K_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ avec $K_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$. On appelle solution approchée de (6.3.9) par le schéma (6.3.15) la fonction $u_{\mathcal{T},k} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$u_{\mathcal{T},k}(x, t) = u_i^n \text{ si } x \in K_i \text{ et } t \in [nk, nk + 1[\quad (6.3.16)$$

On admettra le théorème de convergence suivant (voir aussi exercice 6.3.11) :

Théorème 6.15 (Convergence du schéma 6.3.15) Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, on suppose que $k \leq h = \inf(h_i)$, alors $u_{\mathcal{T},k}$ converge vers u dans $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ lorsque h (et k) tend vers 0, c'est à dire qu'on a : $\int_C |u_{\mathcal{T},k} - u| dx dt \rightarrow 0$ pour tout compact C de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, lorsque h (et k) tend vers 0.

6.4 Equations hyperboliques non linéaires

On se donne $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u_0 \in C(\mathbb{R})$ et on considère maintenant l'équation hyperbolique non linéaire :

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (6.4.17)$$

Commençons par donner la définition de solution classique de ce problème même si, comme nous le verrons après, celle-ci n'a pas grand intérêt puisque le problème (6.4.17) n'a pas, en général de solution classique.

Définition 6.16 (Solution classique) On suppose que $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ et $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors u est solution classique de (6.4.17) si $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et u vérifie

$$\begin{cases} (u_t + (f(u))_x)(x, t) = 0, & \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Avant d'énoncer le théorème de non existence, rappelons que dans le cas d'une équation différentielle du type non linéaire,

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), & t \in \mathbb{R}_+, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

si on note T_{\max} le temps d'existence de la solution, et si $T_{\max} < +\infty$ alors $\|x(t)\| \rightarrow +\infty$ lorsque $t \rightarrow T_{\max}$. Donnons maintenant la définition des courbes caractéristiques de l'équation (6.4.17), qui permet le lien entre les équations hyperboliques non linéaires et les équations différentielles ordinaires.

Définition 6.17 (Courbe caractéristique) On appelle courbe caractéristique du problème (6.4.17) issue de $x_0 \in \mathbb{R}$, la courbe définie par le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f'(u(x(t), t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (6.4.18)$$

Théorème 6.18 (Non existence) Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on suppose que f' n'est pas constante, alors il existe $u_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que (6.4.17) n'admette pas de solution classique.

Démonstration : Comme $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a $f' \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et donc le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique. Il existe donc une solution maximale $x(t)$ définie sur $[0, T_{\max}[$, et $x(t)$ tend vers l'infini lorsque t tend vers T_{\max} si $T_{\max} < +\infty$. Les quatre étapes de la démonstration sont les suivantes :

6.4. EQUATIONS HYPERBOLIQUES NON LINÉAIRES CHAPITRE 6. PROBLÈMES HYPERBOLIQUES

1. $u(x(t), t) = u_0(x_0)$, $\forall t \in [0, T_{\max}[$, et donc que toute solution de (6.4.17) est constante sur les caractéristiques.
2. Les courbes caractéristiques sont des droites.
3. $T_{\max} = +\infty$ et donc $u(x, t) = u_0(x_0) \quad \forall t \in [0, +\infty[$.
4. On en déduit alors qu'on n'a pas de solution classique de (6.4.17).

Détaillons maintenant ces étapes.

1. Soit φ définie par $\varphi(t) = u(x(t), t)$; en dérivant φ , on obtient : $\varphi'(t) = u_t(x(t), t) + u_x(x(t), t)x'(t)$. Comme x vérifie (6.4.18), ceci entraîne : $\varphi'(t) = u_t(x(t), t) + f'(u(x(t), t))u_x(x(t), t)$, et donc

$$\varphi'(t) = (u_t + (f(u))_x)(x(t), t) = 0.$$

La fonction φ est donc constante, et on a :

$$u(x(t), t) = \varphi(t) = \varphi(0) = u(x(0), 0) = u(x_0, 0) = u_0(x_0), \forall t \in [0, T_{\max}[.$$

2. Comme $u(x(t), t) = u_0(x_0)$, $\forall t \in [0, T_{\max}[$, on a donc $x'(t) = f'(u_0(x_0))$. Donc en intégrant, on obtient que le système (6.4.18) décrit la droite d'équation :

$$x(t) = f'(u_0(x_0))t + x_0. \tag{6.4.19}$$

3. Puisque x vérifie (6.4.19), on a donc

$$\lim_{t \rightarrow T_{\max}} |x(t)| < +\infty. \text{ On en déduit que } T = T_{\max}.$$

4. Comme f' est non constante, il existe v_0, v_1 tel que $f'(v_0) > f'(v_1)$, et on peut construire $u_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $u_0(x_0) = v_0$ et $u_0(x_1) = v_1$, où x_0 et x_1 sont donnés et $x_0 < x_1$, voir figure 6.4. Supposons que

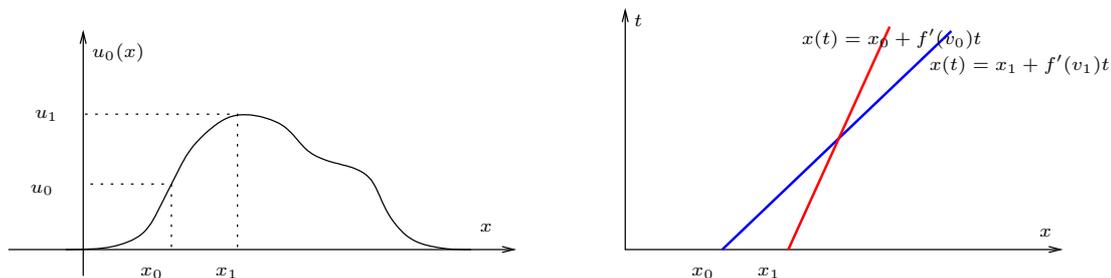


FIGURE 6.4 – Droites caractéristiques, cas non linéaire

u soit solution classique avec cette donnée initiale. Alors :

$$u(x_0 + f'(u_0(x_0))t, t) = u_0(x_0) = v_0 \text{ et } u(x_1 + f'(u_0(x_1))t, t) = u_0(x_1) = v_1.$$

Soit T tel que $x_0 + f'(v_0)T = x_1 + f'(v_1)T = \bar{x}$, c'est à dire

$$T = \frac{x_1 - x_0}{f'(v_0) - f'(v_1)}.$$

On a alors :

$$u(\bar{x}, T) = u_0(x_0) = v_0 = u_0(x_1) = v_1,$$

ce qui est impossible. On en conclut que (6.4.17) n'admet pas de solution classique pour cette donnée initiale.



Définition 6.19 (Solution faible) Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, On appelle solution faible de (6.4.17) une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ telle que

$$\int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} [u(x, t)\varphi_t(x, t) + f(u(x, t))\varphi_x(x, t)] dxdt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(x, 0)dx = 0, \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}). \quad (6.4.20)$$

Donnons maintenant les liens entre solution classique et solution faible.

Proposition 6.20 Soient $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u_0 \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions données.

1. Si u est solution classique de (6.4.17) alors u est solution faible de (6.4.17).
2. Si $u \in C^1(\mathbb{R} \times]0, +\infty[) \cap C(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ est solution faible de (6.4.17) alors u est solution classique de (6.4.17).
3. Soit $\sigma \in \mathbb{R}$, $D_1 = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; x < \sigma t\}$ et $D_2 = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; x > \sigma t\}$. Alors si $u \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ est telle que $u|_{D_i} \in C^1(D_i, \mathbb{R})$, $i = 1, 2$ et que (6.4.17) est vérifié pour tout $(x, t) \in D_i$, $i = 1, 2$, alors u est solution faible de (6.4.17).

Démonstration :

1. Supposons que u est solution classique de (6.4.17), c.à.d. de :

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Soit $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Multiplions (6.4.17) par φ et intégrons sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. On obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} u_t(x, t)\varphi(x, t) dt dx + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} (f(u))_x(x, t)\varphi(x, t) dt dx = 0.$$

L'application du théorème de Fubini et une intégration par parties donnent alors :

$$\int_{\mathbb{R}} u(x, 0)\varphi(x, 0)dx - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} u(x, t)\varphi_t(x, t) dt dx - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} f(u)(x, t)\varphi_x(x, t) dx dt = 0,$$

(car $\text{supp}(\varphi)$ est compact). Et on obtient donc bien la relation (6.4.20), grâce à la condition initiale $u(x, 0) = u_0(x)$.

2. Soit donc u une solution faible de (6.4.17), qui vérifie de plus $u \in C^1(\mathbb{R} \times]0, +\infty[) \cap C(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$. On a donc suffisamment de régularité pour intégrer par parties dans (6.4.20).

Commençons par prendre φ à support compact dans $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$. On a donc $\varphi(x, 0) = 0$, et une intégration par parties dans (6.4.20) donne :

$$- \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} u_t(x, t)\varphi(x, t) dt dx - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} (f(u))_x(x, t)\varphi(x, t) dx dt = 0.$$

On a donc :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} (u_t(x, t) + (f(u))_x(x, t)) \varphi(x, t) dt dx = 0, \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times]0, +\infty[).$$

6.4. EQUATIONS HYPERBOLIQUES NON LINÉAIRES CHAPITRE 6. PROBLÈMES HYPERBOLIQUES

Comme $u_t + (f(u))_x$ est continue, on en déduit que $u_t + (f(u))_x = 0$. En effet, on rappelle que si $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx = 0$ pour toute fonction φ continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , alors $f = 0$ p.p.; si de plus f est continue, alors $f = 0$ partout.

On prend alors $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. Dans ce cas, une intégration par parties dans (6.4.20) donne

$$\int_{\mathbb{R}} u(x, 0)\varphi(x, 0)dx - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} (u_t(x, t) + (f(u))_x(x, t)) \varphi(x, t) dt dx - \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(x, 0)dx = 0.$$

Mais on vient de montrer que $u_t + (f(u))_x = 0$. On en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}} (u_0(x) - u(x, 0))\varphi(x, 0)dx = 0, \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}).$$

Comme u est continue, ceci entraîne $u(x, 0) = u_0(x)$. Donc u est solution classique de (6.4.17).

3. Soit $u \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ telle que $u|_{D_i}$ vérifie (6.4.17), pour tout $(x, t) \in D_i$. Montrons que u est solution faible. Pour cela, calculons :

$$X = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} u(x, t)\varphi_t(x, t) dt dx + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} f(u)(x, t)\varphi_x(x, t) dx dt.$$

On a donc $X = X_1 + X_2$, avec

$$X_1 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} u(x, t)\varphi_t(x, t) dt dx \text{ et } X_2 = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} (f(u))(x, t)\varphi_x(x, t) dx dt.$$

Calculons X_1 . Comme u n'est de classe C^1 que sur chacun des domaines D_i , on n'a pas le droit d'intégrer par parties sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ entier. On va donc décomposer l'intégrale sur D_1 et D_2 ; supposons par exemple $\sigma < 0$, voir figure 6.5. (Le cas $\sigma > 0$ se traite de façon similaire). On a alors $D_2 = \{(x, t); x \in \mathbb{R}_- \text{ et } 0 < t < \frac{x}{\sigma}\}$ et $D_1 = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \cup \{(x, t); x \in \mathbb{R}_- \text{ et } \frac{x}{\sigma} < t < +\infty\}$.

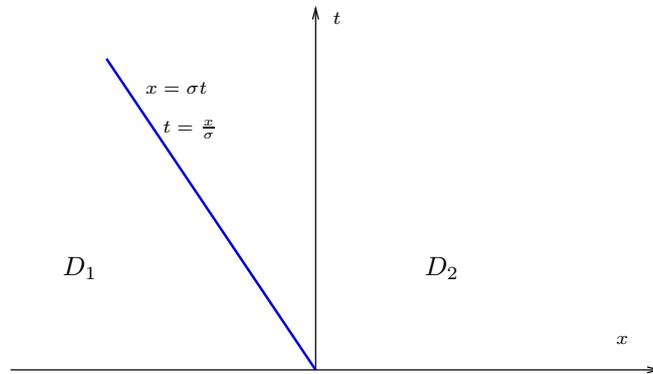


FIGURE 6.5 – Les domaines D_1 et D_2

On a donc :

$$X_1 = \int_{\mathbb{R}_-} \int_0^{x/\sigma} u(x, t)\varphi_t(x, t) dt dx + \int_{\mathbb{R}_-} \int_{\frac{x}{\sigma}}^{+\infty} u(x, t)\varphi_t(x, t) dt dx + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} u(x, t)\varphi_t(x, t) dt dx.$$

6.4. EQUATIONS HYPERBOLIQUES NON LINÉAIRES CHAPITRE 6. PROBLÈMES HYPERBOLIQUES

Comme u est de classe C^1 sur chacun des domaines, on peut intégrer par parties, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 X_1 = & \int_{\mathbb{R}_-} u(x, \frac{x}{\sigma})\varphi(x, \frac{x}{\sigma})dx - \int_{\mathbb{R}_-} u(x, 0)\varphi(x, 0)dx - \int_{\mathbb{R}_-} \int_0^{\frac{x}{\sigma}} u_t(x, t)\varphi(x, t)dtdx \\
 & + \int_{\mathbb{R}_-} u(x, \frac{x}{\sigma})\varphi(x, \frac{x}{\sigma})dx - \int_{\mathbb{R}_-} \int_{\frac{x}{\sigma}}^{+\infty} u_t(x, t)\varphi(x, t)dtdx \\
 & + \int_{\mathbb{R}_+} (-u(x, 0)\varphi(x, 0)dx - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} u_t(x, t)\varphi(x, t)dtdx. \quad (6.4.21)
 \end{aligned}$$

En simplifiant, il vient :

$$X_1 = - \int_{\mathbb{R}} u(x, 0)\varphi(x, 0)dx - \int \int_{D_1} u_t(x, t)\varphi(x, t)dtdx - \int \int_{D_2} u_t(x, t)\varphi(x, t)dtdx.$$

On décompose de même X_2 sur $D_1 \cup D_2$, en remarquant maintenant que $D_1 = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; x < \sigma t\}$ et $D_2 = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; x > \sigma t\}$:

$$X_2 = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{-\infty}^{\sigma t} f(u)(x, t)\varphi_x(x, t)dxdt + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\sigma t}^{+\infty} f(u)(x, t)\varphi_x(x, t)dxdt.$$

La fonction u est de classe C^1 sur chacun des domaines, on peut là encore intégrer par parties. Comme φ est à support compact sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, on obtient après simplification :

$$X_2 = - \int \int_{D_1} (f(u))_x(x, t)\varphi(x, t)dxdt - \int \int_{D_2} (f(u))_x(x, t)\varphi(x, t)dxdt.$$

Comme $u_t + (f(u))_x = 0$ sur D_1 et D_2 , on a donc :

$$X = X_1 + X_2 = - \int_{\mathbb{R}} u(x, 0)\varphi(x, 0)dx,$$

ce qui prouve que u est solution faible de (6.4.17). ■

Notons qu'il existe souvent plusieurs solutions faibles. On a donc besoin d'une notion supplémentaire pour les distinguer. C'est la notion de solution entropique, qui nous permettra d'obtenir l'unicité. Donnons tout d'abord un exemple de non-unicité de la solution faible. Pour cela on va considérer une équation modèle, appelée équation de Burgers, qui s'écrit

$$u_t + (u^2)_x = 0. \quad (6.4.22)$$

Pour calculer les solutions du problème de Cauchy associé à cette équation de manière analytique, on considère une donnée initiale particulière, qui s'écrit

$$u_0(x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0, \\ u_d & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

Ces données initiales définissent un problème de Cauchy particulier, qu'on appelle problème de Riemann, que nous étudierons plus en détails par la suite.

6.4. EQUATIONS HYPERBOLIQUES NON LINÉAIRES CHAPITRE 6. PROBLÈMES HYPERBOLIQUES

Considérons alors le problème suivant (dit problème de Riemann, voir définition 6.28) pour l'équation de Burgers :

$$\begin{cases} u_t + (u^2)_x = 0, \\ u_0(x) = \begin{cases} u_g = -1 \text{ si } x < 0, \\ u_d = 1 \text{ si } x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (6.4.23)$$

On cherche une solution faible de la forme :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g \text{ si } x < \sigma t, \\ u_d \text{ si } x > \sigma t. \end{cases} \quad (6.4.24)$$

Notons que cette éventuelle solution est discontinue au travers de la droite d'équation $x = \sigma t$ dans le plan (x, t) . On remplace $u(x, t)$ par ces valeurs dans (6.4.20). Après calculs (voir exercice 66 page 232, ou aussi la proposition 6.29 plus loin), on s'aperçoit que u est solution faible si la condition suivante, dite condition de Rankine et Hugoniot, est vérifiée :

$$\sigma(u_d - u_g) = (f(u_d) - f(u_g)), \quad (6.4.25)$$

ce qui avec la condition initiale particulière choisie ici, donne $2\sigma = 1^2 - (-1)^2 = 0$.

Mais on peut trouver d'autres solutions faibles : en effet, on sait que sur les caractéristiques, qui ont pour équation $x = x_0 + f'(u_0(x_0))t$, la fonction u est constante. Comme $f'(u) = 2u$, les caractéristiques sont donc des droites de pente -2 si $x_0 < 0$, et de pente 2 si $x_0 > 0$. Construisons ces caractéristiques sur la figure 6.6 : Dans la zone du

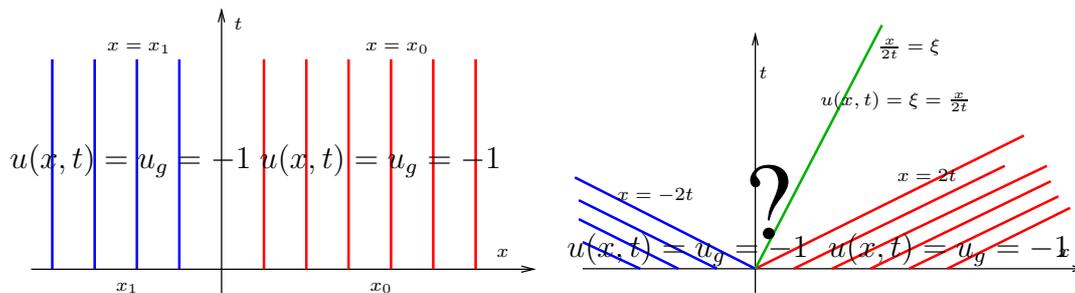


FIGURE 6.6 – Problème de Riemann pour l'équation de Burgers

milieu, où l'on a représenté un point d'interrogation, on cherche u sous la forme $u(x, t) = \varphi\left(\frac{x}{t}\right)$, et telle que u soit continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. La fonction u suivante convient :

$$u(x, t) = \begin{cases} -1 \text{ si } x < -2t, \\ \frac{x}{2t} \text{ si } -2t < x < 2t, \\ 1 \text{ si } x > 2t. \end{cases} \quad (6.4.26)$$

Comment choisir la "bonne" solution faible, entre (6.4.24) et (6.4.26)? Comme les problèmes hyperboliques sont souvent obtenus en négligeant les termes de diffusion dans des équations paraboliques, une technique pour choisir la solution est de chercher la limite du problème de diffusion associé qui s'écrit :

$$u_t + (f(u))_x - \varepsilon u_{xx} = 0, \quad (6.4.27)$$

lorsque le terme de diffusion devient négligeable, c.à.d. lorsque ε tend vers 0. Soit u_ε la solution de (6.4.27) (on admettra l'existence et l'unicité de u_ε). On peut montrer que u_ε tend vers u lorsque ε tend vers 0, où u est la "solution faible entropique" de (6.4.27), définie comme suit.

Définition 6.21 (Solution entropique) Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in C^1(\mathbb{R})$, on dit que $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ est solution entropique de (6.4.27) si pour toute fonction $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ convexe, appelée "entropie", et pour toute fonction $\phi \in C^1$ telle que $\phi' = f'\eta'$, appelé "flux d'entropie", on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} (\eta(u)\varphi_t + \phi(u)\varphi_x) dxdt + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x))\varphi(x,0) dx \geq 0, \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+). \quad (6.4.28)$$

Remarque 6.22 (Condition initiale) Noter que dans la définition 6.21, on prend une fois de plus $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ de manière à bien prendre en compte la condition initiale ; ceci n'est pas toujours fait de cette manière dans les travaux plus anciens sur le sujet, mais entraîne des difficultés lorsqu'on s'intéresse à la convergence des schémas numériques.

On admettra le théorème suivant (dû à Kruskov, 1955)

Théorème 6.23 (Kruskov) Soient $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in C^1(\mathbb{R})$ alors il existe une unique solution entropique de (6.4.17) au sens de la définition 6.21.

Proposition 6.24 Si u est solution classique de (6.4.17), alors u est solution entropique.

Démonstration : Soit $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, Soit $\eta \in C^1(\mathbb{R})$, convexe, une entropie et ϕ tel que $\phi' = f'\eta'$, le flux associé. Multiplions (6.4.17) par $\eta'(u)$:

$$\eta'(u)u_t + f'(u)u_x\eta'(u) = 0$$

Soit encore, puisque $\phi' = f'\eta'$,

$$(\eta(u))_t + \phi'(u)u_x - 0$$

On a donc finalement :

$$(\eta(u))_t + (\phi(u))_x - 0 \quad (6.4.29)$$

De plus, comme $u(x, 0) = u_0(x)$, on a aussi : $\eta(u(x, 0)) = \eta(u_0(x))$. Soit $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, on multiplie (6.4.29) par φ , on intègre sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ et on obtient (6.4.28) (avec égalité) en intégrant par parties. Dans le cas d'une solution classique, l'inégalité d'entropie est une égalité. ■

On a de même le résultat suivant :

Proposition 6.25 Si u est solution faible entropique de (6.4.17), alors u est solution faible.

Démonstration : Il suffit de prendre $\eta(u) = u$ et $\eta(u) = -u$ dans (6.4.28) pour se convaincre du résultat. ■

On déduit de la proposition 6.24, et du théorème 6.23 de Kruskov, que si on a plusieurs solutions faibles au problème 6.4.17 page 216 et que l'une d'entre elles est régulière, alors cette dernière est forcément la solution entropique. Enfin, la caractérisation suivante, que l'on admettra, est souvent utilisée en pratique :

Proposition 6.26 (Entropies de Kruskov) Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in C^1(\mathbb{R})$, alors $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ est solution entropique de (6.4.27) au sens de la définition 6.21 si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{R}$, alors (6.4.28) est vérifiée avec η définie par $\eta(s) = |s - k|$, et ϕ , flux d'entropie associée, défini par :

$$\phi(u) = \max(f(u), k) - \min(f(u), k).$$

Notons que η n'est pas de classe C^1 .

6.4. EQUATIONS HYPERBOLIQUES NON LINÉAIRES CHAPITRE 6. PROBLÈMES HYPERBOLIQUES

Notons que les solutions d’une équation hyperbolique non linéaire respectent les bornes de la solution initiale. Plus précisément, on a le résultat suivant, qu’on admettra :

Proposition 6.27 Si $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et soit A et $B \in \mathbb{R}$ tels que $A \leq u_0 \leq B$ p.p.. Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$, alors la solution entropique $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ de (6.4.17) vérifie : $A \leq u(x) \leq B$ p.p. dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

Cette propriété est essentielle dans les phénomènes de transport, et il est souhaitable qu’elle soit préservée pour la solution approchée donnée par un schéma numérique.

Avant d’aborder l’étude des schémas numériques pour les équations hyperboliques, nous terminons par un résultat sur les solutions du problème de Riemann, dont nous nous sommes d’ailleurs servis pour montrer la non unicité des solutions faibles de (6.4.23).

Définition 6.28 (Problème de Riemann) Soient $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on appelle problème de Riemann avec données $u_g, u_d \in \mathbb{R}$, le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(0, x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0 \\ u_d & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases} \tag{6.4.30}$$

Lorsque la fonction f est convexe ou concave, les solutions du problème de Riemann se calculent facilement ; en effet, on peut montrer le résultat suivant (voir aussi exercice 67 page 232) :

Proposition 6.29 Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ strictement convexe, et soient u_g et $u_d \in \mathbb{R}$.

1. Si $u_g > u_d$, on pose

$$\sigma = \frac{[f(u)]}{[u]} \text{ avec } [f(u)] = f(u_d) - f(u_g) \text{ et } [u] = u_d - u_g. \tag{6.4.31}$$

alors la fonction u définie par

$$\begin{cases} u(x, t) = u_g & \text{si } x < \sigma t \\ u(x, t) = u_d & \text{si } x > \sigma t \end{cases} \tag{6.4.32}$$

est l’unique solution entropique de (6.4.30). Une solution de la forme (6.4.32) est appelée une onde de “choc”.

2. Si $u_g < u_d$, alors la fonction u définie par

$$\begin{cases} u(x, t) = u_g & \text{si } x < f'(u_g)t \\ u(x, t) = u_d & \text{si } x > f'(u_d)t \\ u(x, t) = \xi & \text{si } x = f'(\xi)t \text{ avec } u_g < \xi < u_d \end{cases} \tag{6.4.33}$$

est l’unique solution entropique de (6.4.30). Notons que dans ce cas, la solution entropique est continue. Une solution de la forme (6.4.33) est appelée une onde de “détente”.

Démonstration : 1. Cherchons u sous la forme (6.4.32). Commençons par déterminer σ pour que u soit solution faible. On suppose, pour fixer les idées, que $\sigma > 0$ (mais le même raisonnement marche pour $\sigma < 0$). Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On veut montrer que

$$X = X_1 + X_2 = - \int_{\mathbb{R}} u(x, 0)\varphi(x, 0)dx,$$

où $X_1 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} u(x, t)\varphi_t(x, t)dtdx$ et $X_2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} f(u(x, t))\varphi_x(x, t)dtdx$.

Calculons donc X_1 et X_2 :

$$\begin{aligned} X_1 &= \int_{-\infty}^0 \int_0^{+\infty} u(x,t) \varphi_t(x,t) dt dx + \int_0^{+\infty} \int_0^{\frac{x}{\sigma}} u(x,t) \varphi_t(x,t) dt dx + \int_0^{+\infty} \int_{\frac{x}{\sigma}}^{+\infty} u(x,t) \varphi_t(x,t) dt dx \\ &= - \int_{-\infty}^0 u_g \varphi(x,0) dx + \int_0^{+\infty} u_d \left(\varphi(x, \frac{x}{\sigma}) - \varphi(x,0) \right) dx + \int_0^{+\infty} u_g \left(-\varphi(x, \frac{x}{\sigma}) \right) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} u(x,0) \varphi(x,0) dx + \int_0^{+\infty} (u_d - u_g) \varphi(x, \frac{x}{\sigma}) dx. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} X_2 &= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{\sigma t} f(u) \varphi_x(x,t) dx dt + \int_0^{+\infty} \left(\int_{\sigma t}^{+\infty} f(u)(x,t) \varphi_x(x,t) \right) dx dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(u_g) \varphi(\sigma t, t) dt - \int_0^{+\infty} f(u_d) \varphi(\sigma t, t) dt. \end{aligned}$$

En posant $[u] = u_d - u_g$ et $[f(u)] = f(u_d) - f(u_g)$, on obtient :

$$\begin{aligned} X + \int_{\mathbb{R}} u(x,0) \varphi(x,0) dx &= \int_0^{+\infty} [u] \varphi(x, \frac{x}{\sigma}) dx - \int_0^{+\infty} [f(u)] \varphi(\sigma t, t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} [u] \varphi(\sigma t, t) \sigma dt - \int_0^{+\infty} [f(u)] \varphi(\sigma t, t) dt. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$X + \int_{\mathbb{R}} u(x,0) \varphi(x,0) dx = 0 \text{ si } \sigma[u] - [f(u)] = 0,$$

ce qui est vrai si la condition suivante, dite de Rankine et Hugoniot :

$$\sigma[u] = [f(u)] \tag{6.4.34}$$

est vérifiée.

Voyons maintenant si u est bien solution entropique. Pour cela, on considère $\eta \in C^1$ une "entropie", et $\phi \in C^1$ le flux d'entropie associé, t.q. $\phi' = \eta' f'$. Le même calcul que le précédent, en remplaçant u par $\eta(u)$ et $f(u)$ par $\phi(u)$ donne que :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} \eta(u)(x,t) \varphi_t(x,t) dt dx + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \phi(u)(x,t) \varphi_x(x,t) dx dt \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x)) dx = \int_0^{+\infty} (\sigma[\eta(u)] - [\phi(u)]) \varphi(\sigma t, t) dt. \end{aligned}$$

Pour que u soit solution entropique, il faut (et il suffit) donc que

$$\sigma[\eta(u)] \geq [\phi(u)] \tag{6.4.35}$$

Il reste à vérifier que cette inégalité est vérifiée pour σ donné par (6.4.34), c.à.d.

$$\frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g} (\eta(u_d) - \eta(u_g)) \geq \phi(u_d) - \phi(u_g)$$

Ceci s'écrit encore :

$$(f(u_d) - f(u_g))(\eta(u_d) - \eta(u_g)) \leq (\phi(u_d) - \phi(u_g))(u_d - u_g).$$

Cette inégalité est vérifiée en appliquant le lemme suivant avec $b = u_g > u_d = a$.

Lemme 6.30 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, soient f et $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ des fonctions convexes et $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $\phi' = \eta' f'$, alors :

$$\int_a^b \phi'(s) ds (b-a) \geq \int_a^b f'(s) ds \int_a^b \eta'(s) ds$$

Démonstration : On a

$$\begin{aligned} \int_a^b \phi'(x) dx &= \int_a^b f'(x) \eta'(x) dx \\ &= \int_a^b f'(x) (\eta'(x) - \eta'(y)) dx + \int_a^b f'(x) \eta'(y) dx, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On a donc, en intégrant par rapport à y entre a et b :

$$(b-a) \int_a^b \phi'(x) dx = \int_a^b \int_a^b f'(x) (\eta'(x) - \eta'(y)) dx dy + \int_a^b f'(x) dx \int_a^b \eta'(y) dy$$

Or

$$\int_a^b \int_a^b f'(x) [\eta'(x) - \eta'(y)] dx dy = \int_a^b \int_a^b f'(y) (\eta'(y) - \eta'(x)) dx dy$$

et donc

$$(b-a) \int_a^b \int_a^b \phi'(x) dx = \int_a^b \int_a^b (f'(x) - f'(y)) (\eta'(x) - \eta'(y)) dx dy + \left(\int_a^b f'(x) dx \right) \left(\int_a^b \eta'(y) dy \right).$$

Comme f' et η' sont croissantes, la première intégrale du second membre est nulle, et on a donc bien le résultat annoncé. ■

2. On vérifie facilement que la fonction u définie par (6.4.33) est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, et qu'elle vérifie $u_t + (f(u))_x = 0$ dans chacun des domaines D_1, D_2, D_3 définis par

$$D_1 = \{t > 0, x < f'(u_g)t\}, D_2 = \{t > 0, f'(u_g)t < x < f'(u_d)t\} \text{ et } D_3 = \{t > 0, x > f'(u_d)t\}.$$

Donc par le point 3 de la proposition 6.20 page 218, on sait que u est solution faible (mais attention, ce n'est pas une solution classique car u n'est pas forcément C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ tout entier).

Soit $\eta \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une entropie (convexe) et ϕ le flux d'entropie associé, comme $u_t + (f(u))_x = 0$ dans D_i pour $i = 1$ à 3, en multipliant par $\eta'(u)$, on a également que $(\eta(u))_t + (\phi(u))_x = 0$ dans D_i pour $i = 1$ à 3. Soit maintenant $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, on va montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} (\eta(u))(x, t) \varphi_t(x, t) dt dx + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (\phi(u))(x, t) \varphi_x(x, t) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x)) \varphi(x, 0) dx = 0$$

(dans le cas d'une solution continue, l'inégalité d'entropie est une égalité). En effet, en intégrant par parties les trois termes précédents sur D_1, D_2, D_3 , comme on l'a fait dans les questions 1 et 2, comme la fonction u est continue,

les traces des fonctions sur le bord des domaines s'annulent deux à deux, et il ne reste donc que la condition initiale. On montre ainsi (faire le calcul pour s'en convaincre. . .) que

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} (\eta(u))(x, t) \varphi_x(x, t) dt dx + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} \phi(u)(x, t) (\varphi_x(x, t)) dx dt = - \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x)) \varphi(x, 0),$$

ce qui prouve que u est la solution entropique. ■

6.5 Schémas pour les équations non linéaires

On se donne $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in C^1(\mathbb{R})$, et on cherche à trouver une approximation de la solution entropique du problème (6.4.17). On utilise les mêmes notations que pour le schéma (6.3.15). En intégrant l'équation $u_t + (f(u))_x = 0$ sur une maille K_i , on obtient, au temps $t = t_n$:

$$\int_{K_i} u_t(x, t_n) dx dt + f(u(x_{i+1/2}, t_n)) - f(u(x_{i-1/2}, t_n)) = 0.$$

En utilisant le schéma d'Euler explicite pour la discrétisation de la dérivée temporelle, et en notant $f_{i+1/2}^n$ le flux numérique, c'est à dire l'approximation de $f(u(x_{i+1/2}, t_n))$ on obtient le schéma numérique suivant :

$$\begin{cases} h_i \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n = 0 \\ u_i^0 = \frac{1}{h_i} \int_{K_i} u_0(x) dx. \end{cases} \quad (6.5.36)$$

Pour que ce schéma soit complètement défini, il reste à préciser $f_{i+1/2}^n$ en fonction des inconnues discrètes u_i^n . Un premier choix possible est le schéma centré,

$$f_{i+1/2}^n = \frac{f(u_{i+1}^n) + f(u_i^n)}{2}$$

dont on a vu qu'il est à proscrire, puisque, dans le cas linéaire, il est instable. Rappelons que dans le cas linéaire, le choix décentré amont donne

$$\text{si } f(u) = u, f_{i+1/2}^n = f(u_i^n), \text{ et}$$

$$\text{si } f(u) = -u, f_{i+1/2}^n = f(u_{i+1}^n).$$

Dans le cadre de ce cours, on va s'intéresser aux schémas les plus simples à trois points, c.à.d. que l'équation associée à l'inconnue u_i^n fait intervenir les trois inconnues discrètes u_i^n, u_{i-1}^n et u_{i+1}^n . Le flux numérique g s'écrit sous la forme

$$f_{i+1/2}^n = g(u_i^n, u_{i+1}^n).$$

Pour obtenir un "bon" schéma, on va choisir un flux "monotone", au sens suivant :

Définition 6.31 On dit que qu'une fonction g définie de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} est un flux monotone pour la discrétisation de (6.4.17), si

1. g est consistante par rapport à f , c.à.d. $g(u, u) = f(u)$,

2. g est croissante par rapport à la première variable et décroissante par rapport à la deuxième variable,

3. g est lipschitzienne sur $[A, B]$, où $A = \inf_{\mathbb{R}} u_0$ et $B = \sup_{\mathbb{R}} u_0$.

Remarque 6.32 (Flux monotones et schémas monotones) Si le schéma 6.3.15 est à flux monotone, et s'il vérifie la condition de CFL, on peut alors montrer que le schéma est monotone, c.à.d. qu'il s'écrit sous la forme :

$$u_i^{n+1} = H(u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n),$$

où H est une fonction croissante de ses trois arguments.

Cas où f est monotone Pour illustrer le choix de g , supposons par exemple que f soit croissante. Un choix très simple consiste alors à prendre $g(u_i^n, u_{i+1}^n) = f(u_i^n)$. On vérifie (exercice) que dans ce cas, les trois conditions ci-dessus sont vérifiées, ce schéma est dit décentré amont. On vérifiera qu'on retrouve le schéma décentré amont exposé dans le cas linéaire. De même si f est décroissante on peut facilement vérifier que le choix $g(u_i^n, u_{i+1}^n) = f(u_{i+1}^n)$ convient.

Schéma à décomposition de flux Le schéma à décomposition de flux, appelé aussi "flux splitting" en anglais, consiste comme le nom l'indique à décomposer $f = f_1 + f_2$, où f_1 est croissante et f_2 décroissante, et à prendre pour g :

$$g(u_i^n, u_{i+1}^n) = f_1(u_i^n) + f_2(u_{i+1}^n)$$

Schéma de Lax Friedrich Le schéma de Lax Friedrich consiste à modifier le schéma centré de manière à le rendre stable. On écrit donc :

$$g(u_i^n, u_{i+1}^n) = \frac{1}{2}(f(u_i^n) + f(u_{i+1}^n)) + D(u_i^n - u_{i+1}^n)$$

où $D \geq 0$ est il faut avoir D suffisamment grand pour que g soit croissante par rapport à la première variable et décroissante par rapport à la seconde variable.

Schéma de Godunov Le schéma de Godunov¹ est un des schémas les plus connus pour les équations hyperboliques non linéaires. De nombreux schémas pour les systèmes ont été inspirés par ce schéma. Le flux numérique du schéma de Godunov s'écrit :

$$g(u_i^n, u_{i+1}^n) = f(w_R(u_i^n, u_{i+1}^n)) \tag{6.5.37}$$

où $w_R(u_i^n, u_{i+1}^n)$ est la solution en 0 du problème de Riemann avec conditions u_i^n, u_{i+1}^n , qui s'écrit :

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0 \\ u_0(x) = \begin{cases} u_g = u_i^n & w < 0 \\ u_d = u_{i+1}^n & w > 0 \end{cases} \end{cases}$$

On peut montrer que le flux de Godunov (6.5.37) vérifie les conditions de la définition 6.31.

1. Sergei K. Godunov est un mathématicien russe né en 1929, membre de l'Académie des Sciences russe, en poste au Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Sibérie

6.5. SCHEMAS POUR LES EQUATIONS NON LINEAIRES SHAPITRE 6. PROBLEMES HYPERBOLIQUES

Schéma de Murman Une manière de simplifier le schéma de Godunov est de remplacer la résolution du problème de Riemann linéaire. On prend alors $g(u_i^n, u_{i+1}^n) = f(\tilde{w}_R(u_i^n, u_{i+1}^n))$ où $\tilde{w}_R(u_i^n, u_{i+1}^n)$ est solution de

$$\begin{cases} u_t + \alpha u_x = 0 \\ u_0(x) = \begin{cases} u_i^n & x < 0 \\ u_{i+1}^n & x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Comme le problème est linéaire, la solution de ce problème est connue : $u(x, t) = u_0(x - \alpha t)$. Le schéma est donc très simple, malheureusement, le schéma de Murman n'est pas un schéma monotone (voir exercice (69), car le flux n'est pas monotone par rapport aux deux variables. De fait on peut montrer que les solutions approchées peuvent converger vers des solutions non entropiques. On peut alors envisager une procédure "correction d'entropie"...

Théorème 6.33 (Stabilité et convergence) Soit $(u_i^n)_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{N}}}$ donnée par le schéma

$$\begin{cases} h_i \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_{i-1}^n, u_i^n) = 0 \\ u_i^0 = \frac{1}{h_i} \int_{K_i} u_0(x) dx \end{cases}$$

On suppose que g est un flux monotone au sens de la définition 6.31. On suppose de plus que :

$$k \leq \frac{\alpha h}{2M}, \text{ et } \alpha h \leq h_i \leq h, \forall i,$$

où M est la constante de Lipschitz de g sur $[A, B]$, et A et B sont tels que $A \leq u_0(x) \leq B$ p.p.. On a alors $A \leq u_i^n \leq B$ p.p., et $\|u_{\tau, k}\| \leq \|u_0\|_\infty$. Sous les mêmes hypothèses, si on note $u_{\tau, k}$ la solution approchée définie par (6.3.16), alors

$u_{\tau, k}$ tend vers u , solution entropique de (6.4.17) dans $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ lorsque h (et k) tend vers 0.

6.6 Exercices**Exercice 58 (Problème linéaire en dimension 1)** *Corrigé en page 239*

Calculer la solution faible du problème :

$$\begin{cases} u_t - 2u_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases} \quad (6.6.38)$$

1. Tracer sur un graphique la solution à $t = 0$ et à $t = 1$, en fonction de x . Cette solution faible est-elle solution classique de (6.6.38) ?

2. Même question en remplaçant la condition initiale par $u(x, 0) = \sin x$.

Exercice 59 (Problème linéaire en dimension 2) *Suggestions en page 239, Corrigé en page 239*

Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ et soit $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div}(\mathbf{v}u) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (6.6.39)$$

Calculer la solution du problème (6.6.39) en tout point $(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$.

Exercice 60 (Schéma de Lax-Wendroff) *Corrigé en page 239*

Soit $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $T > 0$, et $a > 0$. On considère le problème suivant :

$$\partial_t u(x, t) + a \partial_x u(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \in [0, T], \quad (6.6.40a)$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (6.6.40b)$$

Ce problème admet une et une seule solution classique, notée u . On se donne un pas de temps constant k , avec $k = \frac{T}{N+1}$ ($N \in \mathbb{N}$). On se donne également un pas d'espace constant h , et des points de discrétisation en espace, $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ tels que $x_{i+1} - x_i = h$ pour tout i . On pose $t_n = nk$, pour $n \in \{0, \dots, N+1\}$. On cherche une approximation de $u(x_j, t_n)$ pour $n \in \{0, \dots, N+1\}$ et $i \in \mathbb{Z}$. On pose $\lambda = \frac{ak}{h}$.

1. Montrer que la solution u de (6.6.40) satisfait :

Pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u(x_j, t_{n+1}) = u(x_j, t_n) - ak \partial_x u(x_j, t_n) + \frac{1}{2} a^2 k^2 \partial_{xx}^2 u(x_j, t_n) + k^3 \varepsilon(k), \quad \text{avec } \varepsilon(k) \rightarrow 0 \text{ lorsque } k \rightarrow 0, \quad (6.6.41)$$

et

$$u(x_j, t_{n+1}) = u(x_{j-1}, t_n) \text{ si } \lambda = 1. \quad (6.6.42)$$

2. Montrer pourquoi l'égalité (6.6.41) suggère le schéma suivant, dit de Lax-Wendroff :

$$\begin{cases} u_j^{(n+1)} = u_j^{(n)} - \frac{1}{2} \lambda (u_{j+1}^{(n)} - u_{j-1}^{(n)}) + \frac{1}{2} \lambda^2 (u_{j+1}^{(n)} - 2u_j^{(n)} + u_{j-1}^{(n)}), & j \in \mathbb{Z}, n > 0, \\ u_j^{(0)} = u_0(x_j); & j \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (6.6.43)$$

avec $u_j^{(0)} = u_0(x_j)$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. Donner l'ordre de consistance du schéma (distinguer les cas $\lambda \neq 1$ et $\lambda = 1$).

3. On prend comme condition initiale $u^0(x) = e^{ipx}$, pour $p \in \mathbb{Z}$ fixé (avec $i^2 = -1$). Pour $j \in \mathbb{Z}$, calculer la valeur $u_j^{(1)}$ donnée par le schéma (6.6.43) en fonction de $u_j^{(0)}$ et en déduire le facteur d'amplification ξ_p , tel que $u_j^{(1)} = \xi_p u_j^{(0)}$.

Montrer que le schéma est stable au sens de Von Neumann sous condition de CFL.

4. Montrer par un contre exemple que si $\lambda \neq 1$, le schéma n'est pas stable pour la norme L^∞ . [On pourra par exemple prendre $u_j^{(0)} = 0$ pour $j < 0$, $u_j^{(0)} = 1$ pour $j \geq 0$, et calculer $u_0^{(1)}$ et montrer ainsi que le schéma est instable si $\lambda < 1$, et chercher ensuite un contre-exemple pour le cas $\lambda \geq 1$.]

Exercice 61 (Stabilité du schéma amont dans le cas linéaire) *Corrigé en page 240*

On considère le problème hyperbolique linéaire (6.3.9), avec $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, dont on calcule une solution approchée par le schéma volumes finis amont (6.3.15). Montrer que ce schéma est stable pour les normes L^1 , L^2 et L^∞ , c.à.d. que la solution approchée satisfait les propriétés suivantes :

1. $\|u_{\mathcal{T},k}(\cdot, n)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})}, \forall n \in \mathbb{N}$,
2. $\|u_{\mathcal{T},k}(\cdot, n)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}, \forall n \in \mathbb{N}$,
3. $\|u_{\mathcal{T},k}(\cdot, n)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \forall n \in \mathbb{N}$,

où $u_{\mathcal{T},k}$ désigne la solution approchée calculée par le schéma (voir (6.3.16)).

Exercice 62 (Convergence des schémas DFDA et VFDA dans le cas linéaire)

Corrigé en page 240

Soit $u_0 \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $T \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que u_0, u'_0 et u''_0 sont bornées (sur \mathbb{R}). On considère le problème suivant :

$$u_t(x, t) + u_x(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T], \quad (6.6.44)$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (6.6.45)$$

Ce problème admet une et une seule solution classique, notée u . On se donne un pas de temps, k , avec $k = \frac{T}{N+1}$ ($N \in \mathbb{N}$), et des points de discrétisation en espace, $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. On pose $t_n = nk$, pour $n \in \{0, \dots, N+1\}$, et $h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i$, pour $i \in \mathbb{Z}$. On note $\bar{u}_i^n = u(t_n, x_i)$ (pour $n \in \{0, \dots, N+1\}$ et $i \in \mathbb{Z}$), et on cherche une approximation de \bar{u}_i^n .

1. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On suppose que, pour un certain $h \in \mathbb{R}$, $\alpha h \leq h_{i+\frac{1}{2}} \leq \beta h$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$. On considère, dans cette question le schéma suivant, appelé DFDA (pour Différences Finies Décentré Amont) :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + \frac{1}{h_{i-\frac{1}{2}}}(u_i^n - u_{i-1}^n) = 0, \quad n \in \{0, \dots, N\}, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (6.6.46)$$

$$u_i^0 = u_0(x_i), \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (6.6.47)$$

(a) (Stabilité) Montrer que $k \leq \alpha h \Rightarrow \inf(u_0) \leq u_i^n \leq \sup(u_0), \forall n \in \{0, \dots, N+1\}, \forall i \in \mathbb{Z}$.

(b) (Convergence) Montrer que, si $k \leq \alpha h$, on a :

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} |u_i^n - \bar{u}_i^n| \leq CT(k + h), \quad \forall n \in \{0, \dots, N+1\},$$

où C ne dépend que de u_0 et β .

2. On suppose maintenant que x_i est le centre de la maille $M_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$, pour $i \in \mathbb{Z}$. On pose $h_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On suppose que, pour un certain $h \in \mathbb{R}$, $\alpha h \leq h_i \leq \beta h$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$. On considère, dans cette question le schéma suivant, appelé VFDA (pour Volumes Finis Décentré Amont) :

$$h_i \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + (u_i^n - u_{i-1}^n) = 0, \quad n \in \{0, \dots, N\}, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (6.6.48)$$

$$u_i^0 = \frac{1}{h_i} \int_{M_i} u_0(x) dx, \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (6.6.49)$$

- (a) (Stabilité) Montrer que $k \leq \alpha h \Rightarrow \inf(u_0) \leq u_i^n \leq \sup(u_0), \forall n \in \{0, \dots, N+1\}, \forall i \in \mathbb{Z}$.
 (b) Etudier la consistance du schéma au sens DF.
 (c) (Convergence) On pose $\bar{u}_i^n = u(t_n, x_{i+\frac{1}{2}})$. Montrer que, si $k \leq \alpha h$, on a :

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} |u_i^n - \bar{u}_i^n| \leq C_1(k+h), \quad \forall n \in \{0, \dots, N+1\},$$

où C_1 ne dépend que de u_0, β et T . En déduire que :

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} |u_i^n - \bar{u}_i^n| \leq C_2(k+h), \quad \forall n \in \{0, \dots, N+1\},$$

où C_2 ne dépend que de u_0, β et T .

Exercice 63 (Eq. lin., sol. faible, conv. des schémas VFDA et DFDA, méthode VF)

Corrigé en page 242

Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et $T \in \mathbb{R}_+^*$. On considère le problème suivant :

$$u_t(x, t) + u_x(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T], \quad (6.6.50)$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (6.6.51)$$

Ce problème admet une et une seule solution faible, notée u . On se donne un pas de temps, k , avec $k = \frac{T}{N+1}$ ($N \in \mathbb{N}$), et on pose $t_n = nk$, pour $n \in \{0, \dots, N+1\}$; On se donne des points de discrétisation en espace, $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, et on suppose que x_i est le centre de la maille $M_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$, pour $i \in \mathbb{Z}$. On pose $h_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ et $h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On suppose que, pour un certain $h \in \mathbb{R}$, $\alpha h \leq h_i \leq \beta h$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$. On considère le schéma (6.6.48),(6.6.49) (schéma "VFDA").

1. (Stabilité L^∞) Montrer que $k \leq \alpha h \Rightarrow |u_i^n| \leq \|u_0\|_\infty, \forall n \in \{0, \dots, N+1\}, \forall i \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que, pour tout $n = 0, \dots, N$, on a $u_i^n \rightarrow 0$ lorsque $i \rightarrow +\infty$ ou $i \rightarrow -\infty$.
3. (Estimation "BV faible") Soient $\zeta > 0$. Montrer que :

$$k \leq (1 - \zeta)\alpha h \Rightarrow \sum_{n=0, \dots, N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} k(u_i^n - u_{i-1}^n)^2 \leq C(\zeta, u_0),$$

où $C(\zeta, u_0)$ ne dépend que de ζ et u_0 (multiplier (6.6.48) par ku_i^n et sommer sur i et n .)

4. (convergence) On pose $\mathcal{T} = (M_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ et on définit la solution approchée sur $[0, T] \times \mathbb{R}$, notée $u_{\mathcal{T}, k}$, donnée par (6.6.48),(6.6.49), par $u_{\mathcal{T}, k}(t, x) = u_i^n$, si $x \in M_i$ et $t \in [t_n, t_{n+1}[$.

On admet que $u_{\mathcal{T}, k} \rightarrow u$, pour la topologie faible- \star de $L^\infty([0, T] \times \mathbb{R})$, quand $h \rightarrow 0$, avec $k \leq (1 - \zeta)\alpha h$ (ζ fixé). Montrer que u est la solution faible de (6.6.50)-(6.6.51).

Remarque 6.34 (VF, DF et convergence forte) On peut montrer le même résultat avec (6.6.46) au lieu de (6.6.48). On peut aussi montrer (cf. la suite du cours...) que la convergence est forte dans $L^p_{loc}([0, T[\times \mathbb{R})$, pour tout $p < \infty$.

Exercice 64 (Construction d'une solution faible) Corrigé en page 245

1/ Construire une solution faible du problème

$$\begin{cases} u_t + (u^2)_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 - x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{cases}$$

2/ Même question (mais nettement plus difficile...) pour le problème

$$\begin{cases} u_t + (u^2)_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{cases}$$

Exercice 65 (Problème de Riemann)

Soit f la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $f(s) = s^4$. Soit u_d et u_g des réels. Calculer la solution entropique du problème de Riemann (6.4.30) avec données u_d et u_g en fonction de u_d et u_g .

Exercice 66 (Non unicité des solutions faibles) Corrigé en page 246

On considère l'équation

$$\begin{cases} u_t + (u^2)_x = 0 \\ u(0, x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0 \\ u_d & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (6.6.52)$$

avec $u_g < u_d$.

1. Montrer qu'il existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tel que si $\begin{cases} u(t, x) = u_g & \text{si } x < \sigma t \\ u(t, x) = u_d & \text{si } x > \sigma t \end{cases}$ alors u est solution faible de (6.6.52). Vérifier que u n'est pas solution entropique de (6.6.52).

2. Montrer que u définie par :

$$\begin{cases} u(t, x) = u_g & \text{si } x < 2u_g t \\ u(t, x) = \frac{x}{2t} & \text{si } 2u_g t \leq x \leq 2u_d t \\ u(t, x) = u_d & \text{si } x > 2u_d t \end{cases} \quad (6.6.53)$$

alors u est solution faible entropique de (6.6.52).

Exercice 67 (Problème de Riemann)

1. Déterminer la solution entropique de (6.4.30) dans le cas où f est strictement concave.
2. On se place dans le cas où f est convexe puis concave : plus précisément, on considère $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec
 - (i) $f(0) = 0$, $f'(0) = f'(1) = 0$
 - (ii) $\exists a \in]0, 1[$, tel que f est strictement convexe sur $]0, a[$, f est strictement concave sur $]a, 1[$.

On supposera de plus $u_g = 1$, $u_d = 0$.

(a) Soit b l'unique élément $b \in]a, 1[$ tel que $\frac{f(b)}{b} = f'(b)$; montrer que u définie par :

$$\begin{cases} u(t, x) = 1 & \text{si } x \leq 0 \\ u(t, x) = \xi & \text{si } x = f'(\xi)t, b < \xi < 1 \\ u(t, x) = 0 & \text{si } x > f'(b)t \end{cases}$$

est la solution faible entropique de (6.4.30) (sous les hypothèses précédentes).

(b) Construire la solution entropique du problème de Riemann dans le cas $f(u) = \frac{u^2}{u^2 + \frac{(1-u)^2}{4}}$ et $u_g, u_d \in [0, 1]$. [Compliqué. On distinguera plusieurs cas.]

Exercice 68 (Stabilité de schémas numériques) *Corrigé en page 246*

Soient $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. On considère le problème suivant :

$$u_t(x, t) + (f(u))_x(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \in [0, T], \quad (6.6.54)$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (6.6.55)$$

On utilise ci dessous les notations du cours. On discrétise le problème (6.6.54),(6.6.55) par l'un des schémas vu en cours ("Flux-splitting", "Godunov", "Lax-Friedrichs modifié" et "Murman"). Montrer qu'il existe M (dépendant de la fonction "flux numérique" et de u_0) tel que $k \leq Mh_i$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, implique :

- $\|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^n\|_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (Plus difficile) $\sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_{i+1}^n - u_i^n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (Cette estimation n'est intéressante que si $\sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_{i+1}^0 - u_i^0| < \infty$, ce qui n'est pas toujours vrai pour $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Cela est vrai si u_0 est une fonction à "variation bornée".)

Exercice 69 (Schéma de Murman) *Corrigé en page 247*

Soient $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. On suppose que $A \leq u_0 \leq B$, p.p. sur \mathbb{R} . On s'intéresse au problème suivant :

$$u_t(x, t) + (f(u))_x(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+, \quad (6.6.56)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (6.6.57)$$

Pour discrétiser le problème (6.6.56)-(6.6.57), on se donne un pas d'espace $h > 0$ et un pas de temps $k > 0$. On pose $M_i =]ih, ih + h[$ et on note u_i^n l'approximation recherchée de la solution exacte dans la maille M_i à l'instant nk . On considère le schéma de Murmann :

$$h \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + (f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i-\frac{1}{2}}^n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{Z}, \quad (6.6.58)$$

$$u_i^0 = \frac{1}{h} \int_{M_i} u_0(x) dx, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (6.6.59)$$

avec $f_{i+\frac{1}{2}}^n = g(u_i^n, u_{i+1}^n)$ et $g \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par :

$g(a, a) = f(a)$ et, pour $a \neq b$,

$$g(a, b) = \begin{cases} f(a) & \text{si } \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq 0, \\ f(b) & \text{si } \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < 0. \end{cases}$$

1. (Stabilité) Montrer qu'il existe M , ne dépendant que de f , A et B (on donnera la valeur de M en fonction de f , A et B) t.q. pour $k \leq Mh$ on ait :
 - (a) (Stabilité L^∞) $A \leq u_i^n \leq B$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $i \in \mathbb{Z}$,
 - (b) (Stabilité BV) $\sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_{i+1}^n - u_i^n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (Cette estimation n'est intéressante que si $\sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_{i+1}^0 - u_i^0| < \infty$, ce qui n'est pas toujours vrai pour $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Cela est vrai si u_0 est une fonction à "variation bornée".)
2. On prend, dans cette question, $f(s) = s^2$.
 - (a) (Non monotonie) Montrer que si $A < 0$ et $B > 0$, la fonction g n'est pas "croissante par rapport à son premier argument et décroissante par rapport à son deuxième argument" sur $[A, B]^2$.
 - (b) (Exemple de non convergence) Donner un exemple de non convergence du schéma. Plus précisément, donner u_0 t.q., pour tout $h > 0$ et tout $k > 0$, on ait $u_i^n = u_i^0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ (la solution discrète est donc "stationnaire") et pourtant $u(\cdot, T)$ (u est la solution exacte de (6.6.56)-(6.6.57)) est différent de u_0 pour tout $T > 0$ (la solution exacte n'est donc pas stationnaire).
3. (Schéma "ordre 2", question plus difficile) Pour avoir un schéma "plus précis", on pose maintenant $p_i^n = \min\left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h}, 2\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h}, 2\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h}\right)$ et on remplace, dans le schéma précédent, $f_{i+\frac{1}{2}}^n = g(u_i^n, u_{i+1}^n)$ par $f_{i+\frac{1}{2}}^n = g(u_i^n + (h/2)p_i^n, u_{i+1}^n - (h/2)p_{i+1}^n)$. Reprendre les 2 questions précédentes (c'est à dire : "Stabilité L^∞ ", "Stabilité BV", "non monotonie" et "Exemple de non convergence").

Exercice 70 (Flux monotones)

Soient $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$; on considère l'équation hyperbolique non linéaire (6.4.17) qu'on rappelle :

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (6.6.60)$$

On se donne un maillage $(]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[)_{i \in \mathbb{Z}}$ de \mathbb{R} et $k > 0$ et, pour $i \in \mathbb{Z}$, on définit une condition initiale approchée : $u_i^0 = \frac{1}{h_i} \int u_0(x) dx$, avec $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$.

Pour calculer la solution entropique de l'équation (6.4.17), on considère un schéma de type volumes finis explicite à trois points, défini par un flux numérique g , fonction de deux variables.

1. Ecrire le schéma numérique (i.e. donner l'expression de u_i^{n+1} en fonction des $(u_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$).
2. On suppose dans cette question que le flux g est monotone et lipschitzien en ses deux variables, c.à.d. qu'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $|g(x, z) - g(y, z)| \leq M|x - y|$ et $|g(x, y) - g(x, z)| \leq M|y - z|$. Montrer que le schéma numérique de la question précédente peut s'écrire sous la forme

$$u_i^{n+1} = H(u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n)$$

où H est une fonction croissante de ses trois arguments si k satisfait une condition de type $k \leq Ch_i$ pour tout i , où C est une constante à déterminer.

3. Montrer que si la fonction g est croissante par rapport à son premier argument et décroissant par rapport au second, et si $a, b \in \mathbb{R}$ sont tels que $a \leq b$, alors $g(a, b) \leq g(\xi, \xi)$ pour tout $\xi \in [a, b]$.
4. En déduire que si le flux g est monotone, alors il vérifie la propriété suivante :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} g(a, b) \leq \min_{s \in [a, b]} f(s) \text{ si } a \leq b \\ g(a, b) \geq \max_{s \in [a, b]} f(s) \text{ si } a \geq b. \end{cases}$$

5. Soit g un flux monotone qui est tel que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, il existe $u_{a,b}$ dans l'intervalle d'extrémités a et b , tel que $g(a, b) = f(u_{a,b})$. Montrer que

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} g(a, b) = \min_{s \in [a, b]} f(s) & \text{si } a \leq b \\ g(a, b) = \max_{s \in [b, a]} f(s) & \text{si } a \geq b. \end{cases}$$

Exercice 71 (Schémas pour les problèmes hyperboliques)

Soient $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $T > 0$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$; on cherche une approximation de la solution de l'équation hyperbolique avec condition initiale :

$$u_t(x, t) + (f(u))_x(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T], \quad (6.6.61)$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (6.6.62)$$

On note h (resp. $k = \frac{1}{N+1}$) le pas (constant, pour simplifier) de la discrétisation en espace (resp. en temps), et u_i^n la valeur approchée recherchée de u au temps nk dans la maille $M_i = [(i - \frac{1}{2})h, (i + \frac{1}{2})h]$, pour $n \in \{0, \dots, N+1\}$ et $i \in \mathbb{Z}$. On considère le schéma obtenu par une discrétisation par volumes finis explicite à trois points :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + \frac{1}{h}(f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i-\frac{1}{2}}^n) = 0, \quad n \in \{0, \dots, N+1\}, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (6.6.63)$$

$$u_i^0 = \frac{1}{h} \int_{M_i} u_0(x) dx, \quad (6.6.64)$$

avec $f_{i+\frac{1}{2}}^n = g(u_i^n, u_{i+1}^n)$, où $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Montrer que le schéma (6.6.63),(6.6.64) possède la propriété de "consistance des flux" ssi g est telle que :

$$g(s, s) = f(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (6.6.65)$$

2. Montrer que le schéma, vu comme un schéma de différences finies, est, avec la condition (6.6.65), d'ordre 1 (c.à.d. que l'erreur de consistance est majorée par $C(h+k)$, où C ne dépend que de f et de la solution exacte, que l'on suppose régulière). Montrer que si le pas d'espace est non constant, la condition (6.6.65) est (en général) insuffisante pour assurer que le schéma (6.6.63),(6.6.64) (convenablement modifié) est consistant au sens des différences finies, et que le schéma est alors d'ordre 0.
3. On étudie, dans cette question, le schéma de Godunov, c.à.d. qu'on prend :

$$g(u_g, u_d) = f(u_{u_g, u_d}(0, t)),$$

où u_{u_g, u_d} est la solution du problème de Riemann :

$$u_t(x, t) + (f(u))_x(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \quad (6.6.66)$$

$$u(x, 0) = u_g \text{ si } x < 0, \quad (6.6.67)$$

$$u(x, 0) = u_d \text{ si } x > 0. \quad (6.6.68)$$

(a) Montrer que le schéma (6.6.63), (6.6.64) peut s'écrire :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + C_i(u_{i+1}^n - u_i^n) + D_i(u_{i-1}^n - u_i^n),$$

$$\text{avec : } C_i = \frac{k}{h} \frac{f(u_i^n) - g(u_i^n, u_{i+1}^n)}{u_{i+1}^n - u_i^n} \geq 0 \text{ et } D_i = \frac{k}{h} \frac{g(u_{i-1}^n, u_i^n) - f(u_i^n)}{u_{i-1}^n - u_i^n} \geq 0.$$

(b) On pose $A = \|u_0\|_\infty$, $M = \sup_{s \in [-A, A]} |f'(s)|$, et h le pas (constant) d'espace. On suppose que k et h vérifient la condition de CFL :

$$k \leq \frac{h}{2M}.$$

On note u^n la fonction définie par : $u^n(x) = (u_i^n)$ si $x \in M_i$; montrer que :

$$\text{– Stabilité } L^\infty : \|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^n\|_\infty (\leq \dots \leq \|u^0\|_\infty), \forall n \in \{0, \dots, N+1\}. \quad (E1)$$

$$\text{– Stabilité } BV : \|u^{n+1}\|_{BV} \leq \|u^n\|_{BV} (\leq \dots \leq \|u^0\|_{BV}), \forall n \in \{0, \dots, N+1\}. \quad (E2)$$

On rappelle que, comme u_n est une fonction constante par morceaux, on a :

$$\|u^n\|_{BV} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_{i+1}^n - u_i^n|.$$

(c) Remarque : on peut montrer (ce n'est pas facile) que si on a la condition "CFL" le schéma de Godunov converge.

4. On suppose maintenant $f(u) = au$, $a \in \mathbb{R}$, et on prend $g(\lambda, \mu) = \frac{\lambda + \mu}{2}$ (schéma centré).

Montrer que pour tous $k, h > 0$, les conditions (E1) et (E2) sont fausses, c.à.d. qu'il existe $u_0 \in L^\infty \cap BV$ t.q. $\|u^1\|_\infty \not\leq \|u_0\|_\infty$, et $\|u_1\|_{BV} \not\leq \|u_0\|_{BV}$.

5. On étudie maintenant un schéma de type "MUSCL", i.e. On prend dans le schéma (6.6.63) $f_{i+\frac{1}{2}}^n = f(u_i^n + \frac{h}{2} p_i^n)$, où :

$$p_i^n = \begin{cases} \frac{\varepsilon_i^n}{2h} \min(|u_{i+1}^n - u_{i-1}^n|, 4|u_{i+1}^n - u_i^n|, 4|u_i^n - u_{i-1}^n|), & \text{où } \varepsilon_i^n = \text{sign}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \\ & \text{si } \text{sign}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) = \text{sign}(u_{i+1}^n - u_i^n) = \text{sign}(u_i^n - u_{i-1}^n) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Montrer que $\frac{1}{h}(f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i-\frac{1}{2}}^n)$ est une approximation d'ordre 2 de $(f(u))_x(x_i, t_n)$ aux points où $u \in C^2$ et $u_x \neq 0$.

(b) Montrer que sous une condition de type $k \leq Ch$, où C ne dépend que de u_0 et f , les conditions de stabilité (E1) et (E2) sont vérifiées.

Exercice 72 (Éléments finis pour une équation hyperbolique)

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $u_0 \in C(\mathbb{R})$ t.q. u_0 bornée; on considère la loi de conservation scalaire suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}(f(u))(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (6.6.69)$$

avec la condition initiale :

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (6.6.70)$$

On se donne un pas de discrétisation en temps constant k , on note $t_n = nk$ pour $n \in \mathbb{N}$, et on cherche à approcher $u(\cdot, t_n)$. On note $u^{(n)}$ la solution approchée recherchée.

1. Montrer qu'une discrétisation par le schéma d'Euler explicite en temps amène au schéma en temps suivant :

$$\frac{1}{k}(u^{(n+1)} - u^{(n)}) + \frac{\partial}{\partial x}(f(u^{(n)}))(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad (6.6.71)$$

$$u^0(x) = u_0(x). \quad (6.6.72)$$

On cherche à discrétiser (6.6.71) par une méthode d'éléments finis. On se donne pour cela une famille de points $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$, avec $x_i < x_{i+1}$.

2. On introduit les fonctions de forme P_1 , notées $\Phi_i, i \in \mathbb{Z}$, des éléments finis associés au maillage donné par la famille de points $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$; on effectue un développement de Galerkin de $u^{(n)}$ sur ces fonctions de forme dans (6.6.71) et (6.6.72); on multiplie l'équation ainsi obtenue par chaque fonction de forme, et on approche le terme $f(\sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j^{(n)} \Phi_j)$ par $\sum_{j \in \mathbb{Z}} f(u_j^{(n)}) \Phi_j$, et on intègre sur \mathbb{R} . Montrer qu'on obtient ainsi un système d'équations de la forme :

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{i,j} \frac{u_j^{(n+1)} - u_j^{(n)}}{k} + \sum_{j \in \mathbb{Z}} b_{i,j} f(u_j^{(n)}) = 0, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (6.6.73)$$

$$u_i^0 = u_0(x_i) \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (6.6.74)$$

(les $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ sont à déterminer).

3. On effectue une "condensation de la matrice de masse", c.à.d. qu'on remplace les $a_{i,j}$ dans (6.6.73) par $\tilde{a}_{i,j}$ avec $\tilde{a}_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $\tilde{a}_{i,i} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{i,j}$. Montrer que le schéma ainsi obtenu est identique à un schéma volumes finis sur le maillage $(K_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ où $K_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$, $x_{i+1/2} = (x_i + x_{i+1})/2$, avec approximation centrée du flux.

4. Montrer que ce schéma est instable, dans un (ou plusieurs) sens à préciser.

5. On remplace le flux numérique centré $F_{i+1/2}$ du schéma volumes finis obtenu à la question 3 par $G_{i+1/2} = F_{i+1/2} + D_{i+1/2}(u_i^{(n)} - u_{i+1}^{(n)})$. Montrer que l'approximation du flux reste consistante et que si les $D_{i+1/2}$ sont bien choisis, le nouveau schéma est stable sous une condition de CFL à préciser.

On considère maintenant la même équation de conservation, mais sur \mathbb{R}^2 (avec $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$, $u_0 \in C(\mathbb{R}^2)$, bornée).

$$u_t(x, t) + \operatorname{div}(f(u))(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (6.6.75)$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (6.6.76)$$

Soit \mathcal{T} un maillage en triangles de \mathbb{R}^2 , admissible pour une discrétisation par éléments finis P_1 . Soit \mathcal{S} l'ensemble des noeuds de ce maillage et $(\Phi_j)_{j \in \mathcal{S}}$ la famille des fonctions de forme éléments finis bilinéaires P_1 . En conservant la même discrétisation en temps, on cherche une approximation de $u(\cdot, t_n)$ dans l'espace engendré par les fonctions Φ_j .

6. Montrer qu'en suivant la même démarche qu'aux questions 2 et 3, on aboutit au schéma :

$$\frac{u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}}{k} \int_{\mathbb{R}^2} \Phi_i(x) dx - \sum_{j \in \mathcal{S}} f(u_j^{(n)}) \cdot \int_{\mathbb{R}^2} \Phi_j(x) \nabla \Phi_i(x) dx = 0, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (6.6.77)$$

7. Montrer que ce schéma peut encore s'écrire :

$$\frac{u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}}{k} \int_{\mathbb{R}^2} \Phi_i(x) dx + \sum_{j \in \mathcal{S}} E_{i,j} = 0, \quad (6.6.78)$$

avec

$$E_{i,j} = \frac{1}{2}(f(u_i^{(n)}) + f(u_j^{(n)})) \cdot \int_{\mathbb{R}^2} (\Phi_i(x) \nabla \Phi_j(x) - \Phi_j(x) \nabla \Phi_i(x)) dx.$$

Montrer que ce schéma est instable.

8. Dans le schéma (6.6.78), on remplace $E_{i,j}$ par

$$\tilde{E}_{i,j}^n = E_{i,j}^n + D_{i,j}(u_i^n - u_j^n),$$

où $D_{i,j} = D_{j,i}$ (pour que le schéma reste conservatif). Montrer que pour un choix judicieux de $D_{i,j}$, le schéma ainsi obtenu est à flux monotone et stable sous condition de CFL.

6.7 Suggestions pour les exercices

Exercice 59 page 229

Chercher les solutions sous la forme $u(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)$.

6.8 Corrigés des exercices

Exercice 58 page 229

1. En appliquant les résultats de la section 6.2 page 208, la solution faible du problème s'écrit $u(x, t) = u_0(x + 2t)$, pour $x \in \mathbb{R}$, et $t \in \mathbb{R}_+$, c.à.d.

$$\begin{cases} u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -2t, \\ 1 & \text{si } x > -2t. \end{cases} \end{cases} \quad (6.8.79)$$

La représentation graphique de la solution à $t = 0$ et à $t = 1$, en fonction de x est donnée en Figure 6.7. Cette

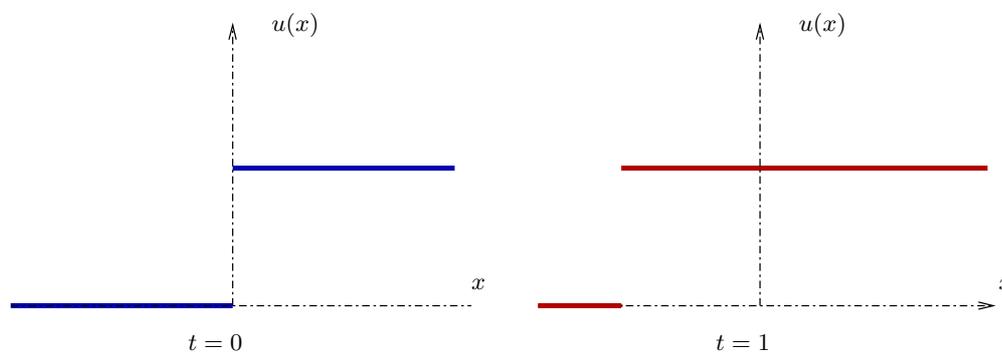


FIGURE 6.7 – Représentation graphique de la solution

solution faible n'est pas solution classique de (6.8.79) car elle n'est pas continue, donc ses dérivées en temps et espace ne sont pas définies partout.

2. Dans le cas où $u_0(x) = \sin x$, la solution faible du problème s'écrit $u(x, t) = \sin(x + 2t)$, pour $x \in \mathbb{R}$, et $t \in \mathbb{R}_+$, et cette solution est régulière, donc solution classique.

Exercice 59 page 229

Pour $(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, on pose $u(x, t) = u_0(x - \mathbf{v}t)$. Comme $u_0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a $u \in C^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$; on peut donc calculer les dérivées partielles de u par rapport à au temps t , qu'on notera $\partial_t u$ et par rapport aux deux variables d'espace x_1 et x_2 , qu'on notera $\partial_1 u$ et $\partial_2 u$. On a : $\partial_t u(x, t) = \nabla u_0(x - \mathbf{v}t) \cdot \mathbf{v}$. Or $\text{div}(\mathbf{v}u) = \mathbf{v} \cdot \nabla u$ car \mathbf{v} est constant, et $\nabla u = \nabla u_0$. On en déduit que $u_t(x, t) + \text{div}(\mathbf{v}u)(x, t) = 0$, et donc u est solution (classique) de (6.6.39).

Exercice 60 page 229

Corrigé en cours d'élaboration

Exercice 61 page 230 (Stabilité du schéma amont dans le cas linéaire)

On considère le problème hyperbolique linéaire (6.3.9), avec $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, dont on calcule une solution approchée par le schéma volumes finis amont (6.3.15). Montrer que ce schéma est stable pour les normes L^2 et L^∞ , c.à.d. que la solution approchée satisfait les propriétés suivantes :

1. $\|u_{\mathcal{T},k}(\cdot, n)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}, \forall n \in \mathbb{N}$,
2. $\|u_{\mathcal{T},k}(\cdot, n)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \forall n \in \mathbb{N}$,

où $u_{\mathcal{T},k}$ désigne la solution approchée calculée par le schéma (voir (6.3.16)).

Le schéma (6.3.15) s'écrit encore :

$$h_i(u_i^{n+1} - u_i^n) = k(u_i^n - u_{i-1}^n).$$

Multiplions par u_i^{n+1} . On obtient :

$$\frac{1}{2}h_i(u_i^{n+1} - u_i^n)^2 + \frac{1}{2}h_i(u_i^{n+1})^2 - \frac{1}{2}h_i(u_i^n)^2 + k(u_i^{n+1} - u_i^n)(u_i^n - u_{i-1}^n) + k u_i^n (u_i^n - u_{i-1}^n) = 0.$$

Exercice 62 page 230

1.a) Le schéma numérique s'écrit :

$$u_i^{n+1} = \left(1 - \frac{k}{h_{i-\frac{1}{2}}}\right)u_i^n + \frac{k}{h_{i-\frac{1}{2}}}u_{i-1}^n \quad (6.8.80)$$

Comme $k \leq \alpha h \leq h_{i-\frac{1}{2}}$ on a $\frac{k}{h_{i-\frac{1}{2}}} \in [0, 1]$ On a donc

$$\min(u_i^n, u_{i-1}^n) \leq u_i^{n+1} \leq \max(u_i^n, u_{i-1}^n)$$

d'où on déduit que

$$\min_j(u_j^n) \leq u_i^{n+1} \leq \max_j(u_j^n), \quad \forall i \in \mathbb{Z},$$

puis, par récurrence sur n , que

$$\inf u_0 \leq u_i^n \leq \sup u_0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.b) Par définition de l'erreur de consistance, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n}{k} &= u_t(x_i, tn) + R_i^n, \text{ où } |R_i^n| \leq \|u_{tt}\|_\infty k, \\ \frac{\bar{u}_i^n - \bar{u}_{i-1}^n}{h_{i-\frac{1}{2}}} &= u_x(x_i, tn) + S_i^n, |S_i^n| \leq \|u_{xx}\|_\infty h \cdot \beta \end{aligned}$$

En posant $e_i^n = \bar{u}_i^n - u_i^n$, on a donc

$$\frac{e_i^{n+1} - e_i^n}{k} + \frac{1}{h_{i-\frac{1}{2}}}(e_i^n - e_{i-1}^n) = R_i^n + S_i^n \leq C(u_0, \beta)(h + k),$$

avec $C(u_0, \beta) = \|u_0''\|_\infty \max(\beta, 1)$, car $(u(t, x) = u_0(x, t))$ et donc $\|u_{tt}\|_\infty = \|u_{xx}\|_\infty = \|u_0''\|_\infty$. On pose $C(u_0, \beta) = C$, on obtient alors

$$e_i^{n+1} = \left(1 - \frac{k}{h_{i-\frac{1}{2}}}\right) e_i^n + \frac{k}{h_{i-\frac{1}{2}}} e_{i-1}^n + Ck(h + k)$$

donc $\sup_i |e_i^{n+1}| \leq \sup_j |e_j^n| + Ck(h+k)$. Par récurrence sur n , on en déduit

$$\sup_i |e_i^n| \leq Ckn(h+k) \text{ et donc } \sup_i |e_i^n| \leq CT(h+k) \text{ si } 0 \leq n \leq N+1, \text{ où } (N+1)k = T.$$

2.a) On a $\inf u_0 \leq u_i^0 \leq \sup u_0$ puis, par récurrence :

$$u_i^{n+1} = \left(1 - \frac{k}{h_i}\right)u_i^n + \frac{k}{h_i}u_{i-1}^n.$$

Comme $k \leq \alpha h \leq h_i$ on en déduit comme en 1) a) que :

$$\inf(u_0) \leq u_i^h \leq \sup(u_0).$$

2.b) Consistance

$$\frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n}{k} = u_t(x_i, t_n) + R_i^n, |R_i^n| \leq \|u_{tt}\|_\infty k$$

mais

$$\frac{\bar{u}_i^n - \bar{u}_{i-1}^n}{h_i} = \frac{\bar{u}_i^n - \bar{u}_{i-1}^n}{h_{i-\frac{1}{2}}} \frac{h_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} = [u_x(x_i, t_n) + S_i^n] \frac{h_{i-\frac{1}{2}}}{h}, \text{ avec } |S_i^n| \leq \|u_{xx}\|_\infty \beta h,$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n}{k} + \frac{\bar{u}_i^n - \bar{u}_{i-1}^n}{h_i} &= (u_t + u_x)(x_i, t_n) + R_i^n + S_i^n \frac{h_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} + T_i^n, \\ &= R_i^n + S_i^n \frac{h_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} + T_i^n, \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} |R_i^n| &\leq \|u_{tt}\|_\infty k, \\ \left| \frac{h_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} \right| |S_i^n| &\leq \|u_{xx}\|_\infty \frac{\beta h}{\alpha h} \beta h = \frac{\beta^2}{\alpha} \|u_{xx}\|_\infty h, \\ T_i^n &= u_x(x_i, t_n) \frac{h_{i-\frac{1}{2}} - h_i}{h_i} = u_x(x_i, t_n) \frac{h_{i-1} - h_i}{2h_i}. \end{aligned}$$

En prenant par exemple un pas tel que $h_i = h$ si i est pair et $h_i = h/2$ si i est impair, on voit T_i^n ne tend pas vers 0 lorsque h tend vers 0 ; le schéma apparaît donc comme non consistant au sens des différences finies.

c) Convergence. On a

$$\frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n}{k} = u_t(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n) + R_i^n, |R_i^n| \leq \|u_{tt}\|_\infty k$$

$$\frac{\bar{u}_i^n - \bar{u}_{i-1}^n}{h_i} = u_x(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n) + S_i^n, |S_i^n| \leq \|u_{xx}\|_\infty \beta h$$

donc, avec $f_i^n = \bar{u}_i^n - u_i^n$

$$f_i^{n+1} = \left(1 - \frac{k}{h_i}\right)f_i^n + f_{i-1}^n \left(\frac{k}{h_i}\right) + k(S_i^n + R_i^n)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \sup_i |f_i^{n+1}| &\leq \sup_i |f_i^n| + k \|u''\|_\infty (k + \beta h) \\ &\leq \sup_i |f_i^n| + k C_1 (k + h) \quad C_1 = \|u''\|_\infty \max(\beta, 1), \end{aligned}$$

et par récurrence sur n

$$\sup_i |f_i^n| \leq C_1 n k (k + h) + \|u'_0\|_\infty h \beta$$

car $\sup_i |f_i^0| \leq \|u'_0\|_\infty h \beta$. D'où on déduit que

$$\begin{aligned} \sup_i |f_i^n| &\leq C_1 T (k + h) + \|u'_0\|_\infty \beta h \\ &\leq C_2 (k + h), \quad 0 \leq n \leq N + 1. \end{aligned}$$

avec $C_2 = C_1 T + \beta \|u'_0\|_\infty$. Il reste à remarquer que $|\bar{u}_i^n - \bar{u}_i^{n-1}| \leq \|u'_0\|_\infty \beta h$ pour avoir

$$\sup_i |\bar{u}_i^n - u_i^n| \leq C_3 (h + k) \quad \text{avec}$$

$$C_3 = C_2 + \beta \|u'_0\|_\infty = \|u''_0\|_\infty \max(\beta, 1) T + 2\beta \|u'_0\|_\infty.$$

Exercice 63 page 231

1. On remarque d'abord que $|u_i^0| \in [-\|u_0\|_\infty, \|u_0\|_\infty]$. On a vu à la question 2) a) de l'exercice 62 que $u_i^{n+1} \in [u_i^n, u_{i-1}^n]$ ou $[u_{i-1}^n, u_i^n]$. On en déduit par une récurrence sur n que $u_i^n \in [-\|u_0\|_\infty, \|u_0\|_\infty] \quad \forall i, \forall n \geq 0$.

2. On va utiliser le fait que $u_0 \in L^2$ et montrer la propriété par récurrence sur n . Pour $n = 0$, on a :

$$|u_i^0|^2 \leq \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} (u_0(x))^2 dx \frac{1}{h_i} \rightarrow 0 \text{ lorsque } i \rightarrow \pm\infty \quad (6.8.81)$$

En effet, comme $u_0 1_{[x, x+\eta]} \rightarrow 0$ p.p., $u_0 1_{[x, x+\eta]} \leq u_0 \in L^2$ donc $\int_x^{x+\eta} |u_0|^2 dx \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ par convergence dominée, pour tout $\eta > 0$. De plus, $h \geq \alpha h \Rightarrow \frac{1}{h_i} \leq \frac{1}{\alpha h}$, d'où on déduit que (6.8.81) est vérifiée. On conclut ensuite par une récurrence immédiate sur n , que :

$$|u_i^{n+1}| \leq \max(|u_i^n|, |u_{i-1}^n|) \rightarrow 0 \text{ quand } i \rightarrow \pm\infty. \quad (6.8.82)$$

2. On veut montrer que $\sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} k (u_i^n - u_{i-1}^n)^2 \leq C(\zeta, u_0)$. On multiplie le schéma par $k u_i^n$, on obtient :

$$h_i (u_i^{n+1} - u_i^n) u_i^n + (u_i^n - u_{i-1}^n) k u_i^n = 0,$$

ce qu'on peut réécrire :

$$h_i \left[-\frac{(u_i^{n+1} - u_i^n)^2}{2} + \frac{(u_i^{n+1})^2}{2} - \frac{(u_i^n)^2}{2} \right] + k \left[\frac{(u_i^n - u_{i-1}^n)^2}{2} + \frac{(u_i^n)^2}{2} - \frac{(u_{i-1}^n)^2}{2} \right] = 0.$$

Comme $|u_i^{n+1} - u_i^n| = \frac{k}{h_i} |u_i^n - u_{i-1}^n|$, ceci s'écrit aussi :

$$k \left(1 - \frac{k}{h_i} \right) (u_i^n - u_{i-1}^n)^2 + h_i (u_i^{n+1})^2 - h_i (u_i^n)^2 + k (u_i^n)^2 - k (u_{i-1}^n)^2 = 0,$$

et comme $\frac{k}{h} \leq 1 - \zeta$, on a donc $1 - \frac{k}{h_i} \geq \zeta$ et $\zeta(u_i^n - u_{i-1}^n)^2 + h_i(u_i^{n+1})^2 - h_i(u_i^n)^2 + (u_i^n)^2 - (u_{i-1}^n)^2 \leq 0$ en sommant pour $i \in \{-M, \dots, M\}$, et $h \in \{0, \dots, N\}$, on obtient alors :

$$\zeta \sum_{i=-M}^M \sum_{n=0}^M (u_i^n - u_{i-1}^n)^2 + \alpha h \sum_{n=0}^N (u_M^n)^2 - \beta h \sum_{n=0}^N (u_{-M-1}^n)^2 \leq \sum_{i=-M}^M (u_i^0)^2.$$

En remarquant que

$$k \sum_{i=-M}^M (u_i^0)^2 \leq \sum_{i=-M}^M h_i (u_i^0)^2 \leq \|u_0\|_2^2$$

(voir (6.8.81)) et que $u_{-M}^n \rightarrow 0$ qd $M \rightarrow \infty$ (voir (6.8.82)), on en déduit

$$\zeta k \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^N (u_i^n - u_{i-1}^n)^2 \leq \|u_0\|_2^2,$$

donc $C = \frac{\|u_0\|_2^2}{\zeta}$ convient.

3) (Convergence) Pour montrer la convergence, on va passer à la limite sur le schéma numérique. On aura pour cela besoin du lemme suivant :

Lemme 6.35 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans $L^\infty(\mathbb{R})$. Si $u_n \rightarrow u$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$ pour la topologie faible * lorsque $n \rightarrow +\infty$, (c.à.d

$$\int_{\mathbb{R}} u_n(x) \varphi(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} u(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in L^1(\mathbb{R}),$$

et $v_n \rightarrow v$ dans L^1 lorsque $n \rightarrow +\infty$, alors

$$\int u_n(x) v_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int u(x) v(x) dx.$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} & \left| \int u_n(x) v_n(x) dx - \int u(x) v(x) dx \right| \leq \|u_n\|_\infty \|v_n - v\|_1 + \left| \int u_n(x) v(x) dx - \int u(x) v(x) dx \right| \\ & \leq C \|u_n - v\|_1 + \left| \int u_n(x) v_n(x) dx - \int u(x) v(x) dx \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

car $(u_n)_n$ est bornée dans L^∞ . ■

On multiplie le schéma numérique par $k\varphi_i^n$, $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times [0, T])$ et $\varphi_i^n = \varphi(x, t_n)$, et en somme sur i et n (toutes les sommes sont finies, car φ est à support compact) ; on obtient :

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} k h_i \varphi_i^n + \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{n=1}^N (u_i^n - u_{i-1}^n) k \varphi_i^n = 0.$$

Comme $\varphi_i^n = 0$ si $n \geq N + 1$, on a :

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{n=1}^N h_i u_i^n (\varphi_i^{n-1} - \varphi_i^n) - \sum_i u_i^0 \varphi_i^0 h_i + \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_n (\varphi_i^n - \varphi_{i+1}^n) u_i^n k = 0.$$

Or :

$$\bullet T_1 = \sum_{i \in \mathbb{Z}} u_i^0 \varphi_i^0 h_i = \sum_i \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u_0(x) \varphi_0(x_i) dx \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int u_0 \varphi dx. (\text{avec } \varphi_0 = \varphi(\cdot, 0))$$

car $\sum_i \varphi_0(x_i) 1_{]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[} \rightarrow \varphi(\cdot, 0)$ dans L^1 quand $h \rightarrow 0$.

$$\bullet T_2 = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{n=1} h_i u_i^n \frac{\varphi_i^{n-1} - \varphi_i^n}{k} = - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} u_{\mathcal{T},k} \psi_{\mathcal{T},k} dx dt. \text{ Soit}$$

$$\psi_{\mathcal{T},k}(x, t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{n=1}^N \frac{\varphi_i^{n-1} - \varphi_i^n}{k} 1_{]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[} 1_{]nk, (n+1)k[}.$$

En effet, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, $|\frac{\varphi_i^{n-1} - \varphi_i^n}{k} - \varphi_t(x, t)| \leq k \|\varphi_{tt}\|_\infty$ si $(x, t) \in]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[\times]nk(n+1)k[$, pour $n \geq 1$. On a donc $\psi_{\mathcal{T},k} \rightarrow \varphi_t$ p.p. sur $\mathbb{R} \times]0, T[$. De plus, et $|\psi_{\mathcal{T},k}| \leq \|\varphi_t\|_\infty 1_K$ si $\beta h \leq 1$, où $K = [-a-1, a+1] \times [0, T]$, et a est tel que $\varphi = 0$ sur $([-a, a] \times [0, T])^c$. Donc, par convergence dominée, $\psi_{\mathcal{T},k} \rightarrow -\varphi_t$ dans $L^1(\mathbb{R} \times]0, T[)$ lorsque $k \rightarrow 0$. Comme $u_{\mathcal{T},k}$ converge vers u dans L^1 faiblement *, on en déduit par le lemme 6.35 que :

$$T_2 = - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} u_{\mathcal{T},k}(x, t) \psi_{\mathcal{T},k}(x, t) dx dt \xrightarrow{h, k \rightarrow 0} - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} u(x, t) \varphi_t(x, t) dx dt.$$

$$\bullet T_3 = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varphi_i^n - \varphi_{i+1}^n}{h_i} u_i^n k h_i = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{N}} k \varphi_i^n (u_i^n - u_{i-1}^n) \\ = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{N}} k \varphi_{i-1}^n (u_i^n - u_{i-1}^n) + \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{N}} k (\varphi_i^n - \varphi_{i-\frac{1}{2}}^n) (u_i^n - u_{i-1}^n) = T_4 + T_5, \text{ avec :}$$

$$* T_4 = \sum_i \sum_n k h_i \frac{\varphi_{i-\frac{1}{2}}^n - \varphi_{i+\frac{1}{2}}^n}{h} u_i^n = \int \int u_{\mathcal{T}k}(x) \chi_{\mathcal{T}k}(x) dx$$

$$\chi_{\mathcal{T}k} = \frac{\varphi_{i-\frac{1}{2}}^n - \varphi_{i+\frac{1}{2}}^n}{h_i} \text{ sur }]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[\times]t_n, t_{n+1}[;$$

et donc $\chi_{\mathcal{T}k} \rightarrow -\varphi_x$ dans $L^1(\mathbb{R} \times]0, 1[)$ et $T_4 \rightarrow - \int \int u(x) \varphi_x(x) dx dt$ lorsque $h \rightarrow 0$,

$$* T_5 \leq \sum_{i=M}^{M_2} \sum_{n=0}^N k \beta h \|\varphi_x\|_\infty (u_i - u_{i-1}^h) \leq \beta k h \|\varphi_x\|_\infty \sum_{n=0}^N \sum_{i=M}^{M_2} (u_i^n - u_{i-1}^n) \text{ si } \beta h \leq 1, \text{ où } M_1 \text{ et } M_2 \text{ sont tels}$$

que $i \notin \{M_1, \dots, M_2\} \Rightarrow]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[\subset [-a, a]^c$, et $\varphi = 0$ sur $([-a, a] \times [0, T])^c$. On a donc :

$$T_5 \leq \beta k h \|\varphi_x\|_\infty \left(\sum_{i=M_1}^{M_2} \sum_{n=0}^N (u_i^n - u_{i-1}^n)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^N \sum_{i=M_1}^{M_2} 1 \right)^{1/2} \\ \leq \beta k h \|\varphi_x\|_\infty \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{k}} \left(\sum_{n=0}^N \sum_{i=M_1}^{M_2} 1 \right)^{1/2}, \\ \leq \beta \sqrt{k} h \|\varphi_x\|_\infty \sqrt{c} \sqrt{N+1} \sqrt{M_2 - M_1} (M_2 - M_1) \alpha h \leq 2a. \\ \leq \beta \sqrt{k} h \|\varphi_x\|_\infty \sqrt{c} \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{k}} \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{\alpha h}} = \beta \|\psi_x\|_\infty \sqrt{c} \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{h} \\ \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

On en déduit que $T_3 \rightarrow - \int \int u(x) \varphi_x(x) dx$ quand $h \rightarrow 0$.

Comme $T_1 + T_2 + T_3 = 0$, on a donc

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} u(x, t) \varphi_t(x; t) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} u(x, t) \varphi_x(x, t) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(x, \cdot) dx = 0$$

et donc u est solution faible de (6.6.50)-(6.6.51).

Exercice 64 page 232

1/ Dans le premier cas, la solution est facile à construire par la méthode des caractéristiques, pour tout $t < 1/2$. En effet, les droites caractéristiques sont d'équation : $x(t) = 2u_0(x_0)t + x_0$, c'est-à-dire

$$x(t) = \begin{cases} 2t + x_0, & \text{si } x_0 < 0, \\ 2(1 - x_0)t + x_0, & \text{si } x_0 \in]0, 1[, \\ 0 & \text{si } x_0 > 1. \end{cases}$$

Les droites caractéristiques se rencontrent à partir de $t = 1/2$, il y a alors apparition d'un choc, dont la vitesse est donnée par la relation de Rankine-Hugoniot :

$$\sigma(u_g - u_d) = (u_g^2 - u_d^2), \text{ et donc } \sigma = u_g + u_d = 1.$$

La solution entropique est donc :

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < \frac{1}{2} \text{ et } x < 2t \text{ ou si } t > \frac{1}{2} \text{ et } x < t + \frac{1}{2}, \\ \frac{x-1}{2t-1} & \\ 0 & \text{si } t < \frac{1}{2} \text{ et } x > 1 \text{ ou si } t > \frac{1}{2} \text{ et } x > t + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

2/ On pourra montrer que la fonction définie par les formules suivantes est la solution pour $t < \frac{1}{2}$ (c'est-à-dire avant que les droites caractéristiques ne se rencontrent, la solution contient deux zones de détente).

$$u(x, t) = 0, \text{ si } x < 0, t < \frac{1}{2},$$

$$u(x, t) = \frac{x}{2t}, \text{ si } 0 < x < 2t, t < \frac{1}{2},$$

$$u(x, t) = \frac{1-x}{1-2t}, \text{ si } 2t < x < 1, t < \frac{1}{2},$$

$$u(x, t) = \frac{x-1}{2t}, \text{ si } 1 < x < 1+2t, t < \frac{1}{2},$$

$$u(x, t) = 1, \text{ si } 1+2t < x, t < \frac{1}{2}.$$

En $t = \frac{1}{2}$, on pourra vérifier qu'un choc apparaît en $x = 1$ et se propage à la vitesse 1. On obtient alors pour $t > \frac{1}{2}$ la solution suivante :

$$u(x, t) = 0, \text{ si } x < 0, t > \frac{1}{2},$$

$$u(x, t) = \frac{x}{2t}, \text{ si } 0 < x < \frac{1}{2} + t, t > \frac{1}{2},$$

$$u(x, t) = \frac{x-1}{2t}, \text{ si } \frac{1}{2} + t < x < 1 + 2t, t > \frac{1}{2},$$

$$u(x, t) = 1, \text{ si } 1 + 2t < x, t > \frac{1}{2}.$$

Remarquons que, bien que la solution initiale soit discontinue, la solution entropique est continue pour $t \in]0, 1/2[$.

Exercice 66 page 232

1. La question 1 découle du point 1 de la proposition 6.29 page 223 (il faut que σ satisfasse la condition de Rankine–Hugoniot).
2. La question 2 découle du point 2 de la proposition 6.29 page 223.

Exercice 68 page 233

Les quatre schémas s'écrivent sous la forme :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{k}{h_i}(g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_i^n, u_i^n)) + \frac{k}{h_i}(g(u_{i-1}^n, u_i^n) - g(u_i^n, u_i^n))$$

soit encore

$$u_i^{n+1} = u_i^n + C_i^n(u_{i+1}^n - u_i^n) + D_i^n(u_{i-1}^n - u_i^n),$$

avec

$$C_i^n = \frac{k}{h_i} \frac{g(u_i^n, u_i^n) - g(u_i^n, u_{i+1}^n)}{u_{i+1}^n - u_i^n} \quad \text{si } u_i^n \neq u_{i+1}^n (0 \text{ sinon})$$

$$D_i^n = \frac{k}{h_i} \frac{g(u_{i-1}^n, u_i^n) - g(u_i^n, u_i^n)}{u_{i-1}^n - u_i^n} \quad \text{si } u_i^n \neq u_{i+1}^n (0 \text{ sinon})$$

On suppose que $A \leq u_0 \leq B$ p.p. et on remarque qu'il existe $L \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\left. \begin{aligned} |g(a, b) - g(a, c)| &\leq L|b - c|, \\ |g(b, a) - g(c, a)| &\leq L|b - c| \end{aligned} \right\} \quad \forall a, b, c \in [A, B]$$

(On laisse le lecteur vérifier qu'un tel L existe pour les 4 schémas considérés).

1) Dans le cas des 3 premiers schémas (FS, Godunov et LFM), la fonction g est croissante par rapport au 1er argument et décroissante par rapport au 2ème argument. Donc si $u_i^n \in [A, B], \forall i$ (pour n fixé), on a $C_i^n \geq 0$ $D_i^n \geq 0$. En prenant $2k \leq Lh_i \quad \forall i$ on a aussi : $C_i^n, D_i^n \leq \frac{1}{2}$ et donc u_i^{n+1} est une combinaison convexe de $u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n$ donc $u_i^{n+1} \in [A, B] \quad \forall i$ (et aussi $\|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^n\|_\infty$). Par récurrence sur n on en déduit :

$$u_i^n \in [A, B] \quad \forall i, \forall n \text{ si } k \leq uh_i \forall i \text{ avec } M = \frac{L}{2}$$

Dans le dernier cas (Murman), on a

$$g(a, b) = f(a) \text{ si } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0 \quad (a \neq b), g(a, b) = f(b) \text{ si } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0 \quad (a \neq b) \text{ et } g(a, a) = f(a).$$

Si $\frac{f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)}{u_{i+1}^n - u_i^n} \geq 0$, on a : $g(u_i^n, u_{i+1}^n) = f(u_i^n)$, donc $C_i^n = 0$.

Si $\frac{f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)}{u_{i+1}^n - u_i^n} < 0$, on a : $g(u_i^n, u_{i+1}^n) = f(u_{i+1}^n)$, $C_i^n = \frac{-f(u_{i+1}^n) + f(u_i^n)}{u_{i+1}^n - u_i^n} > 0$, et $C_i^n \leq \frac{1}{2}$ si $k \leq Mh_i$ avec

$M = \frac{L}{2}$ (L est ici la constante de Lipschitz de f).

Le même calcul vaut pour D_i^n et on conclut comme précédemment car

$$u^{n+1} = (1 - C_i^n - D_i^n)u^n + C_i^n u_{i+1}^n + D_i^n u_{i-1}^n$$

2) On reprend la formule de 1) et la même limitation sur k (pour les 4 schémas). On a :

$$u_{i+1}^{n+1} = u_{i+1}^n + C_{i+1}^n (u_{i+2}^n - u_{i+1}^n) + D_{i+1}^n (u_i^n - u_{i+1}^n)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + C_i^n (u_{i+1}^n - u_i^n) + D_i^n (u_{i-1}^n - u_i^n)$$

et donc, en soustrayant membre à membre :

$$u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1} = (u_{i+1}^n - u_i^n) \underbrace{(1 - C_i^n - D_{i+1}^n)}_{\geq 0} + \underbrace{C_{i+1}^n}_{\geq 0} (u_{i+2}^n - u_{i+1}^n) + \underbrace{D_i^n}_{\geq 0} (u_i^n - u_{i-1}^n)$$

Par inégalité triangulaire, on a donc :

$$|u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \leq |u_{i+1}^n - u_i^n| (1 - C_i^n - D_{i+1}^n) + C_{i+1}^n |u_{i+2}^n - u_{i+1}^n| + D_i^n |u_i^n - u_{i-1}^n|$$

Sommons alors entre $i = -P$ à P :

$$\begin{aligned} \sum_{i=-P}^P |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| &\leq \sum_{i=-P}^P |u_{i+1}^n - u_i^n| - \sum_{i=-P}^P C_i^n |u_{i+1}^n - u_i^n| + \sum_{i=-P}^P C_{i+1}^n |u_{i+2}^n - u_{i+1}^n| \\ &- \sum_{i=-P}^P D_{i+1}^n |u_{i+1}^n - u_i^n| + \sum_{i=-P}^P D_i^n |u_i^n - u_{i-1}^n|. \end{aligned}$$

En regroupant :

$$\sum_{i=-P}^P |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \leq \sum_{i=-P}^P |u_{i+1}^n - u_i^n| + C_{P+1}^n |u_{P+2}^n - u_{P+1}^n| + D_{-P}^n |u_{-P}^n - u_{-P-1}^n|.$$

Or $C_{P+1}^n \in [0, 1]$ et $D_{-P}^n \in [0, 1]$ donc

$$\sum_{i=-P}^P |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \leq \sum_{i=-P-1}^{P+1} |u_{i+1}^n - u_i^n| \leq \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |u_{i+1}^n - u_i^n|.$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre P vers $+\infty$ pour obtenir le résultat.

Exercice 69 page 233

1) Cette question a été complètement traitée dans l'exercice 68.

Les estimations sont vérifiées avec $M = \frac{L}{2}$, où L est la constante de Lipschitz de f sur $[A, B]$.

2) Remarquons que si $f(s) = s^2$ alors $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = b + a$.

a) Soit $\bar{b} \in]0, B[$, $\bar{a} \in]A, 0[$ tel que $\bar{b} + \bar{a} > 0$, (par exemple : $\bar{a} = -\frac{\epsilon}{2}$, $\bar{b} = \epsilon$ avec $0 < \epsilon < \min(-A, B)$). Soit $\alpha \in]0, \bar{a} + \bar{b}[$. Pour $a \in [\bar{a} - \alpha, \bar{a} + \alpha]$, on a $\bar{b} + a > 0$, et donc $g(a, \bar{b}) = f(a) = a^2$, ce qui prouve que sur l'ensemble $[\bar{a} - \alpha, \bar{a} + \alpha] \times \{\bar{b}\}$, la fonction g est décroissante par rapport à a .

b) Soit u_0 définie par : $u_0 = \begin{cases} -1 & \text{sur } \mathbb{R}_- \\ +1 & \text{sur } \mathbb{R}_+ \end{cases}$ de sorte que $u_i^0 = \begin{cases} +1 & \text{si } i \geq 0 \\ -1 & \text{si } i < 0 \end{cases}$

Comme $f(u_i^0) = +1 \quad \forall i$ on a $u_i^1 = u_i^0 \quad \forall i$ et donc $u_i^n = u_i^0$ pour tout i et pour tout n . Par une récurrence facile, la solution approchée est donc stationnaire. La solution exacte n'est pas stationnaire (voir proposition 6.29, cas où f est strictement convexe et $u_g < u_d$).

Exercice 70 page 234 (Flux monotones)

1. Le schéma s'écrit : $u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{h_i}{k}(g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_i^n, u_{i-1}^n))$

2.

$$\begin{aligned} u_{i+1}^n &= u_i^n + C_i^n (u_{i+1}^n - u_i^n) + D_i^n (u_{i-1}^n - u_i^n) \\ &= (1 - C_i^n - D_i^n) u_i^n + C_i^n u_{i+1}^n + D_i^n u_{i-1}^n \end{aligned}$$

$$\text{avec } C_i^n = \frac{h_i}{k} \frac{g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_i^n, u_i^n)}{u_{i+1}^n - u_i^n} \text{ si } u_{i+1}^n \neq u_i^n \text{ (et 0 sinon)}$$

$$\text{et } D_i^n = \frac{h_i}{k} \frac{g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_i^n, u_i^n)}{u_{i+1}^n - u_i^n} \text{ si } u_{i-1}^n \neq u_i^n \text{ (et 0 sinon)}$$

Remarquons que $C_i^n \geq 0$ et $D_i^n \geq 0$ car g est monotone. On en déduit que H définie par

$$H(u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n) = (1 - C_i^n - D_i^n) u_i^n + C_i^n u_{i+1}^n + D_i^n u_{i-1}^n$$

est une fonction croissante de ses arguments si $1 - C_i^n - D_i^n \geq 0$, ce qui est vérifié si $k \leq \frac{h_i}{2M}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

3. Comme $a \leq \xi$ $g(a, b) \leq g(\xi, b)$, et comme $\xi \leq b$, $g(\xi, b) \leq g(\xi, \xi)$.

4. D'après la question précédente, si $a \leq b$, on a bien $g(a, b) \leq \min\{g(\xi, \xi), \xi \in [a, b]\}$, et comme $g(\xi, \xi) = f(\xi)$, on a le résultat souhaité.

Si $a \geq b$, alors on vérifie facilement que : $g(a, b) \geq g(\xi, \xi)$ pour tout $\xi \in [b, a]$, ce qui prouve le résultat.

5. Comme $g(a, b) = f(u_{a,b})$, on a $\min_{s \in [a,b]} f(s) \leq g(a, b)$ si $a \leq b$ et $g(a, b) \leq \max_{s \in [b,a]} f(s)$ si $a \geq b$. On a donc égalité dans les inégalités de la question 3.

2. Montrer que sous une condition à préciser, le schéma peut s'écrire sous la forme

$$u_i^{n+1} = H(u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n)$$

où H est une fonction croissante de ses trois arguments.

Bibliographie

- [1] BREZIS, H. (1983), *Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications* (Masson, Paris).
- [2] P.G. Ciarlet, Introduction à l'analyse numérique et à l'optimisation, Masson 1982.
- [3] CIARLET, P.G. (1978), *The Finite Element Method for Elliptic Problems* (North-Holland, Amsterdam).
- [4] CIARLET, P.G. (1991), *Basic error estimates for elliptic problems* in : *Handbook of Numerical Analysis II* (North-Holland, Amsterdam) 17-352.
- [5] R. Eymard, T. Gallouët and R. Herbin, Finite Volume Methods, *Handbook of Numerical Analysis*, Vol. VII, pp. 713-1020. Edited by P.G. Ciarlet and J.L. Lions (North Holland).
- [6] T. Gallouët and R. Herbin, Théorie de l'intégration et de la mesure. [http ://www-gm3.univ-mrs.fr/ gallouet/licence.d/int-poly.pdf](http://www-gm3.univ-mrs.fr/gallouet/licence.d/int-poly.pdf)
- [7] GODLEWSKI E. and P. A. RAVIART (1991), *Hyperbolic systems of conservation laws*, Ellipses.
- [8] GODLEWSKI E. and P.A. RAVIART (1996), *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, *Applied Mathematical Sciences* **118** (Springer, New York).
- [9] GODUNOV S. (1976), *Résolution numérique des problèmes multidimensionnels de la dynamique des gaz* (Editions de Moscou).
- [10] R. Herbin, Analyse numérique. [http ://www.cmi.univ-mrs.fr/ herbin/PUBLI/polyanenum.pdf](http://www.cmi.univ-mrs.fr/herbin/PUBLI/polyanenum.pdf)
- [11] KRÖNER D. (1997) *Numerical schemes for conservation laws in two dimensions*, Wiley-Teubner Series Advances in Numerical Mathematics. (John Wiley and Sons, Ltd., Chichester ; B. G. Teubner, Stuttgart).
- [12] LEVEQUE, R. J. (1990), *Numerical methods for conservation laws* (Birkhauser verlag).
- [13] QUARTERONI A., SACCO R., AND SALERI F. Numerical mathematics. Springer, 2000.
- [14] J. RAPPAZ AND M. PICASSO Introduction à l'analyse numérique. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 1998.
- [15] P.A. RAVIART AND JM THOMAS. Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.