

MASTER 2 MATHEMATIQUES

Expédition dans la semaine n°	Etape	Code UE	N° d'envoi de l'UE
46	MA-CEPS 2	SMACUF5T	1

Nom de l'UE : Calcul scientifique

Le cours contient 5 chapitres. Pour chaque semaine, il est proposé d'étudier une partie du cours, de faire des exercices (corrigés) et, éventuellement, de réaliser un TP en python. Les TP sont conseillés mais non obligatoires. Deux devoirs sont à rendre afin de bénéficier d'une note de contrôle continu.
note finale = max(note-examen, 1/3(2 note-examen + note-contrôle-continu)).

- Contenu de l'envoi : Polycopié, chapitre 1. TP 1

- Guide du travail à effectuer

Semaine 1 :

Lire l'introduction. Etudier le paragraphe 1.1 (Principe des deux méthodes),

Exercices proposés (avec corrigés) : 1 (différences finies et volumes finis avec conditions de Dirichlet non homogènes) et 3 (Principe du maximum).

Semaine 2 :

Etudier le paragraphe 1.2 (Analyse de la méthode des différences finies) sans la démonstration

Exercices proposés (avec corrigés) : 5 (Equation de transport diffusion sous forme non-conservative), 7 (Conditionnement efficace), 10 (problème elliptique 1D et discrétisation par différences finies)

Semaine 3 :

Etudier le paragraphe 1.3 (Volumes finis en une dimension d'espace)

Exercices proposés (avec corrigés) : 11 (non consistance des volumes finis), 13 (consistance des flux), 14 (conditions au limites de Neumann), 16 (différences finies et volumes finis pour les conditions de Fourier)

Semaine 4 :

Etudier le paragraphe 1.4 (diffusion bi-dimensionnelle) : 18 (Problème elliptique 1d, discrétisation par volumes finis) 20 (Problème elliptique 2d et différences finies), 21 (Implantation de la méthode des volumes finis)

-Coordonnées de l'enseignant responsable de l'envoi

R. Herbin, I2M, 39 rue Joliot Curie, 13453 marseille cedex 13

email : raphaele.herbin@univ-amu.fr

Vous pouvez aussi consulter la page web: <http://www.i2m.univ-amu.fr/~herbin>

et me poser des questions par email



INTRODUCTION

Analyse numérique des équations aux dérivées partielles et calcul scientifique

Pour aborder le calcul numérique (à l'aide d'un outil informatique) des solutions d'un problème "réel", on passe par les étapes suivantes :

Description qualitative des phénomènes physiques Cette étape, effectuée par des spécialistes des phénomènes que l'on veut quantifier (ingénieurs, chimistes, biologistes etc. . .) consiste à répertorier tous les mécanismes qui entrent en jeu dans le problème qu'on étudie.

Modélisation Il s'agit, à partir de la description qualitative précédente, d'écrire un modèle mathématique. On supposera ici que ce modèle amène à un système d'équations aux dérivées partielles (EDP). Selon les hypothèses effectuées, la modélisation peut aboutir à plusieurs modèles, plus ou moins complexes. Dans la plupart des cas, on ne saura pas calculer une solution analytique, explicite, du modèle ; on devra faire appel à des techniques de résolution approchée.

Analyse mathématique du modèle mathématique Même si l'on ne sait pas trouver une solution explicite du modèle, il est important d'en étudier les propriétés mathématiques, dans la mesure du possible. Il est bon de se poser les questions suivantes :

- Le problème est-il bien posé, c'est-à-dire y a-t-il existence et unicité de la solution ?
- Les propriétés physiques auxquelles on s'attend sont-elles satisfaites par les solutions du modèle mathématique ? Si l'inconnue est une concentration, par exemple, peut-on prouver que la solution du modèle censé représenter le modèle physique est toujours positive ?
- Y a-t-il continuité de la solution par rapport aux données ?

Discrétisation et résolution numérique Un problème posé sur un domaine continu (espace-temps) n'est pas résoluble tel quel par un ordinateur, qui ne peut traiter qu'un nombre fini d'inconnues. Pour se ramener à un problème en dimension finie, on discrétise l'espace et/ou le temps. Si le problème original est linéaire on obtient un système linéaire. Si le problème original est non linéaire (par exemple s'il s'agit de la minimisation d'une fonction) on aura un système non linéaire à résoudre par une méthode *ad hoc* (méthode de Newton. . .)

Analyse numérique Il s'agit maintenant de l'analyse mathématique du schéma numérique. En effet, une fois le problème discret obtenu, il est raisonnable de se demander si la solution de ce problème est proche et en quel sens, du problème continu. De même, si on doit mettre en œuvre une méthode itérative pour le traitement des non-linéarités, il faut étudier la convergence de la méthode itérative proposée.

Mise en œuvre, programmation et analyse des résultats La partie mise en œuvre est une grosse consommatrice de temps. Actuellement, de nombreux codes commerciaux de type "boîte noire" existent, qui permettent en théorie de résoudre "tous" les problèmes. Il faut cependant procéder à une analyse critique des résultats obtenus par ces codes, qui ne sont pas toujours compatibles avec les propriétés physiques attendues. . .

Principales méthodes de discrétisation

Méthodes de différences finies et volumes finis

On considère un domaine physique $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, où d est la dimension de l'espace. Le principe des méthodes de différences finies (DF) consiste à se donner un certain nombre de points du domaine,

qu'on notera $(x_1 \dots x_N) \subset (\mathbb{R}^d)^N$. On approche l'opérateur différentiel en espace en chacun des x_i par des quotients différentiels. Il faut alors discrétiser la dérivée en temps : on pourra par exemple considérer un schéma d'Euler¹. Les méthodes de volumes finis (VF) sont adaptées aux équations de conservation et utilisées en mécanique des fluides depuis plusieurs décennies. Le principe consiste à découper le domaine Ω en des *volumes de contrôle* ; on intègre ensuite l'équation de conservation sur les volumes de contrôle ; on approche alors les flux sur les bords du volume de contrôle par exemple par une technique de différences finies.

Méthodes variationnelles, méthodes d'éléments finis

On met le problème d'équations aux dérivées partielles sous la forme dite *variationnelle* :

$$\begin{cases} a(u, v) = (f, v)_H & \forall v \in H, \\ u \in H, \end{cases}$$

où H est un espace de Hilbert² bien choisi (par exemple parce qu'il y a existence et unicité de la solution dans cet espace), $(\cdot, \cdot)_H$ le produit scalaire sur H et a une forme bilinéaire sur H . Dans un tel cadre fonctionnel, la discrétisation consiste à remplacer H par un sous espace de dimension finie H_k , construit par exemple à l'aide de fonctions de base éléments finis qu'on introduira plus loin :

$$\begin{cases} a(u_k, v_k) = (f, v_k)_H & \forall v \in H_k, \\ u_k \in H_k, \end{cases}$$

Méthodes spectrales

L'idée de ces méthodes est de chercher une solution approchée sous forme d'un développement sur une certaine famille de fonctions. On peut par exemple écrire la solution approchée sous la forme $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i(u) p_i$, où les p_i sont des fonctions polynomiales. On choisit la base p_i de manière à ce que les dérivées de α_i et p_i soient faciles à calculer. Ces dernières méthodes sont réputées coûteuses, mais précises. Elles sont d'ailleurs plus souvent utilisées comme aide à la compréhension des phénomènes physiques sur des problèmes modèles que dans pour des applications industrielles.

Quelques exemples d'équations aux dérivées partielles

Équation de Poisson En trois dimensions d'espace, elle s'écrit :

$$-\operatorname{div}(\kappa \nabla u) = f,$$

où div est l'opérateur divergence qui s'applique à une fonction vectorielle. Pour $w : x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mapsto w(x) = w_1(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\operatorname{div} w = \partial_1 w_1 + \partial_2 w_2 + \partial_3 w_3$, la notation ∂_i désignant la dérivée partielle de par rapport à x_i et le symbole nabla ∇ (parfois aussi appelé del) représente le gradient :

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \partial_1 u \\ \partial_2 u \\ \partial_3 u \end{pmatrix}$$

En une dimension d'espace, elle s'écrit :

$$-(\kappa u')' = f$$

1. Leonhard Paul Euler, né le 15 avril 1707 à Bâle et mort le 18 septembre 1783 à Saint-Petersbourg, est un mathématicien et physicien suisse, qui passa la plus grande partie de sa vie en Russie et en Allemagne. Euler fit d'importantes découvertes dans des domaines aussi variés que le calcul infinitésimal et la théorie des graphes. Il introduisit également une grande partie de la terminologie et de la notation des mathématiques modernes, en particulier pour l'analyse mathématique, comme pour la notion d'une fonction mathématique [ciarlet1]. Il est également connu pour ses travaux en mécanique, en dynamique des fluides, en optique et en astronomie.

2. David Hilbert (1862–1943) est un très grand mathématicien allemand du xx-ème siècle. Il est en particulier connu pour les vingt-trois problèmes qu'il a énoncés comme défis aux mathématiciens. Certains de ces problèmes sont à ce jour non résolus. Un *espace de Hilbert* H ou espace hilbertien est un espace vectoriel normé complet dont la norme, notée $\|\cdot\|$, découle d'un produit scalaire $(\cdot, \cdot)_H$: pour tout $u \in H$, $\|u\|_H^2 = (u, u)_H$.

Le réel κ est un coefficient de diffusion et le terme $-\kappa\nabla u$ est un *flux de diffusion*. Il peut s'agir de la diffusion d'une espèce chimique, dans ce cas, κ est le coefficient de diffusion (souvent noté D , en m^2/s) de la loi de Fick qui donne le flux de diffusion J (quantité de matière par unité de surface et de temps) en fonction de la concentration u :

$$J = -\kappa u' \text{ en dimension 1 qui devient } J = -\kappa\nabla u \text{ en dimension supérieure}$$

Il peut s'agir d'une diffusion thermique. Dans ce cas on parle plus souvent de conduction. Le coefficient de diffusion est dans ce cas souvent noté λ et on l'appelle la *conductivité thermique* (en $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$). La loi de Fourier (1807) donne la densité de flux de chaleur j (en W m^{-2}) en fonction de la température u (en Kelvin) :

$$J = -\lambda u' \text{ en dimension 1 qui devient } J = -\lambda\nabla u \text{ en dimension supérieure}$$

Dans le cas d'une conduction électrique, le coefficient de diffusion est dans ce cas noté σ et on l'appelle la *conductivité électrique* (en $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$). La loi d'Ohm donne la densité de courant électrique j (en m/s^2) en fonction du potentiel électrique u :

$$J = -\sigma u' \text{ en dimension 1 qui devient } j = -\sigma\nabla u \text{ en dimension supérieure}$$

Avec un coefficient constant $\kappa = 1$, l'équation de Poisson s'écrit en une dimension d'espace $-u'' = f$. En deux dimensions d'espace, elle s'écrit $-\Delta u = f$ avec $\Delta u = \partial_{xx}^2 u + \partial_{yy}^2 u$, où $\partial_{xx}^2 u$ (respectivement $\partial_{yy}^2 u$) désigne la dérivée partielle seconde de u par rapport à x (respectivement y). Dans le cas $f = 0$, on obtient l'équation de Laplace $-\Delta u = 0$.

Équation de la chaleur Elle s'écrit :

$$u_t - \Delta u = 0$$

où u_t désigne la dérivée partielle de u par rapport au temps t : la fonction u est ici une fonction du temps et de l'espace. C'est la version "instationnaire" de l'équation de Laplace.

Équation de transport En une dimension d'espace, elle s'écrit :

$$u_t + cu_x = 0$$

où c est un réel (la vitesse de transport) et u_x désigne la dérivée partielle de u par rapport à la variable d'espace x . Si on se donne comme condition initiale $u(x, 0) = u_0(x)$, la solution de l'équation au temps t est $u(x, t) = u_0(x - ct)$ (ceci est facile à vérifier au moins dans le cas régulier). En dimension supérieure, cette équation devient :

$$u_t + c\nabla u = 0$$

Équation des ondes Elle s'écrit :

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

Considérons maintenant une équation aux dérivées partielles linéaire, de degré 2, de la forme :

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0$$

L'appellation *elliptique*, *parabolique* ou *hyperbolique* d'une équation aux dérivées partielles de cette forme correspond à la nature de la conique décrite par l'équation caractéristique correspondante, c'est-à-dire :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0.$$

- Si $B^2 - 4AC < 0$, l'équation est dite elliptique ;
- Si $B^2 - 4AC = 0$, elle est dite parabolique ;
- si $B^2 - 4AC > 0$, elle est dite hyperbolique.

Vérifiez que l'équation de Laplace est elliptique alors que l'équation des ondes est hyperbolique.

Notons que tous les exemples que nous avons présentés sont des équations aux dérivées partielles linéaires, c'est-à-dire des équations qui ne font pas intervenir que des termes linéaires en

u et ses dérivées. Bien sûr, de nombreux modèles comportent des équations non linéaires comme par exemple l'équation hyperbolique non linéaire de Burgers qui s'écrit :

$$u_t + (u^2)_x = 0 \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad x \in \mathbb{R}$$

avec la condition initiale $u(x, 0) = u_0(x)$. Une telle équation est dite *hyperbolique non linéaire*. Les équations hyperboliques non linéaires sont discrétisées de manière usuelle par la méthode des volumes finis. Les discrétisations par éléments finis mènent à des schémas instables (c'est-à-dire que les solutions discrètes ne sont pas bornées, indépendamment des paramètres de discrétisation, par des normes "naturelles". En général elles ne vérifient pas non plus certaines propriétés qui semblent naturelles du point de vue de l'intuition physique. Ceci sera précisé dans la suite).

DIFFÉRENCES FINIES ET VOLUMES FINIS

POUR LES PROBLÈMES DE DIFFUSION

STATIONNAIRES

1.1 Principe des deux méthodes

1.1.1 Cas de la dimension 1

On considère le problème unidimensionnel

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \forall x \in]0; 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

où $f \in \mathcal{C}([0; 1])$. Les conditions aux limites (1.2) considérées ici sont dites de type Dirichlet¹ homogène (le terme homogène désigne les conditions nulles). Cette équation modélise par exemple la diffusion de la chaleur dans un barreau conducteur chauffé (terme source f) dont les deux extrémités sont plongées dans de la glace.

Méthode de différences finies

Sur la figure 1.1, on se donne une subdivision de $[0; 1]$, c'est-à-dire une suite de points $(x_k)_{k=0, \dots, N+1}$ tels que $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = 1$. Pour $i = 0, \dots, N$, on note $h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i$ et on

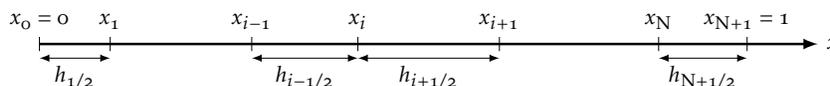


FIGURE 1.1 – Maillage unidimensionnel en différences finies

définit le *pas* du maillage par :

$$h = \max_{i=0, \dots, N} h_{i+1/2}$$

Pour simplifier l'exposé, on se limitera dans un premier temps à un pas constant :

$$h_{i+1/2} = h \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Le principe de la méthode des différences finies consiste à écrire l'équation aux dérivées partielles (1.1) aux points de discrétisation x_i :

$$-u''(x_i) = f(x_i) \quad \forall i = 1, \dots, N$$

puis à approcher l'opérateur différentiel (ici $-u''$) par un quotient différentiel, de manière à en déduire un système d'équations en fonction d'inconnues discrètes censées représenter des

1. Johann Peter Gustav Dirichlet, mathématicien allemand, né à Düren en 1805 et mort à Göttingen en 1859. Il a effectué ses études supérieures à Paris où il a côtoyé les plus grands mathématiciens français de l'époque, dont Legendre, Laplace, Poisson et Fourier. Il retourne ensuite en 1825 en Allemagne où il travaille en particulier avec son ami Jacobi et avec Gauss, dont il reprendra en la chaire à l'Université de Göttingen. Il eut entre autres comme élève Riemann et Kronecker (qui a donné son nom au fameux symbole). Les travaux de Dirichlet ont surtout porté sur les séries de Fourier et l'arithmétique.

approximations de u aux points de discrétisation. Voici comment on procède pour l'équation de Poisson unidimensionnelle. Effectuons d'abord un développement de Taylor en x_i , en supposant que $u \in \mathcal{C}^4([0; 1])$:

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\zeta_i) \quad (1.3)$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\eta_i) \quad (1.4)$$

avec $\zeta_i \in [x_i; x_{i+1}]$ et $\eta_i \in [x_{i-1}; x_i]$. En additionnant, on obtient :

$$u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) = 2u(x_i) + h^2u''(x_i) + \mathcal{O}(h^2)$$

Il semble donc raisonnable d'approcher la dérivée seconde $-u''(x_i)$ par le *quotient différentiel* :

$$\frac{2u(x_i) - u(x_{i-1}) - u(x_{i+1}))}{h^2}$$

Sous des hypothèses de régularité sur u , on peut montrer [lemme 1.14] que cette approximation est d'ordre 2 au sens :

$$R_i = u''(x_i) + \frac{2u(x_i) - u(x_{i-1}) - u(x_{i+1}))}{h^2} = \mathcal{O}(h^2)$$

On appelle *erreur de consistance* au point x_i la quantité R_i . L'approximation de $u''(x_i)$ par un quotient différentiel suggère de considérer les équations discrètes suivantes :

$$\frac{2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}}{h^2} = f(x_i) \quad i = 1, \dots, N$$

dont les inconnues discrètes sont les u_i , $i = 1, \dots, N$. Notons que la première équation fait intervenir u_0 tandis que la dernière fait intervenir u_{N+1} . Ces valeurs ne sont pas à proprement parler des inconnues, puisqu'elles sont données par les conditions aux limites (1.2). On pose donc $u_0 = 0$ et $u_{N+1} = 0$. Le système complet d'équations s'écrit donc

$$\begin{cases} \frac{2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}}{h^2} = f(x_i) & i = 1, \dots, N & (1.5a) \\ u_0 = 0 & & (1.5b) \\ u_{N+1} = 0 & & (1.5c) \end{cases}$$

Remarque 1.1 — Inconnues discrètes et solution exacte. Attention à ne pas confondre u_i et $u(x_i)$: les équations discrètes (1.5) font intervenir les *inconnues* discrètes u_i , $i = 1, \dots, N$ et non pas les *valeurs* $u(x_i)$, $i = 1, \dots, N$ de la solution exacte. En général, ces valeurs ne sont pas les mêmes. Si la discrétisation a été effectuée correctement (comme c'est le cas ici et comme nous le démontrerons mathématiquement plus loin), la résolution du système discret nous permettra d'obtenir des valeurs u_i , $i = 1, \dots, N$ des inconnues discrètes qui seront des bonnes approximations des valeurs $u(x_i)$, $i = 1, \dots, N$ de la solution exacte que nous ne pouvons pas, dans le cas général, calculer explicitement.

Méthode des volumes finis

Sur la figure 1.2, on se donne non plus des points mais des volumes de contrôle K_i , $i = 1, \dots, N$ avec $K_i =]x_{i-1/2}; x_{i+1/2}[$ et on note $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$. Pour chaque volume de contrôle K_i , on se donne un point $x_i \in K_i$. On pourra considérer par exemple (mais ce n'est pas le seul point possible) $x_i = 1/2(x_{i+1/2} + x_{i-1/2})$. On intègre l'équation $-u'' = f$ sur K_i :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} -u''(x) dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx$$

et on pose :

$$f_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx$$

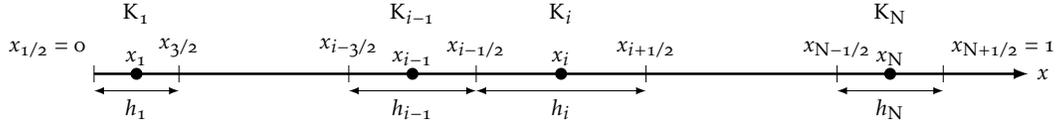


FIGURE 1.2 – Maillage unidimensionnel en volumes finis

On obtient :

$$-u'(x_{i+1/2}) + u'(x_{i-1/2}) = h_i f_i \quad i = 1, \dots, N \quad (1.6)$$

Cette équation est un bilan de flux. La quantité $\bar{F}_{i+1/2} = -u'(x_{i+1/2})$ est le flux de diffusion en $x_{i+1/2}$. Pour la première maille ($i = 1$), on obtient plus particulièrement :

$$-u'(x_{3/2}) + u'(0) = h_1 f_1 \quad (1.7)$$

et pour la dernière ($i = N$) :

$$-u'(1) + u'(x_{N-1/2}) = h_N f_N \quad (1.8)$$

On cherche donc à approcher les flux $-u'(x_{i+1/2})$ aux interfaces $x_{i+1/2}$ des mailles et les flux $u'(0)$ et $u'(1)$ au bord. Notons que l'opérateur à approcher est ici d'ordre 1, alors qu'il était d'ordre 2 en différences finies pour la même équation.

On se donne une inconnue par maille (ou volume de contrôle i) que l'on note u_i et on espère approcher ainsi la valeur $u(x_i)$ (ou $\frac{1}{h_i} \int_{K_i} u$).

En supposant u suffisamment régulière, on peut effectuer deux développements de Taylor à l'ordre 2 de u entre x_{i+1} et $x_{i+1/2}$ et entre x_i et $x_{i+1/2}$; en soustrayant ces développements de Taylor l'un de l'autre, on se rend compte qu'il est "raisonnable" [exercice 13] d'approcher le terme $u'(x_{i+1/2})$ dans l'équation (1.6) par le quotient différentiel :

$$\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+1/2}}$$

au sens où l'erreur de consistance sur les flux, définie par :

$$R_{i+1/2} = u'(x_{i+1/2}) - \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+1/2}}$$

est d'ordre 1 si $u \in C^2([0;1], \mathbb{R})$ [lemme 1.28]. Le schéma numérique s'écrit donc :

$$-\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} + \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1/2}} = h_i f_i \quad i = 2, \dots, N-1 \quad (1.9)$$

Pour les première et N -ème équations, on tient compte des conditions aux limites de Dirichlet homogènes (1.2) et on approche $u'(0)$ dans l'équation (1.7) (respectivement $u'(1)$ dans l'équation (1.8)) par $(u(x_1) - 0)/h_{1/2}$ (respectivement $(0 - u(x_N))/h_{N+1/2}$), ce qui donne comme première et dernière équations du schéma numérique :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{u_2 - u_1}{h_{3/2}} + \frac{u_1}{h_{1/2}} = h_1 f_1 \end{array} \right. \quad (1.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_N}{h_{N+1/2}} + \frac{u_N - u_{N-1}}{h_{N-1/2}} = h_N f_N \end{array} \right. \quad (1.11)$$

Là encore, comme dans le cas des différences finies, il faut faire attention parce que les équations discrètes (1.9)-(1.11) font intervenir les *inconnues* discrètes u_i , $i = 1, \dots, N$ et non pas les *valeurs* $u(x_i)$, $i = 1, \dots, N$ de la solution exacte. En général, ces valeurs ne sont pas les mêmes.

Remarque 1.2 — Comparaison des deux schémas. Si le pas du maillage est constant $h_i = h$, $\forall i = 1, \dots, N$ (on dit aussi que le maillage est uniforme), on peut montrer [exercice 1] que les équations des schémas volumes finis et différences finies coïncident aux conditions de bord et au second membre près. Si le maillage n'est pas uniforme, les deux schémas diffèrent.

Autres conditions limites

Conditions de Dirichlet non homogènes Supposons que les conditions aux limites en 0 et en 1 soit maintenant de type Dirichlet non homogènes, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} u(0) &= a \\ u(1) &= b \end{aligned} \quad (1.12)$$

avec a et b pas forcément nuls. Dans ce cas :

1. les équations discrètes du *schéma aux différences finies* (1.5) restent identiques mais les valeurs u_0 et u_{N+1} sont maintenant données par $u_0 = a$ et $u_{N+1} = b$;
2. les équations discrètes du *schéma de volumes finis* (1.9) associés aux nœuds internes restent identiques mais les valeurs $u'(0)$ et $u'(1)$ sont maintenant approchées par $(u(x_1)-a)/h_{1/2}$ et $(b-u(x_N))/h_{N+1/2}$, ce qui donne comme première et dernière équations du schéma numérique :

$$\begin{cases} -\frac{u_2 - u_1}{h_{3/2}} + \frac{u_1 - a}{h_{1/2}} = h_1 f_1 \\ -\frac{b - u_N}{h_{N+1/2}} + \frac{u_N - u_{N-1}}{h_{N-1/2}} = h_N f_N \end{cases} \quad (1.13)$$

$$\begin{cases} -\frac{u_2 - u_1}{h_{3/2}} + \frac{u_1 - a}{h_{1/2}} = h_1 f_1 \\ -\frac{b - u_N}{h_{N+1/2}} + \frac{u_N - u_{N-1}}{h_{N-1/2}} = h_N f_N \end{cases} \quad (1.14)$$

Conditions de Neumann et Fourier On appelle *condition de Neumann*² une condition qui impose une valeur de la dérivée, par exemple :

$$u'(0) = a \quad (1.15)$$

On appelle *condition de Fourier*³ ou *condition de Robin*⁴ une condition [**robin**] qui impose une relation entre la valeur de la dérivée et la valeur de la solution, par exemple,

$$u'(1) + \alpha u(1) = b \quad (1.16)$$

avec $\alpha > 0$. Cette condition est donc un mélange des conditions de Dirichlet et de Neumann et est souvent utilisée pour exprimer une condition de transfert, thermique par exemple, entre un milieu et l'extérieur.

Enfin, on dit que les conditions aux limites sont *mixtes* si elles sont de type différent sur des portions de frontière du domaine : on a des conditions mixtes dans le cas unidimensionnel si, par exemple, on a une condition de Dirichlet en 0 et une condition de Neumann en 1.

Preons par exemple le cas de conditions mixtes, en considérant l'équation (1.1) en $x = 0$ avec les conditions (1.15) et (1.16) en $x = 1$. Voyons comment tenir compte de ces nouvelles conditions limites avec les méthodes différences finies et volumes finis :

Schéma aux différences finies Pour approcher la condition de Neumann en 0, on effectue un développement de Taylor à l'ordre 1 en 0 :

$$u'(0) = \frac{u(h) - u(0)}{h_{1/2}} + \varepsilon(h) = a$$

Ceci suggère l'équation discrète suivante pour u_0 en écrivant que :

$$\frac{u_1 - u_0}{h_{1/2}} = a \Leftrightarrow u_0 = u_1 - ah_{1/2}$$

2. Karl Gotfried Neumann est un mathématicien allemand, né en 1832 à Königsberg et mort 1925 à Leipzig. Il fut l'un des pionniers de la théorie des équations intégrales. Il a laissé son nom aux conditions aux limites mentionnées ici.

3. Joseph Fourier est un mathématicien et physicien français, né en 1768 à Auxerre et mort en 1830 à Paris. Il est connu pour ses travaux sur la décomposition de fonctions périodiques en séries trigonométriques convergentes appelées séries de Fourier et leur application au problème de la propagation de la chaleur. Il a participé à la révolution, a échappé de peu à la guillotina et a été nommé préfet de l'Isère par Napoléon. Il a fait construire la route entre Grenoble et Briançon et fondé en 1810 l'Université Royale de Grenoble, dont il fut le recteur. L'université scientifique de Grenoble et l'un des laboratoires de mathématiques de cette université portent son nom.

4. Victor Gustave Robin est un mathématicien français né en 1855 et mort en 1897 qui a travaillé en particulier en thermodynamique et sur la théorie du potentiel.

Rappelons que pour la condition de Dirichlet homogène, la valeur de u_0 était simplement prise comme $u_0 = 0$. De la même manière, on écrit un développement limité pour la dérivée dans la condition de Fourier (1.16) :

$$\frac{u(1) - u(1-h)}{h_{N+1/2}} + \varepsilon(h) + \alpha u(1) = b$$

ce qui suggère l'approximation suivante :

$$\frac{u_{N+1} - u_N}{h_{N+1/2}} + \alpha u_{N+1} = b \Leftrightarrow u_{N+1} = \frac{u_N + bh_{N+1/2}}{1 + \alpha h_{N+1/2}}$$

Schéma de volumes finis La condition de Neumann est particulièrement simple à prendre en compte, puisque le schéma de volumes finis fait intervenir l'approximation du flux $u'(0)$ dans l'équation (1.7), que l'on discrétise donc par :

$$a + \frac{u_1 - u_2}{h_{3/2}} = h_1 f_1 \quad (1.17)$$

On tient compte ensuite de la condition de Fourier (1.16) pour approcher le terme $u'(1)$ dans l'équation (1.7) : on peut par exemple⁵ approcher $u'(1)$ par $b - \alpha u_N$ ce qui nous donne comme N-ème équation discrète :

$$F_{N+1/2} - F_{N-1/2} = h_N f_N \quad \text{avec} \quad F_{N+1/2} = \alpha u_N - b \quad \text{et} \quad F_{N-1/2} = -\frac{u_N - u_{N-1}}{h_{N-1/2}} \quad (1.18)$$

1.1.2 Cas de la dimension 2 ou 3

On considère maintenant le problème de Laplace en dimension 2 ou 3 sur un ouvert borné Ω de \mathbb{R}^d , $d = 2$ ou 3 , avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.19a)$$

$$(1.19b)$$

où f est une fonction de Ω dans \mathbb{R} .

Méthode de différences finies

Supposons pour simplifier que le domaine Ω soit un carré (c'est-à-dire $d = 2$, le cas rectangulaire se traite tout aussi facilement). On se donne un pas de maillage constant h et des points $x_{i,j} = (ih, jh)$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, N$. En effectuant les développements limités de Taylor comme au paragraphe 1.1.1 dans les deux directions [exercice 19], on approche $-\partial_i^2 u(x_{i,j})$ (respectivement $-\partial_j^2 u(x_{i,j})$) par :

$$\frac{2u(x_{i,j}) - u(x_{i+1,j}) - u(x_{i-1,j}))}{h^2} \quad \left(\text{respectivement par } \frac{2u(x_{i,j}) - u(x_{i,j+1}) - u(x_{i,j-1}))}{h^2} \right)$$

Ce type d'approche est limité à des géométries simples. Pour mailler des géométries compliquées, on utilise souvent des triangles (tétraèdres en dimension 3), auquel cas la méthode des différences finies est plus difficile à généraliser car on ne peut pas approcher la dérivée seconde comme en maillages cartésiens.

Méthode de volumes finis

On suppose maintenant que Ω est un ouvert polygonal de \mathbb{R}^2 et on se donne un maillage \mathcal{T} de Ω , c'est-à-dire, en gros, un découpage de Ω en volumes de contrôle polygonaux K . En intégrant l'équation (1.19a) sur K , on obtient :

$$\int_K -\Delta u \, dx = \int_K f \, dx$$

5. Ce n'est pas la seule possibilité [exercice ??].

Par la formule de Stokes, on peut réécrire cette équation :

$$-\int_{\partial K} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_K(x) d\gamma(x) = \int_K f(x) dx$$

où $d\gamma(x)$ désigne l'intégrale par rapport à la mesure uni-dimensionnelle sur le bord de l'ouvert Ω et où \mathbf{n}_K désigne le vecteur normal unitaire à ∂K extérieur à K . Comme K est polygonal, on peut décomposer ∂K en arêtes σ qui sont des segments de droite et en appelant \mathcal{E}_K l'ensemble des arêtes de ∂K (trois arêtes dans le cas d'un triangle), on a :

$$-\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{\sigma} \nabla u \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} d\gamma(x) = \int_K f(x) dx$$

où $\mathbf{n}_{K,\sigma}$ désigne le vecteur normal unitaire à σ extérieur à K (noter que ce vecteur est constant sur σ). On cherche donc maintenant à approcher la dérivée normale $\nabla u \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}$ de manière consistante sur chaque arête σ . On se donne des inconnues discrètes notées $(u_K)_{K \in \mathcal{T}}$ qui, on l'espère, vont s'avérer être des approximations de $u(x_K)$. Pour une arête $\sigma = K|L$ séparant les volumes de contrôle K et L , il est tentant d'approcher la dérivée normale $\nabla u \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}$ par le quotient différentiel :

$$\frac{u(x_L) - u(x_K)}{d_{K,L}}$$

où $d_{K,L}$ est la distance entre les points x_K et x_L . Cependant, cette approximation ne pourra être justifiée que si la direction du vecteur défini par les deux points x_K et x_L est la même que celle de la normale $\mathbf{n}_{K,\sigma}$, c'est-à-dire si le segment de droite $x_K x_L$ est orthogonal à l'arête $K|L$. Pour un maillage triangulaire à angles strictement inférieurs à $\pi/2$, ceci est facile à obtenir en choisissant les points x_K comme intersection des médiatrices du triangle K ⁶ à l'image de la figure 1.3. Supposons

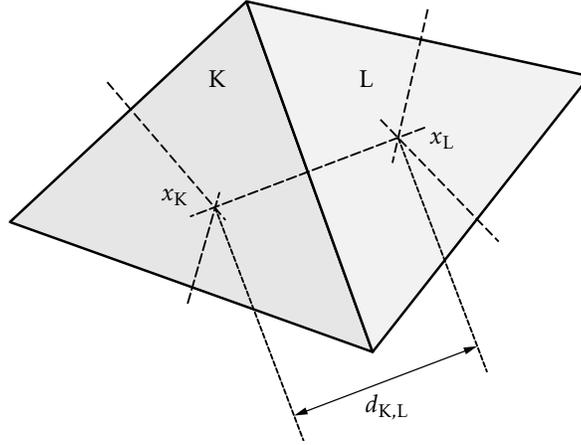


FIGURE 1.3 – Exemple de volumes de contrôle pour la méthode des volumes finis en deux dimensions d'espace

que cette hypothèse, dite d'orthogonalité du maillage, soit satisfaite ; on approche donc $\nabla u \cdot \mathbf{n}_K|_{\sigma}$ par $\frac{u(x_L) - u(x_K)}{d_{K,L}}$ et en notant $|\sigma|$ la longueur de l'arête σ , on approche :

$$\int_{\sigma} \nabla u \cdot \mathbf{n}_K d\gamma \text{ par } F_{K,\sigma} = |\sigma| \frac{u_L - u_K}{d_{K,L}}$$

pour tout $\sigma \in \mathcal{E}_K$ et pour tout $K \in \mathcal{T}$. Le schéma volumes finis s'écrit donc :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} = |K| f_K \quad \text{où} \quad f_K = \frac{1}{|K|} \int_K f(x) dx \quad (1.20)$$

6. Les médiatrices d'un triangle se coupent en un point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle, alors que les médianes se coupent au barycentre, qui est le centre du cercle inscrit dans le triangle ; ces deux points coïncident dans le cas d'un triangle équilatéral.

$|K|$ étant la mesure de K et où les flux numériques $F_{K,\sigma}$ sont définis (en tenant compte des conditions limites pour les arêtes du bord) par :

$$F_{K,\sigma} = \begin{cases} -|\sigma| \frac{u_L - u_K}{d_{K,L}} & \text{si } \sigma = K|L \\ -|\sigma| \frac{u_K}{d_{K,\sigma}} & \text{si } \sigma \subset \partial\Omega \text{ et } \sigma \in \mathcal{E}_K \end{cases}$$

où $d_{K,\sigma}$ est la distance entre le point x_K et l'arête σ .

Comparaison des méthodes

Cette introduction aux différences finies et volumes finis nous permet de remarquer que les différences finies sont particulièrement bien adaptées dans le cas de domaines rectangulaires ou parallépipédiques, pour lesquels on peut facilement définir des maillages structurés (cartésiens dans le cas présent) c'est-à-dire dont on peut indexer les mailles par un ordre (i, j) naturel.

Dans le cas de domaines plus complexes, on maille souvent à l'aide de triangles (ou tétraèdres) et dans ce cas la méthode des différences finies ne se généralise pas facilement. On a alors recours soit aux volumes finis, dont on vient de donner le principe, soit aux éléments finis, que nous aborderons ultérieurement.

1.1.3 Questions d'analyse numérique

Voici un certain nombre de questions du domaine de l'analyse numérique, auxquelles nous tenterons de répondre dans la suite :

1. Le problème obtenu en dimension finie (avec des inconnues localisées aux nœuds du maillage dans le cas de la méthode des différences finies et dans les mailles dans le cas de la méthode des volumes finis) admet-il une (unique) solution ?
2. La solution du problème discret satisfait-elle les propriétés physiques qui sont vérifiées par la solution du modèle mathématique ?
3. La solution du problème discret converge-t-elle vers la solution du problème continu lorsque le pas du maillage h tend vers 0 ? Dans le cas des différences finies en une dimension d'espace, le pas du maillage est défini par :

$$h = \sup_{i=1,\dots,N} |x_{i+1} - x_i| \quad (1.21)$$

Dans le cas des volumes finis en une dimension d'espace, il est défini par :

$$h = \sup_{i=1,\dots,N} |x_{i+1/2} - x_{i-1/2}| \quad (1.22)$$

en deux dimensions d'espace, le pas h est défini par :

$$h = \sup_{K \in \mathcal{T}} \text{diam}(K) \text{ avec } \text{diam}(K) = \sup_{x,y \in K} d(x,y)$$

où \mathcal{T} , le maillage, est l'ensemble des volumes de contrôle K . Notons que la réponse à cette question n'est pas évidente *a priori*. La solution discrète peut converger vers la solution continue, elle peut aussi converger vers autre chose que la solution du problème continu et, enfin, elle peut ne pas converger du tout.

1.2 Analyse de la méthode des différences finies

On cherche à discrétiser le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases} \quad (1.23)$$

où $c \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R}_+)$ et $f \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$, qui peut modéliser par exemple un phénomène de diffusion-réaction d'une espèce chimique. On se donne un pas du maillage constant $h = 1/(N + 1)$ et une subdivision de $]0; 1[$, notée $(x_k)_{k=0, \dots, N+1}$ avec $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = 1$. Soit u_i l'inconnue discrète associée au nœud i , $i = 1, \dots, N$. On pose $u_0 = u_{N+1} = 0$. On obtient les équations discrètes en approchant $u''(x_i)$ par quotient différentiel par développement de Taylor, comme au paragraphe 1.1.1. On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}}{h^2} + c_i u_i = f_i & i = 1, \dots, N \\ u_0 = 0 \\ u_{N+1} = 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

avec $c_i = c(x_i)$ et $f_i = f(x_i)$. On peut écrire ces équations sous forme matricielle :

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 + c_1 h^2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 + c_2 h^2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 + c_{N-1} h^2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 + c_N h^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} \Leftrightarrow A_h U_h = b_h \quad (1.25)$$

Remarque 1.3 — Notations pour les vecteurs et matrices. Un vecteur :

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$$

sera aussi noté, par souci de simplicité, $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ (ces deux égalités signifiant que les composantes de u dans la base canonique de \mathbb{R}^N sont u_1, u_2, \dots, u_N . Attention toutefois à ne pas confondre cette notation avec $u^t = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_N)$, qui est une matrice $1 \times N$; c'est la matrice transposée de u vu comme une matrice $N \times 1$. On peut écrire le produit scalaire de deux vecteurs u et v de \mathbb{R}^N avec ces notations :

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^N u_i v_i = u^t v = v^t u$$

Les questions suivantes surgissent alors naturellement :

1. Le système (1.25) admet-il une unique solution ?
2. A-t-on convergence de U_h vers u et en quel sens ?

Nous allons répondre par l'affirmative à ces deux questions. Commençons par la première.

Proposition 1.4 Soit $c = (c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{R}^N$ tel que $c_i \geq 0$ pour $i = 1, \dots, N$; alors la matrice A_h définie dans (1.25) est symétrique définie positive et donc inversible.

Démonstration. La matrice A_h est évidemment symétrique. Montrons qu'elle est définie positive. Soit $v = (v_1 \dots v_N)$, on pose $v_0 = v_{N+1} = 0$. Calculons le produit scalaire $A_h v \cdot v = v^t A_h v$. On a :

$$A_h v \cdot v = \frac{1}{h^2} (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_N) \begin{bmatrix} 2 + c_1 h^2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 + c_N h^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$A_h v \cdot v = \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^N v_i (-v_{i-1} + (2 + c_i h^2)v_i - v_{i+1})$$

On a donc, par changement d'indice :

$$A_h v \cdot v = \frac{1}{h^2} \left(\sum_{i=1}^N -v_{i-1} v_i + \sum_{i=1}^N (2 + c_i h^2) v_i^2 - \sum_{j=2}^{N+1} v_{j-1} v_j \right)$$

Et comme on a posé $v_0 = 0$ et $v_{N+1} = 0$, on peut écrire :

$$A_h v \cdot v = \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^N (2 + c_i h^2) v_i^2 - \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^N 2v_i v_{i-1}$$

soit encore :

$$A_h v \cdot v = \sum_{i=1}^N c_i v_i^2 + \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^N (-2v_i v_{i-1} + v_i^2 + v_{i-1}^2) + v_N^2$$

On a donc finalement :

$$A_h v \cdot v = \sum_{i=1}^N c_i v_i^2 + \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{N+1} (v_i - v_{i-1})^2 \geq 0 \quad \forall v = (v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$$

Si on suppose $A_h v \cdot v = 0$, on a alors :

$$\sum_{i=1}^N c_i h^2 v_i^2 = 0 \text{ et } v_i - v_{i-1} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N+1$$

On a donc $v_1 = v_2 = \dots = v_N = v_0 = v_{N+1} = 0$. Remarquons que ces égalités sont vérifiées même si les c_i sont nuls. Ceci démontre que la matrice A_h est bien définie. •

Remarque 1.5 — Existence et unicité de la solution. On a montré ci-dessus que A_h est symétrique définie positive, donc inversible, ce qui entraîne l'existence et l'unicité de la solution de (1.25). On aurait pu aussi démontrer l'existence et l'unicité de la solution de (1.25) directement, en montrant que le noyau de A_h est réduit à $\{0\}$ [exercice 7]. On rappelle qu'en dimension finie, toute application linéaire injective ou surjective est bijective.

Remarque 1.6 — Caractère défini et conditions limites. Dans la démonstration de la proposition 1.4, si $c_i > 0$ pour tout $i = 1, \dots, N$ le terme $\sum_{i=1}^N c_i h^2 v_i^2 = 0$ permet de conclure que $v_i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, N$. Par contre, si on n'a que $c_i \geq 0$ (ou, bien même $c_i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, N$), on peut encore montrer que $v_i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, N$ grâce aux conditions aux limites de Dirichlet homogènes (représentées par le fait qu'on pose $v_0 = 0$ et $v_{N+1} = 0$ qui permet d'écrire alors les équations 1 et N sous la même forme que l'équation i); on a en effet $v_i = v_{i-1}$ pour tout $i = 1, \dots, N$ et $v_0 = 0$. En particulier, la matrice de discrétisation de $-u''$ par différences finies avec conditions aux limites de Neumann homogènes :

$$\begin{cases} -u'' = f \\ u'(0) = 0 \\ u'(1) = 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

donne une matrice A_h qui est symétrique et positive, mais non définie [exercice 15]. De fait la solution du problème continu (1.26) n'est pas unique, puisque les fonctions constantes sur $[0; 1]$ sont solutions de (1.26).

Nous allons maintenant nous préoccuper de la question de la convergence.

Définition 1.7 — Matrice à inverse positive, ou monotone. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, N$. On dit que A est positive (ou $A \geq 0$) si $a_{i,j} \geq 0$, $\forall i, j = 1, \dots, N$. On dit que A est à inverse positive, ou que A est monotone (c'est la terminologie classique, mais pas la plus claire...) si A est inversible et $A^{-1} \geq 0$, .à.d. que tous les coefficients de A^{-1} sont positifs ou nuls.⁷

L'avantage des schémas dont la matrice est à inverse positive est de satisfaire la propriété de conservation de la positivité qui peut être cruciale dans les applications physiques :

7. Voir les exercices sur les matrices à inverse positive du polycopié de L3 à l'adresse : <http://www.cmi.univ-mrs.fr/~herbin/PUBLI/anamat.pdf>.

Proposition 1.8 — Caractérisation des matrices à inverse positive. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, N$; alors A est à inverse positive (ou monotone) si et seulement si

$$\forall v \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}), \quad [Av \geq 0] \implies v \geq 0. \quad (1.27)$$

(Les inégalités s'entendent composante par composante.)

Démonstration. Supposons d'abord que A vérifie (1.27) et montrons que A inversible et que A^{-1} a des coefficients positifs ou nuls. Si x est tel que $Ax = 0$, alors $Ax \geq 0$ et donc, par hypothèse, $x \geq 0$. Mais on a aussi $Ax \leq 0$, soit $A(-x) \geq 0$ et donc par hypothèse, $x \leq 0$. On en déduit $x = 0$, ce qui prouve que A est inversible. La propriété (1.27) donne alors que $y \geq 0 \implies A^{-1}y \geq 0$. En prenant $y = e_1$ on obtient que la première colonne de A^{-1} est positive, puis en prenant $y = e_i$ on obtient que la i^e colonne de A^{-1} est positive pour $i = 2, \dots, N$. Par conséquent, A^{-1} a tous ses coefficients positifs.

Réciproquement, supposons maintenant que A est inversible et que A^{-1} a des coefficients positifs. Soit $x \in \mathbb{R}^N$ tel que $Ax = y \geq 0$, alors $x = A^{-1}y \geq 0$. Donc A conserve la positivité. •

Remarque 1.9 — Principe du maximum. On appelle principe du maximum continu le fait que si $f \geq 0$ alors le minimum de la fonction u solution du problème 1.23 est atteint sur les bords. Cette propriété mathématique correspond à l'intuition physique qu'on peut avoir du phénomène : si on chauffe un barreau tout en maintenant ses deux extrémités à une température fixe, la température aux points intérieurs du barreau sera supérieure à celle des extrémités. Il est donc souhaitable que la solution approchée satisfasse la même propriété [exercice 3].

Lemme 1.10 Soit $c = (c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{R}^N$ et $A_h \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ définie en (1.25). Si $c_i \geq 0$, $\forall i = 1, \dots, N$ alors A_h est monotone.

Démonstration. On va montrer que si $v \in \mathbb{R}^N$, $A_h v \geq 0$ alors $v \geq 0$. On peut alors utiliser la proposition ?? pour conclure. Soit $v = (v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$. Posons $v_0 = v_{N+1} = 0$. Supposons que $A_h v \geq 0$. On a donc

$$-\frac{v_{i-1}}{h^2} + \left(\frac{2}{h^2} + c_i\right)v_i - \frac{v_{i+1}}{h^2} \geq 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (1.28)$$

Soit $p = \min\{i \in \{1, \dots, N\}; v_p = \min_{j=1, \dots, N} v_j\}$. Supposons que $\min_{j=1, \dots, N} v_j < 0$. On a alors $p \geq 1$ et :

$$\frac{v_p - v_{p-1}}{h^2} + c_p v_p + \frac{v_p - v_{p+1}}{h^2} \geq 0$$

On en déduit que

$$\frac{2c_p v_p}{h^2} \geq \frac{v_{p-1} - v_p}{h^2} + \frac{v_{p+1} - v_p}{h^2} \geq 0$$

Si $c_p > 0$, on a donc $v_p \geq 0$ et donc $v_i \geq 0$, $\forall i = 1, \dots, N$. Si $c_p = 0$, on doit alors avoir $v_{p-1} = v_p = v_{p+1}$ ce qui est impossible car p est le plus petit indice j tel que $v_j = \min_{i=1, \dots, N} v_i$. Donc dans ce cas le minimum ne peut pas être atteint pour $j = p > 1$. On a ainsi finalement montré que $\min_{i \in \{1, \dots, N\}} v_i \geq 0$, on a donc $v \geq 0$. •

Définition 1.11 — Erreur de consistance. On appelle erreur de consistance la quantité obtenue en remplaçant l'inconnue par la solution exacte dans le schéma numérique. Dans le cas du schéma (1.24), l'erreur de consistance au point x_i est donc définie par :

$$R_i = \frac{2u(x_i) - u(x_{i-1}) - u(x_{i+1}))}{h^2} + c(x_i)u(x_i) - f(x_i) \quad (1.29)$$

L'erreur de consistance R_i est donc l'erreur qu'on commet en remplaçant l'opérateur $-u''$ par le quotient différentiel

$$\frac{2u(x_i) - u(x_{i-1}) - u(x_{i+1}))}{h^2}$$

Cette erreur peut être évaluée si u est suffisamment régulière en effectuant des développements de Taylor.

Définition 1.12 — Ordre du schéma. On dit qu'un schéma de discrétisation à N points est d'ordre p s'il existe $C \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de la solution exacte, tel que l'erreur de consistance satisfait :

$$\max_{i=1, \dots, N} (R_i) \leq Ch^p,$$

où h est le pas du maillage défini par (??).

Définition 1.13 — Consistance du schéma. On dit qu'un schéma de discrétisation est consistant si

$$\max_{i=1,\dots,N} (R_i) \rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0$$

où N est le nombre de points de discrétisation.

Lemme 1.14 Si la solution de (1.23) vérifie $u \in C^4([0; 1])$, le schéma (1.24) est consistant d'ordre 2 et on a plus précisément :

$$|R_i| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{[0;1]} |u^{(4)}| \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (1.30)$$

Démonstration. Par développement de Taylor, on a :

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2} u''(x_i) + \frac{h^3}{6} u'''(x_i) + \frac{h^4}{24} u^{(4)}(\xi_i) \quad (1.31)$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2} u''(x_i) - \frac{h^3}{6} u'''(x_i) + \frac{h^4}{24} u^{(4)}(\eta_i) \quad (1.32)$$

En additionnant ces deux égalités, on obtient que :

$$\frac{u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) - 2u(x_i)}{h^2} = u''(x_i) + \frac{h^2}{24} (u^{(4)}(\xi_i) + u^{(4)}(\eta_i))$$

ce qui entraîne que :

$$|R_i| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{[0;1]} |u^{(4)}| \quad (1.33)$$

Remarque 1.15 — Sur l'erreur de consistance.

1. Si on note $\bar{U}_h : (u(x_i))_{i=1\dots N}$ le vecteur dont les composantes sont les valeurs exactes de la solution de (1.23) et $U_h = (u_1 \dots u_N)$ la solution de (1.24), on a :

$$R = A_h(U_h - \bar{U}_h) \quad (1.34)$$

où $R \in \mathbb{R}^N$ est le vecteur de composantes R_i , $i = 1, \dots, N$, erreur de consistance en x_i définie en (1.29).

2. On peut remarquer que si $u^{(4)} = 0$, les développements de Taylor se résument à :

$$-u''(x_i) = \frac{2u(x_i) - u(x_{i-1}) - u(x_{i+1}))}{h^2}$$

et on a donc $R_i = 0$, pour tout $i = 1, \dots, N$ et donc $u_i = u(x_i)$ pour tout $i = 1 \dots N$. Dans ce cas (rare !), le schéma de discrétisation donne la valeur exacte de la solution en x_i , pour tout $i = 1, \dots, N$. Cette remarque est bien utile lors de la phase de validation de méthodes numériques et/ou programmes informatiques pour la résolution de l'équation (1.23). En effet, si on choisit f telle que la solution soit un polynôme de degré inférieur ou égal à 3, alors on doit avoir une erreur entre solution exacte et approchée inférieure à l'erreur machine.

La preuve de convergence du schéma utilise la notion de consistance, ainsi qu'une notion de stabilité, que nous introduisons maintenant :

Proposition 1.16 On dit que le schéma (1.24) est stable, au sens où la norme infinie de la solution approchée est bornée par un nombre ne dépendant que de f . Plus précisément, la matrice de discrétisation A_h satisfait :

$$\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8} \quad (1.35)$$

inégalité qui peut aussi s'écrire comme une estimation sur les solutions du système (1.25) :

$$\|U_h\|_\infty \leq \frac{1}{8} \|f\|_\infty \quad (1.36)$$

Démonstration. On rappelle que par définition, si $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$,

$$\|M\|_\infty = \sup_{\substack{v \in \mathbb{R}^N \\ v \neq 0}} \frac{\|Mv\|_\infty}{\|v\|_\infty} \text{ avec } \|v\|_\infty = \sup_{i=1, \dots, N} |v_i|.$$

Pour montrer que $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq 1/8$, on décompose la matrice A_h sous la forme $A_h = A_{0h} + \text{diag}(c_i)$ où A_{0h} est la matrice de discrétisation de l'opérateur $-u''$ avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes et

$$A_{0h} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ & \ddots & & \\ -1 & & \ddots & \\ & & & -1 & 2 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

et $\text{diag}(c_i)$ désigne la matrice diagonale de coefficients diagonaux c_i . Les matrices A_{0h} et A_h sont inversibles et on a :

$$A_{0h}^{-1} - A_h^{-1} = A_{0h}^{-1} A_h A_h^{-1} - A_{0h}^{-1} A_{0h} A_h^{-1} = A_{0h}^{-1} (A_h - A_{0h}) A_h^{-1}.$$

Comme $\text{diag}(c_i) \geq 0$, on a $A_h \geq A_{0h}$ et comme A_{0h} et A_h sont monotones, on en déduit que :

$$0 \leq A_h^{-1} \leq A_{0h}^{-1} \text{ composante par composante}$$

On peut maintenant remarquer que si $B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et si $B \geq 0$ (c'est-à-dire $B_{ij} \geq 0$ pour tout i et j), on a

$$\|B\|_\infty = \sup_{\substack{v \in \mathbb{R}^N \\ \|v\|=1}} \sup_{i=1, \dots, N} |(Bv)_i| = \sup_{\substack{v \in \mathbb{R}^N \\ \|v\|=1}} \sup_{i=1, \dots, N} \left| \sum_{j=1}^N B_{ij} v_j \right| \|B\|_\infty = \sup_{i=1, \dots, N} \sum_{j=1}^N B_{ij}.$$

On a donc

$$\|A_h^{-1}\| = \sup_{i=1, \dots, N} \sum_{j=1}^N (A_h^{-1})_{ij} \leq \sup_{i=1, \dots, N} \sum_{j=1}^N (A_{0h}^{-1})_{ij}$$

car $A_h^{-1} \leq A_{0h}^{-1}$ d'où on déduit que $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \|A_{0h}^{-1}\|_\infty$. Il ne reste plus qu'à estimer $\|A_{0h}^{-1}\|_\infty$. Comme $A_{0h}^{-1} \geq 0$, on a $\|A_{0h}^{-1}\|_\infty = \|A_{0h}^{-1}e\|_\infty$ avec $e = (1, \dots, 1)$. Soit $d = A_{0h}^{-1}e \in \mathbb{R}^N$. On veut calculer $\|d\|_\infty$, où d vérifie $A_{0h}d = e$. Or le système linéaire $A_{0h}d = e$ n'est autre que la discrétisation par différences finies du problème

$$\begin{cases} -u'' = 1 \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases} \quad (1.38)$$

dont la solution exacte est $u_0(x) = x(1-x)/2$ qui vérifie $u_0^{(4)}(x) = 0$. On en conclut, par la remarque 1.15, que $u_0(x_i) = d_i, \forall i = 1 \dots N$. Donc $\|d\|_\infty = \sup_{i=1, N} \frac{ih(ih-1)}{2}$ où $h = 1/(N+1)$ est le pas de discrétisation. Ceci entraîne que

$$\|d\|_\infty \leq \sup_{[0;1]} \left| \frac{x(x-1)}{2} \right| = \frac{1}{8}$$

et donc que $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq 1/8$. •

Remarque 1.17 — Sur la stabilité. L'inégalité (1.36) donne une estimation sur les solutions approchées indépendantes du pas de maillage. C'est ce type d'estimation que l'on recherchera par la suite comme garant de la stabilité d'un schéma numérique.

Définition 1.18 — Erreur de discrétisation. On appelle erreur de discrétisation en x_i , la différence entre la solution exacte en x_i et la i^e composante de la solution donnée par le schéma numérique

$$e_i = u(x_i) - u_i \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (1.39)$$

Théorème 1.1 Soit u la solution exacte de

$$\begin{cases} -u'' + cu = f \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

On suppose $u \in C^4([0;1])$. Soit u_h la solution de (1.24). Alors l'erreur de discrétisation définie par (1.39) satisfait

$$\max_{i=1, \dots, N} |e_i| \leq \frac{1}{96} \|u^{(4)}\|_\infty h^2.$$

Le schéma est donc convergent d'ordre 2.

Démonstration. Soit $U_h = (U_1, \dots, U_n)$ et $\tilde{U}_h = (u(x_1), \dots, u(x_N))$, on cherche à majorer $\|\tilde{U}_h - U_h\|_\infty$. On a $A(\tilde{U}_h - U_h) = R$ où R est l'erreur de consistance [remarque 1.15]. On a donc

$$\|\tilde{U}_h - U_h\|_\infty \leq \|A_h^{-1}\|_\infty \|R\|_\infty \leq \frac{1}{8} \times \frac{1}{12} \|u^{(4)}\|_\infty = \frac{1}{96} \|u^{(4)}\|_\infty$$

Remarque 1.19 — Sur la convergence. On peut remarquer que la preuve de la convergence s'appuie sur la stabilité (elle-même déduite de la conservation de la positivité) et sur la consistance. Dans certains livres d'analyse numérique, vous trouverez la "formule" : stabilité + consistance \Rightarrow convergence. Il faut toutefois prendre garde au fait que ces notions de stabilité et consistance peuvent être variables d'un type de méthode à un autre comme nous le verrons en étudiant la méthode des volumes finis, par exemple.

Remarque 1.20 — Contrôle des erreurs d'arrondi. On cherche à calculer la solution approchée de $-u'' = f$. Le second membre f est donc une donnée du problème. Supposons que des erreurs soient commises sur cette donnée (par exemple des erreurs d'arrondi, ou des erreurs de mesure). On obtient alors un nouveau système, qui s'écrit $A_h \tilde{U}_h = b_h + \varepsilon_h$ où ε_h représente la discrétisation des erreurs commises sur le second membre. Si on résout $A_h \tilde{U}_h = b_h + \varepsilon_h$ au lieu de $A_h U_h = b_h$, l'erreur commise sur la solution du système s'écrit :

$$E_h = \tilde{U}_h - U_h = A_h^{-1} \varepsilon_h$$

On en déduit que

$$\|E_h\|_\infty \leq \frac{1}{8} \|\varepsilon_h\|_\infty$$

On a donc une borne d'erreur sur l'erreur qu'on obtient sur la solution du système par rapport à l'erreur commise sur le second membre. Le problème des erreurs relatives est beaucoup plus subtil [exercice 7].

1.3 Volumes finis pour un problème elliptique unidimensionnel

1.3.1 Écriture du schéma

On va étudier la discrétisation par volumes finis du problème (1.1)-(1.2). On utilise ici la notation u'' plutôt que u_{xx} puisque l'inconnue u ne dépend que de la variable x .

Définition 1.21 — Maillage volumes finis. On appelle maillage volumes finis de l'intervalle $[0; 1]$, un ensemble de N mailles $(K_i)_{i=1, \dots, N}$ tel que $K_i =]x_{i-1/2}; x_{i+1/2}[$ et on note $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$. On se donne également N points $(x_i)_{i=1, \dots, N}$ situés dans les mailles K_i . On a donc :

$$0 = x_{1/2} < x_1 < x_{3/2} < \dots < x_{i-1/2} < x_i < x_{i+1/2} < \dots < x_{N+1/2} = 1$$

On notera $h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i$ et $h = \max_{i=1, \dots, N} h_i$. Pour des questions de notations, on posera également $x_0 = 0$ et $x_{N+1} = 1$.

On rappelle que pour obtenir un schéma volumes finis, on part de la forme intégrale (bilan des flux) obtenue en intégrant l'équation (1.1) sur K_i :

$$-u'(x_i + 1/2) + u'(x_i - 1/2) = \int_{K_i} f(x) dx. \quad (1.40)$$

On pose

$$f_i = \frac{1}{h_i} \int_{K_i} f(x) dx$$

et on introduit les inconnues discrètes $(u_i)_{i=1, \dots, N}$ (une par maille) et les équations discrètes du schéma numérique :

$$F_{i+1/2} - F_{i-1/2} = h_i f_i \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.41)$$

où $F_{i+1/2}$ est le flux numérique en $x_{i+1/2}$ qui devrait être une approximation raisonnable de $-u'(x_{i+1/2})$. On pose alors :

$$\begin{cases} F_{i+1/2} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} & i = 1, \dots, N \\ F_{1/2} = -\frac{u_1}{h_{1/2}} \\ F_{N+1/2} = \frac{u_N}{h_{N+1/2}} \end{cases}$$

pour tenir compte des conditions aux limites de Dirichlet homogènes $u(0) = u(1) = 0$. On peut aussi écrire :

$$\begin{cases} F_{i+1/2} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} & i = 0, \dots, N \\ u_0 = u_{N+1} = 0 \end{cases} \quad (1.42)$$

$$(1.43)$$

On peut écrire le système linéaire obtenu sur (u_1, \dots, u_N) sous la forme

$$A_h U_h = b_h \quad \text{avec} \quad (A_h U_h)_i = \frac{1}{h_i} \left(\frac{u_i - u_{i+1}}{h_{i+1/2}} + \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1/2}} \right) \quad \text{et} \quad (b_h)_i = f_i \quad (1.44)$$

Remarque 1.22 — Non consistance au sens des différences finies. L'approximation de $-u''(x_i)$ par

$$\frac{1}{h_i} \left(\frac{u_i - u_{i+1}}{h_{i+1/2}} + \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1/2}} \right)$$

n'est pas consistante dans le cas général [exercice 11].

On peut montrer que les deux schémas différences finies et volumes sont identiques *au bord près* dans le cas d'un maillage uniforme lorsque x_i est supposé être le centre de la maille [exercice 1].

1.3.2 Analyse mathématique du schéma

On va démontrer ici qu'il existe une unique solution (u_1, \dots, u_N) au schéma (1.41)-(1.43) et que cette solution converge, en un certain sens, vers la solution de problème continu (1.1)-(1.2) lorsque le pas du maillage tend vers 0.

Proposition 1.23 — Existence de la solution du schéma volumes finis. Soit $f \in \mathcal{C}([0;1])$ et $u \in \mathcal{C}^2([0;1])$ solution du problème (1.1)-(1.2). Soit $(K_i)_{i=1, \dots, N}$ le maillage de la définition 1.21. Alors il existe une unique solution $u_h = (u_1, \dots, u_N)$ de (1.41)-(1.43).

Démonstration. Ce résultat se déduit facilement de la proposition suivante, qui donne la stabilité du schéma, c'est-à-dire une estimation *a priori* sur les solutions approchées. Si $f_i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, N$, la proposition 1.25 nous donne que $\|D_{\mathcal{T}} u_{\mathcal{T}}\| = 0$ où $D_{\mathcal{T}} u_{\mathcal{T}}$ est la *dérivée discrète* et donc $u_i - u_{i-1} = 0$ pour tout $i = 1 \dots N$; mais comme $u_0 = 0$, on en déduit que $u_i = 0$ pour tout $i = 1 \dots N$. Ceci démontre l'unicité de $(u_i)_{i=1, \dots, N}$ solution de (1.41)-(1.43) et donc son existence, puisque le système (1.41)-(1.43) est un système linéaire carré d'ordre N . (On rappelle qu'une matrice carrée d'ordre N est inversible si et seulement si son noyau est réduit à $\{0\}$). •

Nous allons maintenant prouver la stabilité, sous forme d'une estimation dite *a priori*, car on effectue une majoration sur une fonction dont on n'a pas forcément prouvé l'existence : on établit l'estimation *a priori* en premier et on en déduit l'existence.

Pour démontrer cette propriété, on commence par introduire une *dérivée discrète* des fonctions constantes par mailles, qui nous servira dans la suite des démonstrations.

Définition 1.24 — Dérivée discrète. On considère le maillage $(K_i)_{i=1, \dots, N}$ de la définition 1.21. Soit v une fonction constante par mailles sur les mailles K_i , qui représente une approximation d'une fonction définie sur $[0;1]$ et nulle en 0 et en 1. En posant $v_0 = v_{N+1} = 0$, on peut définir une dérivée discrète de v par les pentes

$$p_{i+1/2} = \frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1/2}} \quad i = 0, \dots, N.$$

On peut alors définir une $D_{\mathcal{T}}v$, fonction constante par intervalle et égale à $p_{i+1/2}$ sur l'intervalle $K_{i+1/2} =]x_i; x_{i+1}[$. La norme L^2 de $D_{\mathcal{T}}v$ est alors définie par :

$$\|D_{\mathcal{T}}v\|_{L^2(\{0;1\})}^2 = \sum_{i=0}^N h_{i+1/2} p_{i+1/2}^2 = \sum_{i=0}^N \sum_{i=0}^N h_{i+1/2} \frac{(v_{i+1} - v_i)^2}{h_{i+1/2}} \quad \text{où} \quad h_{i+1/2} = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}$$

Proposition 1.25 — Stabilité : estimation a priori sur les solutions approchées. Soit $f \in L^2(\{0;1\})$. On considère le maillage $(K_i)_{i=1,\dots,N}$ de la définition 1.21 ; pour $i = 1, \dots, N$, on note f_i la valeur moyenne de f sur la maille K_i . Si u_h est la fonction constante par maille dont les valeurs sur les mailles sont des valeurs (u_1, \dots, u_N) qui vérifient le schéma volumes finis (1.41)-(1.43), alors

$$\|D_{\mathcal{T}}u_{\mathcal{T}}\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \quad (1.45)$$

Démonstration. La preuve de cette proposition est calquée sur l'estimation a priori qu'on peut faire sur les solutions du problème continu : en effet, si u est une solution qu'on supposera aussi régulière que l'on veut⁸ du problème (1.1)-(1.2), alors

$$\|u'\|_{L^2(\{0;1\})} \leq \|f\|_{L^2(\{0,1\})} \quad (1.46)$$

Nous allons donc mener les preuves de (1.46) et (1.45) en parallèle. Soit $u \in C^2(\{0;1\})$ solution de (1.1)-(1.2) et soit (u_1, \dots, u_N) solution de (1.41)-(1.43).

Estimation continue. On multiplie (1.1) par u et on intègre entre 0 et 1 :

$$-\int_0^1 u''(x)u(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$$

On intègre par parties et on utilise les conditions aux limites (1.2) :

$$\int_0^1 (u'(x))^2 dx = \int_0^1 f(x)u(x) dx$$

On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz à droite.

$$\int_0^1 (u'(x))^2 dx = \|f\|_{L^2(\{0;1\})} \|u\|_{L^2(\{0;1\})}$$

L'inégalité de Poincaré s'écrit $\|u\|_{L^2(\{0;1\})} \leq \|u'\|_{L^2(\{0;1\})}$ et donc $\|u'\|_{L^2(\{0;1\})} \leq \|f\|_{L^2(\{0;1\})}$.

Estimation discrète. On multiplie (1.41) par u_i et on somme sur i :

$$\sum_{i=1}^N h_i \left(-\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} + \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1/2}} \right) u_i = \sum_{i=1}^N h_i f_i u_i$$

On somme par parties en utilisant $u_0 = u_{N+1} = 0$:

$$\sum_{i=0}^N \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{h_{i+1/2}} = \sum_{i=1}^N h_i f_i u_i$$

On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz à droite et le fait que

$$\int_0^1 f_{\mathcal{T}}(x)^2 dx \leq \int_0^1 f(x)^2 dx$$

ce qui est une conséquence de Cauchy-Schwarz $\|(D_{\mathcal{T}}u_{\mathcal{T}})^2\|_{L^2(\{0;1\})} \leq \|f\|_{L^2(\{0,1\})} \|u_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\{0,1\})}$. L'inégalité de Poincaré discrète s'écrit $\|u_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\{0;1\})} \leq \|D_{\mathcal{T}}u_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\{0;1\})}$ et par la définition de $D_{\mathcal{T}}u$, $\|D_{\mathcal{T}}u_{\mathcal{T}}\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}$. Donnons les détails de la sommation par parties dans la preuve de l'estimation discrète. On a :

$$\sum_{i=1}^N -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} u_i + \sum_{i=1}^N \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1/2}} u_i = \sum_{i=1}^N h_i f_i u_i.$$

En effectuant un changement d'indice sur la deuxième somme, on obtient :

$$\sum_{i=1}^N -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} u_i + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} u_{i+1} = \sum_{i=1}^N h_i f_i u_i;$$

en regroupant les sommes, on a donc :

$$\sum_{i=0}^N \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{h_{i+1/2}} = \sum_{i=1}^N h_i f_i u_i$$

On se retrouve bien avec la norme L^2 de la dérivée discrète au membre de gauche de l'équation. •

Il nous faut maintenant donner les démonstrations des inégalités de Poincaré continue et discrète que nous avons utilisé dans la preuve ci-dessus. Là encore, nous allons procéder en parallèle car la démonstration en discret est calquée sur la démonstration continue.

8. En fait la solution unique de (1.1)-(1.2) appartient à l'espace $H^1(\{0;1\})$, comme on le verra plus tard.

Proposition 1.26 — Poincaré en continu et en discret.

énoncé en continu pour une fonction régulière Soit $u \in \mathcal{C}^1([0; 1])$ telle que $u(0) = 0$. Alors

$$\|u\|_{L^2(]0;1[)} \leq \|u'\|_{L^2(]0;1[)} \quad (1.47)$$

$$\|u\|_{L^2(]0;1[)} \leq \|u'\|_{L^2(]0;1[)} \quad (1.48)$$

énoncé en discret On considère le maillage $(K_i)_{i=1,\dots,N}$ de la définition 1.21. Soit v une fonction constante par mailles sur les mailles K_i et soit $D_{\mathcal{T}}v$ sa “dérivée discrète” au sens de la définition 1.24. Alors :

$$\|v\|_{L^2(]0;1[)} \leq \|D_{\mathcal{T}}v\|_{L^2(]0;1[)} \quad (1.49)$$

$$\|v\|_{\infty} \leq \|D_{\mathcal{T}}v\|_{L^2(]0;1[)} \quad (1.50)$$

Démonstration. Là encore, on va effectuer les démonstrations en parallèle, vu que la démonstration de l’inégalité “discrète” copie la démonstration de l’inégalité continue.

Inégalité de Poincaré continue. On écrit que u est l’intégrale de sa dérivée, en utilisant le fait que $u(0) = 0$:

$$u(x) = \int_0^x u'(s) ds$$

On majore :

$$|u(x)| \leq \int_0^x |u'(s)| ds \leq \int_0^1 |u'(s)| ds$$

ce qui donne tout de suite (1.48). On utilise l’inégalité de Cauchy-Schwarz à droite $|u(x)|^2 \leq \|u'\|_{L^2(]0;1[)}^2 \int_0^x 1 ds$. On intègre entre 0 et 1 pour aboutir au résultat $\|u\|_{L^2(]0;1[)} \leq \|u'\|_{L^2(]0;1[)}$.

Inégalité de Poincaré discrète. En tenant compte du fait que $v_0 = 0$, on écrit que :

$$v_i = \sum_{k=1}^i (v_k - v_{k-1}).$$

On majore :

$$|v_i| \leq \sum_{k=1}^i |v_k - v_{k-1}| \leq \sum_{k=1}^{N+1} h_{k+1/2} \frac{|v_k - v_{k-1}|}{h_{k+1/2}} = \int_0^1 |D_{\mathcal{T}}v_{\mathcal{T}}(s)| ds$$

On utilise l’inégalité de Cauchy-Schwarz à droite $|v_i|^2 \leq \|D_{\mathcal{T}}v_{\mathcal{T}}\|_{L^2(]0;1[)}^2$, ce qui donne tout de suite (1.50) et en intégrant entre 0 et 1, on aboutit au résultat $\|v\|_{L^2(]0;1[)} \leq \|D_{\mathcal{T}}v_{\mathcal{T}}\|_{L^2(]0;1[)}$. Notons que dans les deux démonstrations, on obtient que $\|u\|_{\infty} \leq \|u\|_{L^2(]0;1[)}$ et que $\|u\|_{\infty} \leq \|u'\|_{L^2(]0;1[)}$. •

Définition 1.27 — Erreur de consistance sur le flux. Soit $u : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ solution du problème (1.1)-(1.2). On se donne une subdivision de $[0; 1]$. On appelle $\tilde{F}_{i+1/2} = -u'(x_{i+1/2})$ le flux exact en $x_{i+1/2}$ et $F_{i+1/2}^* = -(u(x_{i+1}) - u(x_i))/h_{i+1/2}$, l’approximation du flux exact utilisée pour construire le flux numérique $F_{i+1/2} = -(u_{i+1} - u_i)/h_{i+1/2}$. On dit que le flux numérique est consistant d’ordre p s’il existe $C \in \mathbb{R}_+$ ne dépendant que de u telle que l’erreur de consistance sur le flux, définie par :

$$R_{i+1/2} = \tilde{F}_{i+1/2} - F_{i+1/2}^* \quad (1.51)$$

vérifie

$$|R_{i+1/2}| \leq Ch^p. \quad (1.52)$$

Lemme 1.28 — Consistance du flux de diffusion. Soit $u \in \mathcal{C}^2([0; 1])$ solution du problème (1.1)-(1.2). Le flux numérique $F_{i+1/2} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}}$ est consistant d’ordre 1. Plus précisément il existe C ne dépendant que de $\|u''\|_{\infty}$ tel que l’erreur de consistance sur les flux définie par (1.51) vérifie :

$$|R_{i+1/2}| = \left| -u'(x_{i+1/2}) + \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+1/2}} \right| \leq Ch \quad (1.53)$$

Démonstration. La démonstration de ce résultat s’effectue facilement à l’aide de développements de Taylor [exercice 13] où l’on montre aussi que si $x_{i+1/2}$ est au centre de l’intervalle $[x_i; x_{i+1}]$, l’erreur de consistance sur les flux est d’ordre 2, i.e. il existe $C \in \mathbb{R}_+$ ne dépendant que de u telle que $R_{i+1/2} \leq Ch^2$. Notez que cette propriété de consistance est vraie sur les flux et non pas sur l’opérateur $-u''$ [remarque 1.22 et exercice 11]. •

Définition 1.29 — Conservativité. On dit que le schéma volumes finis (1.41)-(1.43) est conservatif, au sens où, lorsqu'on considère une interface $x_{i+1/2}$ entre deux mailles K_i et K_{i+1} , le flux numérique entrant dans une maille est égal à celui sortant de l'autre.

C'est grâce à la conservativité et à la consistance des flux qu'on va montrer la convergence du schéma volumes finis.

Théorème 1.2 — Convergence du schéma volumes finis. On suppose que la solution u du problème (1.1)-(1.2) vérifie $u \in \mathcal{C}^2([0;1])$. On pose $e_i = u(x_i) - u_i$ pour $i = 1, \dots, N$ et $e_0 = e_{N+1} = 0$. On note $e_{\mathcal{T}}$ la fonction constante par mailles et égale à e_i sur la maille i et $D_{\mathcal{T}}e_{\mathcal{T}}$ sa dérivée discrète, au sens de la définition 1.24. Il existe $C \geq 0$ ne dépendant que de u tel que (on rappelle que $h = \sup_{i=1 \dots N} h_i$) :

$$\|D_{\mathcal{T}}e_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\]0;1])} = \left(\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h} \right)^{1/2} \leq Ch, \quad (1.54)$$

$$\|e_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\]0;1])} = \left(\sum_{i=1}^N h e_i^2 \right)^{1/2} \leq Ch \quad (1.55)$$

$$\|e_{\mathcal{T}}\|_{\infty} = \max_{i=1, \dots, N} |e_i| \leq Ch \quad (1.56)$$

Démonstration. écrivons le schéma volumes finis (1.41) ainsi que l'équation exacte (1.40) intégrée sur la maille K_i : $\bar{F}_{i+1/2} - \bar{F}_{i-1/2} = h_i f_i$ où $\bar{F}_{i+1/2}$ est défini dans le lemme 1.28 et soustrayons : $\bar{F}_{i+1/2} - F_{i+1/2} - \bar{F}_{i-1/2} + F_{i-1/2} = 0$. En introduisant $R_{i+1/2} = \bar{F}_{i+1/2} - F_{i+1/2}^*$, on obtient :

$$F_{i+1/2}^* - F_{i+1/2} - F_{i-1/2}^* + F_{i-1/2} = -R_{i+1/2} + R_{i-1/2}$$

ce qui s'écrit encore, au vu de la définition de e_i ,

$$-\frac{e_{i+1} - e_i}{h_{i+1/2}} + \frac{e_i - e_{i-1}}{h_{i-1/2}} = -R_{i+1/2} + R_{i-1/2}$$

On multiplie cette dernière égalité par e_i et on somme de 1 à N :

$$\sum_{i=1}^N -\frac{e_{i+1} - e_i}{h_{i+1/2}} e_i + \sum_{i=1}^N \frac{e_i - e_{i-1}}{h_{i-1/2}} e_i = \sum_{i=1}^N -R_{i+1/2} e_i + \sum_{i=1}^N R_{i-1/2} e_i,$$

ce qui s'écrit encore :

$$\sum_{i=1}^N -\frac{e_{i+1} - e_i}{h_{i+1/2}} e_i + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{e_{i+1} - e_i}{h_{i+1/2}} e_{i+1} = \sum_{i=1}^N -R_{i+1/2} e_i + \sum_{i=0}^{N-1} R_{i+1/2} e_{i+1}$$

En réordonnant les termes, on obtient, en remarquant que $e_0 = 0$ et $e_{N+1} = 0$:

$$\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+1/2}} = \sum_{i=0}^N R_{i+1/2} (e_{i+1} - e_i)$$

Mais

$$\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+1/2}} = \sum_{i=0}^N h_{i+1/2} \left(\frac{e_{i+1} - e_i}{h_{i+1/2}} \right)^2 = \int_0^1 (D_{\mathcal{T}}e_{\mathcal{T}}(s))^2 ds = \|D_{\mathcal{T}}e_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\]0;1])}^2.$$

De plus, $R_{i+1/2} \leq Ch$ (par le lemme 1.28). On a donc

$$\|D_{\mathcal{T}}e_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\]0;1])}^2 \leq Ch \sum_{i=0}^N |e_{i+1} - e_i| = Ch \sum_{i=0}^N h_{i+1/2} \frac{|e_{i+1} - e_i|}{h_{i+1/2}} = Ch \int_0^1 |D_{\mathcal{T}}e_{\mathcal{T}}| dt$$

et, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\|D_{\mathcal{T}}e_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\]0;1])} \leq Ch$. On a ainsi démontré (1.54). On obtient (1.55) et (1.56) par l'inégalité de Poincaré discrète [proposition 1.31]. •

Remarque 1.30 — Espaces fonctionnels et normes discrètes. On rappelle qu'une fonction u de l'espace de Lebesgue $L^2(\]0;1])$ admet une dérivée faible dans $L^2(\]0;1])$ s'il existe $v \in L^2(\]0;1])$

9. Henri-Léon Lebesgue (1875–1941) est un mathématicien français. Il est reconnu pour sa théorie d'intégration publiée initialement dans son mémoire *Intégrale, longueur, aire* à l'université de Nancy en 1902. Il fut l'un des grands mathématiciens français de la première moitié du xx-ème siècle.

10. Une fonction f de $\]0;1[$ dans \mathbb{R} est intégrable au sens de Lebesgue si f est mesurable et

$$\int_{\]0;1[} |f| dt < +\infty.$$

telle que

$$\int_{]0;1[} u(x)\varphi'(x) dx = - \int_{]0;1[} v(x)\varphi(x) dx \quad (1.57)$$

pour toute fonction $\varphi \in C_c^1(]0;1[)$ où $C_c^1(]0;1[)$ désigne l'espace des fonctions de classe C^1 à support compact dans $]0;1[$. On peut montrer que v est unique [brezis]. On notera $v = Du$. On peut remarquer que si $u \in C^1(]0;1[)$ et si on note u' sa dérivée classique, alors $Du = u'$ presque partout. On note $H^1(]0;1[)$ l'ensemble des fonctions de $L^2(]0;1[)$ qui admettent une dérivée faible dans $L^2(]0;1[)$:

$$H^1(]0;1[) = \{u \in L^2(]0;1[) ; Du \in L^2(]0;1[)\}.$$

C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1(]0;1[)} = \int_{]0;1[} (u(x)v(x) dx + Du(x)Dv(x)) dx.$$

Tout élément de $H^1(]0;1[)$ (au sens classe d'équivalence de fonctions) admet un représentant continu et on peut donc définir les valeurs en 0 et en 1 d'une "fonction" de $H^1(]0;1[)$:

$$H_0^1(]0;1[) = \{u \in H^1(]0;1[) ; u(0) = u(1) = 0\}.$$

Pour $u \in H^1(]0;1[)$, on note :

$$\|u\|_{H_0^1} = \left(\int_0^1 (Du(x))^2 dx \right)^{1/2}.$$

C'est une norme sur H_0^1 qui est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^1}$ définie par

$$\|u\|_{H^1} = \left(\int u^2(x) dx + \int (Du)^2(x) dx \right)^{1/2}$$

ce qui se démontre grâce à l'inégalité de Poincaré¹¹ qu'on rappelle :

Proposition 1.31 — Inégalité de Poincaré, cas uni-dimensionnel.

$$\|u\|_{L^2(]0;1[)} \leq \|Du\|_{L^2(]0;1[)} \text{ pour tout } u \in H_0^1(]0;1[). \quad (1.58)$$

La démonstration de cette proposition a été faite dans le cadre de la preuve de la stabilité du schéma en une dimension [proposition 1.25] pour des fonctions régulières mais la même preuve s'applique dans le cas d'une fonction H^1 .

Soit maintenant \mathcal{T} un maillage volumes finis de $[0;1]$ [définition 1.21], on note $X(\mathcal{T})$ l'ensemble des fonctions de $[0;1]$ dans \mathbb{R} , constantes par maille de ce maillage. Pour $v \in X(\mathcal{T})$, on note v_i la valeur de v sur la maille i ; on peut écrire les normes L^2 et L^∞ de v :

$$\|v\|_{L^2(]0;1[)}^2 = \sum_{i=1}^N h_i v_i^2 \quad \text{et} \quad \|v\|_{L^\infty(]0;1[)} = \max_{i=1, \dots, N} |v_i|$$

L'espace $L^2(]0;1[)$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions de carré intégrable au sens de Lebesgue, pour la relation d'équivalence *égale presque partout*, ce qui permet de définir une norme sur $L^2(]0;1[)$ par

$$\|u\|_{L^2(]0;1[)} = \left(\int_{]0;1[} u^2 dt \right)^{1/2}$$

qui en fait un espace complet. Cette norme est associée au produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(]0;1[)} = \int_{]0;1[} uv dt$$

qui en fait un espace de Hilbert [polyinteg].

11. Henri Poincaré (1854–1912) est un mathématicien, physicien et philosophe français. C'est probablement l'un des plus grands hommes de science de cette époque.

Par contre, la fonction v étant constante par maille, elle n'est pas dérivable au sens classique, ni même au sens faible. On peut toutefois définir une norme H^1 discrète de v comme suit :

$$|v|_{1,\mathcal{T}} = \left(\sum_{i=0}^N h_{i+1/2} \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1/2}} \right)^2 \right)^{1/2}$$

ce qui est la norme L^2 de la dérivée discrète $D_{\mathcal{T}}v$ [définition 1.24]. On peut montrer [exercice ??] que si $u_{\mathcal{T}} :]0;1[\rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $u_{\mathcal{T}}(x) = u_i, \forall x \in K_i$ où $(u_i)_{i=1,\dots,N}$ solution de (1.41)-(1.43) alors $|u_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}$ converge dans $L^2(]0;1[)$ lorsque h tend vers 0, vers $\|Du\|_{L^2(]0;1[)}$, où u est la solution du problème (1.1)-(1.2).

Remarque 1.32 — Dimensions supérieures. En une dimension d'espace, on a obtenu une estimation d'erreur en norme H_0^1 discrète et en norme L^∞ . En dimension supérieure ou égale à 2, on aura une estimation en h , en norme H_0^1 discrète, en norme L^2 , mais pas en norme L^∞ . Ceci tient au fait que l'injection de Sobolev $H^1(]0;1[) \subset C(]0;1[)$ n'est vraie qu'en dimension 1. La démonstration de l'estimation d'erreur en norme L^2 (1.55) se prouve alors directement à partir de l'estimation en norme H_0^1 discrète, grâce à une "inégalité de Poincaré discrète", équivalent discret de la célèbre inégalité de Poincaré continue¹² [voir (1.58) pour la dimension 1].

1.3.3 Prise en compte de discontinuités

On considère ici un barreau conducteur constitué de deux matériaux de conductivités λ_1 et λ_2 différentes et dont les extrémités sont plongées dans de la glace. On suppose que le barreau est de longueur 1, que le matériau de conductivité λ_1 (resp. λ_2) occupe le domaine $\Omega_1 =]0;1/2[$ (resp. $\Omega_2 =]1/2;1[$). Le problème de conduction de la chaleur s'écrit alors :

$$\begin{cases} (-\lambda_1(x)u')' = f(x) & x \in]0;1/2[\\ (-\lambda_2(x)u')' = f(x) & x \in]1/2;1[\\ u(0) = u(1) = 0, \\ -(\lambda_1 u')(1/2) = -(\lambda_2 u')(1/2) \end{cases} \quad (1.59)$$

Remarque 1.33 La dernière égalité traduit la conservation du flux de chaleur à l'interface $x = 1/2$. On peut noter que comme λ est discontinu en ce point, la dérivée u' le sera forcément elle aussi.

On choisit de discrétiser le problème par volumes finis. On se donne un maillage volumes finis comme défini par la définition 1.21, en choisissant les mailles telles que la discontinuité de λ soit située sur un interface de deux mailles qu'on note K_k et K_{k+1} . On a donc, avec les notations du paragraphe (1.1.1) $x_{k+1/2} = 0.5$. La discrétisation par volumes finis s'écrit alors

$$F_{i+1/2} - F_{i-1/2} = h_i f_i \quad i = 1, \dots, N$$

où les flux numériques $F_{i+1/2}$ sont donnés par

$$F_{i+1/2} = \lambda_* \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} \quad \text{avec } \lambda_* = \begin{cases} \lambda_1 & \text{si } x_{i+1/2} > 1/2 \\ \lambda_2 & \text{si } x_{i+1/2} < 1/2 \end{cases}$$

Il ne reste donc plus qu'à calculer le flux $F_{k+1/2}$, approximation de $(\lambda u')(x_{k+1/2})$ (avec $x_{k+1/2} = 1/2$). On introduit pour cela une inconnue auxiliaire $u_{k+1/2}$ que l'on pourra éliminer plus tard et on écrit une discrétisation du flux de part et d'autre de l'interface :

$$F_{k+1/2} = -\lambda_1 \frac{u_{k+1/2} - u_k}{h_k^+} \quad \text{avec } h_k^+ = x_{k+1/2} - x_k \quad (1.60)$$

$$F_{k+1/2} = -\lambda_2 \frac{u_{k+1} - u_{k+1/2}}{h_{k+1}^-} \quad \text{avec } h_{k+1}^- = x_{k+1} - x_{k+1/2} \quad (1.61)$$

12. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et $u \in H_0^1(\Omega)$, alors $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{diam}(\Omega) \|Du\|_{L^2(\Omega)}$.

L'élimination (et le calcul) de l'inconnue se fait en écrivant la conservation du flux numérique :

$$-\lambda_1 \frac{u_{k+1/2} - u_k}{h_k^+} = -\lambda_2 \frac{u_{k+1} - u_{k+1/2}}{h_{k+1}^-}$$

On en déduit la valeur de $u_{k+1/2}$

$$u_{k+1/2} = \frac{\frac{\lambda_1}{h_k^+} u_k + \frac{\lambda_2}{h_{k+1}^-} u_{k+1}}{\frac{\lambda_1}{h_k^+} + \frac{\lambda_2}{h_{k+1}^-}}$$

On remplace $u_{k+1/2}$ par cette valeur dans l'expression du flux $F_{k+1/2}$ et on obtient :

$$F_{k+1/2} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{h_k^+ \lambda_2 + h_{k+1}^- \lambda_1} (u_{k+1} - u_k).$$

Si le maillage est uniforme, on obtient

$$F_{k+1/2} = \frac{2\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right).$$

Le flux est donc calculé en faisant intervenir la moyenne harmonique des conductivités λ_1 et λ_2 . Notons que lorsque $\lambda_1 = \lambda_2$, on retrouve la formule habituelle du flux.

1.4 Diffusion bidimensionnelle

1.4.1 Différences finies

On considère maintenant le problème de diffusion dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.62)$$

Le problème est bien posé au sens où si $f \in C^1(\bar{\Omega})$, alors il existe une unique solution $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, solution de (1.62). Si $f \in L^2(\Omega)$ et si Ω est convexe (ou à bord régulier) alors il existe une unique fonction $u \in H^2(\Omega)$ au sens faible¹³ de (1.62), c'est-à-dire qui vérifie :

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

On peut montrer que si $u \in C^2(\bar{\Omega})$, alors u est solution de (1.62) si et seulement si u est solution faible de (1.62). Pour discrétiser le problème, on se donne un certain nombre de points, alignés dans les directions x et y , comme représentés sur la figure 1.4 (on prend un pas de maillage uniforme et égal à h). Certains de ces points sont à l'intérieur du domaine Ω , d'autres sont situés sur la frontière $\partial\Omega$. Comme en une dimension d'espace, les inconnues discrètes sont associées aux nœuds du maillage. On note $\{P_i, i \in I\}$ les points de discrétisation et on écrit l'équation aux dérivées partielles en ces points :

$$-\Delta u(P_i) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_i) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(P_i) = f(P_i).$$

Dans le cas de points "vraiment intérieurs", tel que le point P_1 sur la figure 1.4, *i.e.* dont tous les points voisins sont situés à l'intérieur de Ω , les quotients différentiels

$$\frac{2u(P_1) - u(P_2) - u(P_3)}{h^2} \quad \text{et} \quad \frac{2u(P_1) - u(P_5) - u(P_4)}{h^2}$$

sont des approximations consistantes à l'ordre 2 de $e - \partial_1^2 u(P_1)$ et $-\partial_2^2 u(P_1)$. Par contre, pour un point "proche" du bord tel que le point \tilde{P}_1 , les mêmes approximations (avec les points \tilde{P}_2, \tilde{P}_3 ,

¹³. Par définition, $H^2(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de $L^2(\Omega)$ qui admet des dérivées faibles jusqu'à l'ordre 2 dans $L^2(\Omega)$.

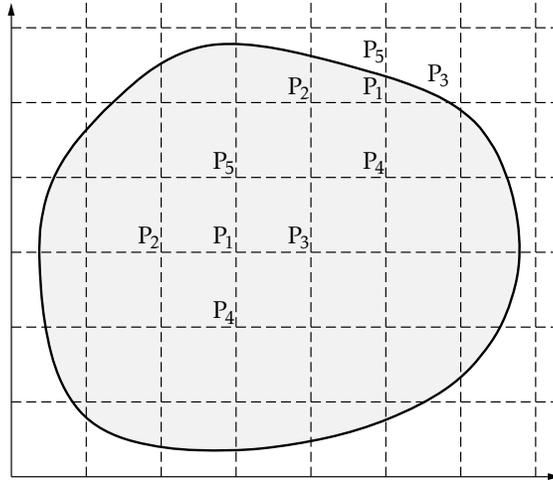


FIGURE 1.4 – Discretisation différences finies bi-dimensionnelle

\bar{P}_4 et \bar{P}_5) ne seront que d'ordre 1 en raison des différences de distance entre les points (faire les développements de Taylor pour s'en convaincre).

Une telle discrétisation amène à un système linéaire $A_h U_h = b_h$ où la structure de A_h , en particulier sa *largeur de bande*, c'est-à-dire le nombre de diagonales non nulles, dépend de la numérotation des nœuds. On peut montrer que la matrice A_h est monotone et le schéma est stable. De la consistance et la stabilité, on déduit, comme en une dimension d'espace, la convergence du schéma.

1.4.2 Volumes finis

Problème modèle

On considère le problème modèle suivant (par exemple de conduction de la chaleur) :

$$-\operatorname{div}(\lambda_i \nabla u(x)) = f(x) \quad x \in \Omega_i \quad i = 1, 2 \quad (1.63)$$

où $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$ sont les conductivités thermiques dans les domaines Ω_1 et Ω_2 avec $\Omega_1 =]0; 1[\times]0; 1[$ et $\Omega_2 =]0; 1[\times]1; 2[$. On appelle $\Gamma_1 =]0; 1[\times \{0\}$, $\Gamma_2 = \{1\} \times]0; 2[$, $\Gamma_3 =]0; 1[\times \{2\}$ et $\Gamma_4 = \{0\} \times]0; 2[$ les frontières extérieures de Ω et on note $I =]0; 1[\times \{1\}$ l'interface entre Ω_1 et Ω_2 [figure 1.5]. Dans la suite, on notera λ la conductivité thermique sur Ω avec $\lambda|_{\Omega_i} = \lambda_i$, $i = 1, 2$. On va considérer plusieurs types de conditions aux limites en essayant d'expliquer leur sens physique. On rappelle que le flux de chaleur par diffusion est égal \mathbf{q} est donné par la loi de Fourier $\mathbf{q} = -\lambda \nabla u \cdot \mathbf{n}$ où \mathbf{n} est le vecteur normal unitaire à la surface à travers laquelle on calcule le flux.

Conditions aux limites de type Fourier sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$ On suppose qu'il existe un transfert thermique entre les parois Γ_1 et Γ_3 et l'extérieur. Ce transfert est décrit par la condition de Fourier¹⁴ qui exprime que le flux transféré est proportionnel à la différence de température entre l'extérieur et l'intérieur :

$$-\lambda \nabla u \cdot \mathbf{n}(x) = \alpha(u(x) - u_{\text{ext}}) \quad \forall x \in \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \quad (1.64)$$

où $\alpha > 0$ est le coefficient de transfert thermique, \mathbf{n} , le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$ extérieur à Ω et u_{ext} est la température extérieure (donnée).

Conditions aux limites de type Neumann sur Γ_2 On suppose que la paroi Γ_2 est parfaitement isolée et que le flux de chaleur à travers cette paroi est donc nul. Ceci se traduit par une condition dite de *Neumann homogène* :

$$-\lambda \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \forall x \in \Gamma_2. \quad (1.65)$$

14. Robin dans la littérature anglo-saxonne

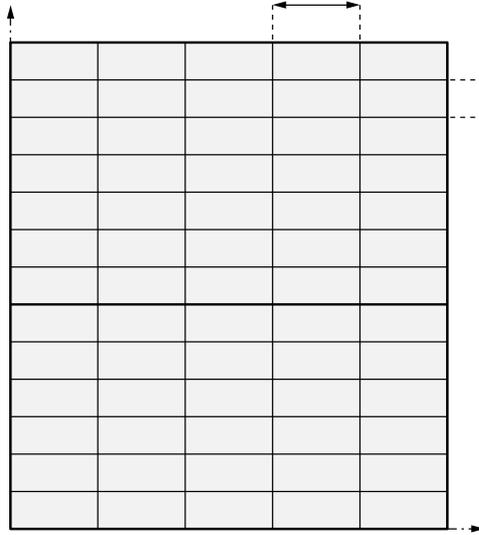


FIGURE 1.5 – Domaine d'étude

Conditions aux limites de type Dirichlet sur Γ_4 Sur la paroi Γ_4 , on suppose que la température est fixée. Ceci est une condition assez difficile à obtenir expérimentalement pour un problème de type chaleur, mais qu'on peut rencontrer dans d'autres problèmes pratiques.

$$u(x) = g(x) \quad \forall x \in \Gamma_4 \quad (1.66)$$

Conditions sur l'interface I On suppose que l'interface I est par exemple le siège d'une réaction chimique surfacique θ qui provoque un dégagement de chaleur surfacique. On a donc un saut du flux de chaleur au travers de l'interface I. Ceci se traduit par la condition de saut suivante :

$$-\lambda_1 \nabla u_1(x) \cdot \mathbf{n}_1 - \lambda_2 \nabla u_2(x) \cdot \mathbf{n}_2 = \theta(x) \quad x \in I \quad (1.67)$$

où \mathbf{n}_i désigne le vecteur unitaire normal à I et extérieur à Ω_i et θ est une fonction donnée.

Discrétisation par volumes finis

On se donne un maillage *admissible* \mathcal{T} de Ω

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}} \bar{K}.$$

Par *admissible*, on entend un maillage tel qu'il existe des points $(x_K)_{K \in \mathcal{T}}$ situés dans les mailles, tels que chaque segment $x_K x_L$ soit orthogonal à l'arête $K|L$ séparant la maille K de la maille L, comme visible sur la figure 1.6. Cette condition permet pour obtenir une approximation consistante du

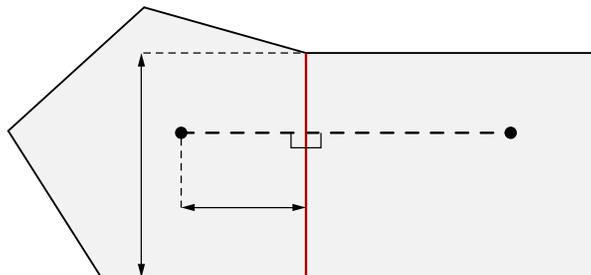


FIGURE 1.6 – Condition d'orthogonalité pour un maillage volumes finis

flux de diffusion (c'est-à-dire de la dérivée normale sur l'arête $K|L$) avec deux inconnues discrètes [remarque 1.34]. Dans le cas présent, le domaine représenté sur la figure 1.5 étant rectangulaire, cette condition est particulièrement facile à vérifier en prenant un maillage rectangulaire. Par souci de simplicité, on prendra ce maillage uniforme et on notera $h_x = 1/n$ le pas de discrétisation dans la direction x et $h_y = 1/p$ le pas de discrétisation dans la direction y . Le maillage est donc choisi de telle sorte que l'interface I coïncide avec un ensemble d'arêtes du maillage qu'on notera \mathcal{E}_I . On a donc

$$\bar{I} = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{E}_I} \bar{\sigma},$$

où le signe $\bar{\cdot}$ désigne l'adhérence de l'ensemble. On se donne ensuite des inconnues discrètes $(u_K)_{K \in \mathcal{T}}$ associées aux mailles et $(u_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}}$ associées aux arêtes.

Pour obtenir le schéma volumes finis, on commence par établir les bilans par maille en intégrant l'équation sur chaque maille K (notons que ceci est faisable en raison du fait que l'équation est sous forme conservative, c'est-à-dire sous la forme $-\text{div}(\text{flux}) = f$). On obtient donc :

$$\int_K -\text{div}(\lambda_i \nabla u(x)) dx = \int_K f(x) dx,$$

soit encore, par la formule de Stokes,

$$\int_{\partial K} -\lambda_i \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}(x) d\gamma(x) = m(K) f_K,$$

où \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$, extérieur à Ω et γ désigne le symbole d'intégration sur la frontière. On décompose ensuite le bord de chaque maille K en arêtes du maillage :

$$\partial K = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \bar{\sigma}$$

où \mathcal{E}_K représente l'ensemble des arêtes de K . On obtient alors :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{\sigma} -\lambda_i \nabla u \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} d\gamma(x) = m(K) f_K$$

où $\mathbf{n}_{K,\sigma}$ est le vecteur unitaire normal à σ extérieur à K . On écrit alors une *équation approchée* :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} = m(K) f_K,$$

où $F_{K,\sigma}$ est le flux numérique à travers σ , qui approche le flux exact

$$F_{K,\sigma}^* = \int_{\sigma} -\lambda_i \nabla u \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} d\gamma(x)$$

Pour obtenir le schéma numérique, il nous reste à exprimer le flux numérique $F_{K,\sigma}$ en fonction des inconnues discrètes $(u_K)_{K \in \mathcal{T}}$ associées aux mailles et $(u_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}}$ associées aux arêtes (ces dernières seront ensuite éliminées) :

$$F_{K,\sigma} = -\lambda_i \frac{u_\sigma - u_K}{d_{K,\sigma}} m(\sigma) \quad (1.68)$$

où $d_{K,\sigma}$ est la distance du point x_K à l'arête σ et $m(\sigma)$ est la longueur de l'arête σ [figure 1.6]. L'équation associée à l'inconnue u_K est donc :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} = m(K) f_K$$

On a ainsi obtenu autant d'équations que de mailles. Il nous reste maintenant à écrire une équation pour chaque arête, afin d'obtenir autant d'équations que d'inconnues.

En ce qui concerne les arêtes intérieures, on écrit la conservativité du flux, ce qui nous permettra d'éliminer les inconnues associées aux arêtes internes. Soit $\sigma = K|L \subset \Omega_i$. On a alors :

$$F_{K,\sigma} = -F_{L,\sigma} \quad (1.69)$$

On vérifiera par le calcul [exercice 22] que, après élimination de u_σ , ceci donne

$$F_{K,\sigma} = -F_{L,\sigma} = \lambda_i \frac{m(\sigma)}{d_\sigma} (u_K - u_L) \quad (1.70)$$

où $d_\sigma = d(x_K, x_L)$.

Remarque 1.34 — Consistance du flux. On appelle erreur de consistance associée au flux (1.68) l'expression :

$$R_{K,\sigma} = -\frac{1}{m(\sigma)} \int_\sigma \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} d\gamma(x) - F_{K,\sigma}^* \quad \text{avec} \quad F_{K,\sigma}^* = -\lambda_i \frac{u(x_\sigma) - u(x_K)}{d_{K,\sigma}} m(\sigma)$$

où x_σ est l'intersection de σ avec l'arête $K|L$, u la solution exacte. On dit que le flux numérique donné par l'expression (1.68) est *consistant* si

$$\lim_{h(T) \rightarrow 0} \max_{K \in \mathcal{T}, \sigma \in \mathcal{K}} |R_{K,\sigma}| = 0$$

où $h(T)$ est le pas du maillage, *i.e.* $h(T) = \max_{K \in \mathcal{T}} \text{diam}(K)$ avec $\text{diam}(K) = \sup_{(x,y) \in K^2} d(x,y)$. On vérifie facilement que si u est suffisamment régulière et si le segment $x_K x_L$ est colinéaire au vecteur normal \mathbf{n} alors le flux numérique est consistant. Cette propriété, allée à la propriété de conservativité des flux, permet de démontrer la convergence du schéma, comme on l'a fait dans le cas unidimensionnel.

Remarque 1.35 — Cas du maillage cartésien de la figure 1.5. Dans le cas du maillage carésien considéré pour notre problème, il est naturel de choisir les points x_K comme les centres de gravité des mailles. Comme le maillage est uniforme, on a donc $d_{K,\sigma} = h_x/2$ (respectivement $h_y/2$) et $|\sigma| = h_y$ (respectivement $|\sigma| = h_x$) pour une arête σ verticale (respectivement horizontale).

écrivons maintenant la discrétisation des conditions aux limites et interface :

Condition de Neumann sur Γ_2 Sur Γ_2 , on a la condition de Neumann (1.65) : $\lambda_i \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0$, qu'on discrétise par $\sigma \in \mathcal{E}_K$ et $\sigma \subset \Gamma_2$, $F_{K,\sigma} = 0$.

Condition de Dirichlet sur Γ_4 La discrétisation de la condition de Dirichlet (1.66) peut s'effectuer de la manière suivante :

$$u_\sigma = \frac{1}{m(\sigma)} \int_\sigma g(y) d\gamma(y).$$

L'expression du flux numérique est alors :

$$F_{K,\sigma} = -\lambda_i \frac{u_\sigma - u_K}{d_{K,\sigma}} m(\sigma)$$

Condition de Fourier sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$ Sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$ on a la condition de Fourier (1.64) :

$$-\lambda_i \nabla u \cdot \mathbf{n} = \alpha(u(x) - u_{\text{ext}}) \quad \forall x \in \Gamma_1 \cup \Gamma_3$$

qu'on discrétise par

$$F_{K,\sigma} = -m(\sigma) \lambda_i \frac{u_\sigma - u_K}{d_{K,\sigma}} = m(\sigma) \alpha (u_\sigma - u_{\text{ext}}) \quad \text{pour } \sigma \subset \Gamma_1 \cup \Gamma_3.$$

Après élimination de u_σ [exercice 22], on obtient :

$$F_{K,\sigma} = \frac{\alpha \lambda_i m(\sigma)}{\lambda_i + \alpha d_{K,\sigma}} (u_K - u_{\text{ext}}) \quad (1.71)$$

Condition de saut pour le flux sur I Si $\sigma = K|L \in \mathcal{E}_I$, la discrétisation de la condition de saut (1.67) se discrétise facilement en écrivant :

$$F_{K,\sigma} + F_{L,\sigma} = \theta_\sigma \quad \text{avec} \quad \theta_\sigma = \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \theta(x) d\gamma(x) \quad (1.72)$$

Après élimination de l'inconnue u_σ [exercice 22], on obtient

$$F_{K,\sigma} = \frac{\lambda_1 m(\sigma)}{\lambda_1 d_{L,\sigma} + \lambda_2 d_{K,\sigma}} [\lambda_2 (u_K - u_L) + d_{L,\sigma} \theta_\sigma] \quad (1.73)$$

On a ainsi éliminé toutes les inconnues u_σ , ce qui permet d'obtenir un système linéaire dont les inconnues sont les valeurs $(u_K)_{K \in \mathcal{T}}$.

Remarque 1.36 — Implantation informatique de la méthode. Lors de l'implantation informatique, la matrice du système linéaire est construite *par arête* (contrairement à une matrice éléments finis, dont nous verrons plus tard la construction *par élément*), c'est-à-dire que pour chaque arête, on additionne la contribution du flux au coefficient de la matrice correspondant à l'équation et à l'inconnue concernées.

1.5 Exercices

1.5.1 Énoncés

corrigé p.46

Exercice 1 — Différences et volumes finis avec conditions de Dirichlet non homogènes. On considère le problème :

$$\begin{cases} -u''(x) + \sin(u(x)) = f(x) & x \in]0; 1[\\ u(0) = a \\ u(1) = b \end{cases} \quad (1.74)$$

1. Écrire les schémas de différences finies et volumes finis avec pas constant pour le problème (1.74). Pour le schéma volumes finis, on utilisera l'approximation

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \sin(u(x)) dx \simeq (x_{i+1/2} - x_{i-1/2}) \sin(u(x_i))$$

2. Comparer les schémas ainsi obtenus.

Exercice 2 — Différences et volumes finis avec conditions mixtes. On considère le problème :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & x \in]0; 1[\\ u(0) - u'(0) = a \\ u'(1) = b \end{cases} \quad (1.75)$$

Écrire les schémas de différences finies et volumes finis avec pas constant pour le problème (1.75), et comparer les schémas ainsi obtenus.

corrigé p.46

Exercice 3 — Principe du maximum. On considère le problème :

$$-u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad 0 < x < 1, \quad (1.76a)$$

$$u(0) = a, \quad (1.76b)$$

$$u(1) = b, \quad (1.76c)$$

où $c \in C([0; 1], \mathbb{R}_+)$, $f \in C([0; 1], \mathbb{R})$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Donner la discrétisation par différences finies de ce problème. On appelle U_h la solution approchée c'est-à-dire $U_h = (u_1, \dots, u_N)$ où u_i est l'inconnue discrète en $x_i = ih$ où $h = \frac{1}{N+1}$ le pas du maillage.
2. On suppose ici que $c = 0$ et $f \geq 0$. Montrer que $u_i \geq \min(a, b)$ pour tout $i = 1, \dots, N$.

Exercice 4 — Équation de diffusion réaction. On s'intéresse au problème elliptique unidimensionnel suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + 2u(x) = x & x \in]0;1[\\ u(0) = 1 \\ u'(1) + u(1) = 0 \end{cases} \quad (1.77)$$

1. Écrire une discrétisation de (1.77) par différences finies pour un maillage uniforme. écrire le système linéaire obtenu.
2. Écrire une discrétisation de (1.77) par volumes finis de (1.77) pour un maillage uniforme. Écrire le système linéaire obtenu.

corrigé p.47

Exercice 5 — équation de transport-diffusion sous forme non-conservative. Cet exercice concerne la discrétisation d'une équation de transport-diffusion sous forme non-conservative (exercice 5) puis conservative (exercice 6). On a déjà vu dans le cours qu'en une dimension d'espace, le terme de diffusion unidimensionnel est de la forme $-u''$ (tout du moins dans le cas d'un matériau homogène de conductivité constante). On appelle terme de transport un terme de la forme $v(x)u'(x)$, dite *non conservative*, ou $(v(x)u(x))'$, dite *conservative*, où v est la *vitesse de transport* donnée et u l'inconnue, qui est la quantité transportée (une concentration de polluant, par exemple). Remarquez d'abord que si la vitesse v est constante, les deux formes sont identiques, puisque $(v(x)u(x))' = v'(x)u(x) + v(x)u'(x) = v(x)u'(x)$. La deuxième forme est dite conservative car elle est obtenue à partir de l'écriture de la conservation de la masse (par exemple) sur un petit élément $x + \delta x$, en passant à la limite lorsque δx tend vers 0. La première forme, non conservative, apparaît dans des modèles de mécanique de fluides (écoulements compressibles polyphasiques, par exemple).

Soient $v \in C([0;1], \mathbb{R}_+)$ et $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + v(x)u_x(x) = 0 & x \in]0;1[\\ u(0) = a_0 \\ u(1) = a_1 \end{cases} \quad (1.78)$$

On admettra qu'il existe une unique solution $u \in C([0;1], \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^2(]0;1[, \mathbb{R})$ à ce problème. On cherche à approcher cette solution par une méthode de différences finies. On se donne un pas de maillage $h = 1/N + 1$ uniforme, des inconnues discrètes u_1, \dots, u_N censées approcher les valeurs $u(x_1), \dots, u(x_N)$. On considère le schéma aux différences finies suivant :

$$\begin{cases} \frac{2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}}{h^2} + \frac{v_i(u_i - u_{i-1})}{h} = 0 & i = 1, \dots, N \\ u(0) = a_0 \\ u(1) = a_1 \end{cases} \quad (1.79)$$

où $v_i = v(x_i)$ pour $i = 1, \dots, N$. Noter que le terme de convection $v(x_i)u'(x_i)$ est approché par $v(x_i)(u(x_{i+1/2}) - u(x_{i-1/2}))/h$. Comme la vitesse v_i est positive ou nulle, on choisit d'approcher $u(x_{i+1/2})$ par la valeur *amont*, c'est-à-dire $u(x_i)$, d'où le schéma.

1. Montrer que le système (1.79) s'écrit sous la forme $MU = b$ avec $U = (u_1, \dots, u_N)$, $b \in \mathbb{R}^N$ et M est une matrice telle que :
 - (a) $MU \geq 0 \Rightarrow U \geq 0$ (les inégalités s'entendent composante par composante);
 - (b) M est inversible;
 - (c) Si U est solution de $MU = b$ alors $\min(a_0, a_1) \leq u_i \leq \max(a_0, a_1)$.
2. Montrer que M est une M-matrice, c'est-à-dire que M vérifie :
 - (a) $m_{i,i} > 0$ pour $i = 1, \dots, n$;
 - (b) $m_{i,j} \leq 0$ pour $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$;
 - (c) M est inversible;
 - (d) $M^{-1} \geq 0$.

corrigé p.48

Exercice 6 — équation de transport-diffusion sous forme conservative. Il est conseillé d'étudier l'exercice 5 avant celui-ci.

Soit $v \in C([0;1], \mathbb{R}_+) \cap C^1(]0;1[, \mathbb{R})$, et on considère le problème :

$$\begin{cases} -u''(x) + (vu)'(x) = 0 & x \in]0;1[\\ u(0) = a_0 \\ u(1) = a_1 \end{cases} \quad (1.80)$$

On admettra qu'il existe une unique solution $u \in C([0;1], \mathbb{R}) \cap C^2(]0;1[, \mathbb{R})$ à ce problème. On cherche ici encore à approcher cette solution par une méthode de différences finies. On se donne un pas de maillage $h = 1/(N+1)$ uniforme, des inconnues discrètes u_1, \dots, u_N censées approcher les valeurs $u(x_1), \dots, u(x_N)$. On considère le schéma aux différences finies suivant :

$$\begin{cases} \frac{2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}}{h^2} + \frac{v_{i+1/2}u_i - v_{i-1/2}u_{i-1}}{h} = 0 & i = 1, \dots, N \\ u(0) = a_0 \\ u(1) = a_1 \end{cases} \quad (1.81)$$

où $v_{i+1/2} = v((x_i + x_{i+1})/2)$, pour $i = 0, \dots, N$. Noter que le terme de convection $(vu)'(x_i)$ peut être approché par :

$$\frac{v(x_{i+1/2})u(x_{i+1/2}) - v(x_{i-1/2})u(x_{i-1/2})}{h}$$

Comme $v(x_{i+1/2}) \geq 0$, on choisit d'approcher $u(x_{i+1/2})$ par la valeur *amont*, c'est-à-dire $u(x_i)$. C'est une valeur amont dans le sens où elle est choisie en amont de l'écoulement, si l'on suppose que v est la vitesse de l'écoulement. On dit que le schéma est *décentré amont*.

1. Montrer que le système (1.81) s'écrit sous la forme $MU = b$ avec $U = (u_1, \dots, u_N)$, $b \in \mathbb{R}^N$;
2. Pour $U = (u_1, \dots, u_N)$ et $W = (w_1, \dots, w_N) \in \mathbb{R}^N$, calculer $MU \cdot W$, et en déduire l'expression de $(M^t W)_i$, pour $i = 1, \dots, N$ (on distinguera les cas $i = 2, \dots, N-1$, $i = 1$ et $i = N$;
3. Soit $W \in \mathbb{R}^N$:
 - (a) montrer que si $M^t W \geq 0$ alors $W \geq 0$; en déduire que si $U \in \mathbb{R}^N$ est tel que $MU \geq 0$ alors $U \geq 0$;
 - (b) en déduire que si $U \in \mathbb{R}^N$ est tel que $MU \geq 0$ alors $U \geq 0$.
4. Montrer que M est une M-matrice ;
5. Montrer que U solution de (1.81) peut ne pas vérifier $\min(a_0, a_1) \leq u_i \leq \max(a_0, a_1)$.

corrigé p.48

Exercice 7 — Conditionnement efficace. Soit $f \in C([0;1])$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, N impair. On pose $h = 1/(N+1)$. Soit A la matrice définie par (1.37), issue d'une discrétisation par différences finies (vue en cours) du problème (1.1)-(1.2). Pour $u \in \mathbb{R}^N$, on note u_1, \dots, u_N les composantes de u . Pour $u \in \mathbb{R}^N$, on dit que $u \geq 0$ si $u_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$. Pour $u, v \in \mathbb{R}^N$, on note $u \cdot v = \sum_{i=1}^N u_i v_i$. On munit \mathbb{R}^N de la norme suivante : pour $u \in \mathbb{R}^N$, $\|u\| = \max\{|u_i|, i \in \{1, \dots, N\}\}$. On munit alors $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ de la norme induite, également notée $\|\cdot\|$, c'est-à-dire $\|B\| = \max\{\|Bu\|, u \in \mathbb{R}^N \text{ tel que } \|u\| = 1\}$, pour tout $B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

Partie I Conditionnement de la matrice et borne sur l'erreur relative

1. Existence et positivité de A^{-1} . Soient $b \in \mathbb{R}^N$ et $u \in \mathbb{R}^N$ tel que $Au = b$. Remarquer que $Au = b$ peut s'écrire :

$$\begin{cases} \frac{u_i - u_{i-1}}{h^2} + \frac{u_i - u_{i+1}}{h^2} = b_i & \forall i \in \{1, \dots, N\} \\ u_0 = 0 \\ u_{N+1} = 0 \end{cases} \quad (1.82)$$

Montrer que $b \geq 0 \Rightarrow u \geq 0$. [On pourra considérer $p \in \{0, \dots, N+1\}$ tel que $u_p = \min\{u_j, j \in \{0, \dots, N+1\}\}$.] En déduire que A est inversible.

- On considère la fonction $\varphi \in C([0; 1], \mathbb{R})$ définie par $\varphi(x) = (1/2)x(1-x)$ pour tout $x \in [0; 1]$. On définit alors $\phi \in \mathbb{R}^N$ par $\phi_i = \phi(ih)$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$. Montrer que $(A\phi)_i = 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$.
- Calcul de $\|A^{-1}\|$ — Soient $b \in \mathbb{R}^N$ et $u \in \mathbb{R}^N$ tels que $Au = b$. Montrer que $\|u\| \leq (1/8)\|b\|$ [Calculer $A(u \pm \|b\|\phi)$ avec ϕ défini à la question 2 et utiliser la question 1]. En déduire que $\|A^{-1}\| \leq 1/8$ puis montrer que $\|A^{-1}\| = 1/8$.
- Calcul de $\|A\|$ — Montrer que $\|A\| = \frac{4}{h^2}$.
- Conditionnement pour la norme $\|\cdot\|$ — Calculer $\|A^{-1}\|\|A\|$. Soient $b, \delta_b \in \mathbb{R}^N$. Soient $u, \delta_u \in \mathbb{R}^N$ tel que $Au = b$ et $A(u + \delta_u) = b + \delta_b$. Montrer que

$$\frac{\|\delta_u\|}{\|u\|} \leq \|A^{-1}\|\|A\| \frac{\|\delta_b\|}{\|b\|}$$

Montrer qu'un choix convenable de b et δ_b donne l'égalité dans l'inégalité précédente.

Partie II Borne réaliste sur l'erreur relative : Conditionnement efficace On se donne maintenant $f \in C([0; 1], \mathbb{R})$ et on suppose (pour simplifier...) que $f(x) > 0$ pour tout $x \in]0; 1[$. On prend alors, dans cette partie, $b_i = f(ih)$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$. On considère aussi le vecteur φ défini à la question 2 de la partie I.

- Montrer que $h \sum_{i=1}^N b_i \varphi_i \rightarrow \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx$ quand $N \rightarrow \infty$ et que $\sum_{i=1}^N b_i \varphi_i > 0$ pour tout N . En déduire qu'il existe $\alpha > 0$, ne dépendant que de f tel que $h \sum_{i=1}^N b_i \varphi_i \geq \beta$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$.
- Soit $u \in \mathbb{R}^N$ tel que $Au = b$. Montrer que $N\|u\| \geq \sum_{i=1}^N u_i = u \cdot A\varphi \geq \beta/h$ (avec β donné à la question 1). Soit $\delta_b \in \mathbb{R}^N$ et $\delta_u \in \mathbb{R}^N$ tel que $A(u + \delta_u) = b + \delta_b$. Montrer que

$$\frac{\|\delta_u\|}{\|u\|} \leq \frac{\|f\|_{L^\infty(]0;1])} \|\delta_b\|}{8\beta \|b\|}$$

- Comparer $\|A^{-1}\|\|A\|$ et $\|f\|_{L^\infty(]0;1])}/8\beta$ quand $N \rightarrow \infty$.

corrigé p.50

Exercice 8 — Conditionnement en réaction diffusion 1D. On s'intéresse au conditionnement pour la norme euclidienne de la matrice issue d'une discrétisation par différences finies du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) & x \in]0; 1[\\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases} \quad (1.83)$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note $U = (u_j)_{j=1 \dots N}$ une valeur approchée de la solution u du problème (1.83) aux points $(j/(N+1))_{j=1 \dots N}$.

- Montrer que la discrétisation par différences finies de ce problème sur maillage uniforme de pas $h = 1/(N+1)$ consiste à chercher U comme solution du système linéaire $AU = (f(j/(N+1)))_{j=1 \dots N}$ où la matrice $A \in M_N(\mathbb{R})$ est définie par $A = (N+1)^2 B + \text{Id}$ où Id désigne la matrice identité et

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Valeurs propres de la matrice B . — On rappelle que le problème aux valeurs propres

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x) & x \in]0; 1[\\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases} \quad (1.84)$$

admet la famille $(\lambda_k, u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, $\lambda_k = (k\pi)^2$ et $u_k(x) = \sin(k\pi x)$ comme solution. Montrer que les vecteurs $U_k = (u_k(j/(N+1)))_{j=1 \dots N}$ sont des vecteurs propres de la matrice B. En déduire toutes les valeurs propres de la matrice B.

3. En déduire les valeurs propres de la matrice A.
4. En déduire le conditionnement pour la norme euclidienne de la matrice A.

Exercice 9 — Erreur de consistance. On considère la discrétisation à pas constant par le schéma aux différences finies symétrique à trois points du problème (1.1)-(1.2) avec $f \in C([0;1])$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, N impair. On pose $h = 1/(N+1)$. On note u la solution exacte, $x_i = ih$, pour $i = 1, \dots, N$ les points de discrétisation, et $(u_i)_{i=1, \dots, N}$ la solution du système discrétisé.

1. écrire le système linéaire obtenu.
2. Montrer que si f est constante, alors

$$\max_{1 \leq i \leq N} |u_i - u(x_i)| = 0.$$

3. Soit N fixé, et $\max_{1 \leq i \leq N} |u_i - u(x_i)| = 0$. A-t-on forcément f est constante sur $[0;1]$?

corrigé p.51

Exercice 10 — Problème elliptique 1D et discrétisation par différences finies. Soit $f \in C^2([0;1])$. On s'intéresse au problème suivant [ciarletex] :

$$\begin{cases} -u''(x) + \frac{u'(x)}{1+x} = f(x) & x \in]0;1[\\ u(0) = a \\ u(1) = b \end{cases} \quad (1.85)$$

On admet que ce problème admet une et une seule solution u et on suppose que $u \in C^4(]0;1[)$. On cherche une solution approchée de (??) par la méthode des différences finies. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, et $h = 1/(N+1)$. On note u_i la valeur approchée recherchée de u au point ih , pour $i = 0, \dots, N+1$. On utilise les approximations centrées les plus simples de u' et u'' aux points ih , $i = 1, \dots, N$. On pose $u_h = (u_1, \dots, u_N)$.

1. Montrer que u_h est solution d'un système linéaire de la forme $A_h u_h = b_h$; donner A_h et b_h .
2. Montrer que le schéma numérique obtenu est consistant et donner une majoration de l'erreur de consistance (on rappelle que l'on a supposé $u \in C^4$).
3. Soit $v \in \mathbb{R}^N$, montrer que $A_h v \geq 0 \Rightarrow v \geq 0$ (ceci s'entend composante par composante). Cette propriété s'appelle conservation de la positivité. En déduire que A_h est monotone.
4. On définit θ par

$$\theta(x) = -\frac{1}{2}(1+x)^2 \ln(1+x) + \frac{2}{3}(x^2 + 2x) \ln 2 \quad x \in [0;1].$$

- (a) Montrer qu'il existe $C \geq 0$, indépendante de h , tel que

$$\max_{1 \leq i \leq N} \left| \frac{-\theta(x_{i-1}) + 2\theta(x_i) - \theta(x_{i+1}))}{h^2} + \frac{\theta(x_{i+1}) - \theta(x_{i-1}))}{2h(1+ih)} - 1 \right| \leq Ch^2.$$

- (b) On pose $\theta_h = (\theta_1, \dots, \theta_N)$. Montrer que $(A_h \theta_h)_i \geq 1 - Ch^2$, pour $i = 1, \dots, N$.

- (c) Montrer qu'il existe $M \geq 0$ ne dépendant pas de h tel que $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq M$.

5. Montrer la convergence, en un sens à définir, de u_h vers u .
6. Que peut on dire si $u \notin C^4$ mais seulement $u \in C^2$ ou C^3 ?
7. On remplace dans (??) $\frac{1}{1+x}$ par $\alpha u'(x)$ avec α donné (par exemple $\alpha = 100$). On utilise pour approcher (??) le même principe que précédemment (approximations centrées de u' et u''). Que peut on dire sur la consistance, la stabilité, la convergence du schéma numérique?

corrigé p.54

Exercice 11 — Non consistance des volumes finis. Montrer que la discrétisation de l'opérateur $-u''$ par le schéma volumes finis n'est pas toujours consistante au sens des différences finies, *i.e.* que l'erreur de consistance définie par (voir remarque 1.22)

$$R_i = \frac{1}{h_i} \left(\frac{-u(x_{i+1}) + u(x_i)}{h_{i+1/2}} + \frac{u(x_i) - u(x_{i-1}))}{h_{i-1/2}} \right) - u''(x_i)$$

ne tend pas toujours vers 0 lorsque h tend vers 0.

Exercice 12 — Condition de Fourier. On reprend ici la discrétisation du flux sortant en 1 pour le problème (1.1) comme la condition de Fourier (1.16) en 1 et la condition de Neumann (1.15) en 0. On reprend les notations du paragraphe 1.1.1, et pour simplifier on note $h = h_N$ et on suppose que x_N est au milieu de la N -ème maille, de sorte que $h_{N+1/2} = h/2$. On modifie l'approximation de l'équation (1.7) : au lieu d'approcher $u'(1)$ par $b - \alpha u_N$, on introduit une onconnue auxiliaire $u_{N+1/2}$ censée approcher la valeur $u(1)$, on approche ensuite $u'(1)$ par $\frac{u_{N+1/2} - u_{N-1}}{h_{N-1/2}}$.

1. Montrer que par cette méthode, en éliminant l'inconnue auxiliaire $u_{N+1/2}$, on obtient comme N -ème équation discrète non plus (1.18) mais l'équation suivante :

$$F_{N+1/2} - F_{N-1/2} = h_N f_N \text{ avec } F_{N+1/2} = \frac{1}{1 + \alpha h/2} (\alpha u_N - b) \text{ et } F_{N-1/2} = -\frac{u_N - u_{N-1}}{h_{N-1/2}} \quad (1.86)$$

2. Calculer l'erreur de consistance sur le flux approché $F_{N+1/2}$ en 1 dans le cas des discrétisations (1.18) et (1.86). Montrer qu'elle est d'ordre 1 dans le premier cas, et d'ordre 2 dans le second.

corrigé p.55

Exercice 13 — Consistance des flux.

1. Montrer que si $u \in C^2([0;1])$, le flux défini par (1.42) est consistant d'ordre 1 dans le cas d'un maillage général ;
2. Montrer que si $u \in C^3([0;1])$, le flux défini par (1.42) est d'ordre 2 si $x_{i+1/2} = (x_{i+1} + x_i)/2$.

corrigé p.55

Exercice 14 — Conditions aux limites de Neumann. On considère ici l'équation le problème de diffusion réaction avec conditions aux limites de Neumann homogènes (correspondant à une condition physique de flux nul sur le bord) :

$$\begin{cases} -u''(x) + cu(x) = f(x) & x \in]0;1[\\ u'(0) = 0 \\ u'(1) = 0 \end{cases} \quad (1.87)$$

avec $c \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in C([0;1])$. Donner la discrétisation de ce problème par :

1. différences finies ;
2. volumes finis.

Montrer que les matrices obtenues ne sont pas inversibles. Proposer une manière de faire en sorte que le problème soit bien posé, compatible avec ce qu'on connaît du problème continu.

corrigé p.56

Exercice 15 — Conditions aux limites de Fourier (ou Robin). On considère le problème :

$$\begin{cases} -u''(x) + cu(x) = f(x) & x \in]0;1[\\ u'(0) - \alpha(u - \bar{u}) = 0 \\ u'(1) + \alpha(u - \bar{u}) = 0 \end{cases} \quad (1.88)$$

avec $c \in \mathbb{R}_+$, $f \in C([0;1])$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\bar{u} \in \mathbb{R}$. Donner la discrétisation de ce problème par :

1. différences finies ;
2. volumes finis.

Dans les deux cas, écrire le schéma sous la forme d'un système linéaire de N équations à N inconnues, en explicitant matrice et second membre (N est le nombre de noeuds internes en différences finies, de mailles en volumes finis).

corrigé p.57

Exercice 16 — Différences finies et volumes finis pour les conditions de Fourier. On cherche à calculer une approximation de la fonction $u : [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{dans }]0;1[& (1.89a) \\ u(0) - u'(0) = c & & (1.89b) \\ u(1) + u'(1) = d & & (1.89c) \end{cases}$$

où f est une fonction continue de $[0;1]$ dans \mathbb{R} . On va étudier pour cela un schéma de différences finies (partie A) et de volumes finis (partie B). Les deux parties sont indépendantes. Le barème est indicatif.

Partie A – Approximation par différences finies

On considère le schéma de différences finies à pas constant $h = 1/N$ pour le problème (1.89) :

$$\begin{cases} u_0 - \frac{u_1 - u_0}{h} = c & (1.90a) \\ \frac{2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}}{h^2} = f(x_i) & i = 1, \dots, N, & (1.90b) \\ u_{N+1} + \frac{u_{N+1} - u_N}{h} = d & (1.90c) \end{cases}$$

- En respectant l'ordre des équations, écrire le schéma de différences finies (1.90) sous la forme $AU = b$ où A est une matrice et U et b des vecteurs qu'on explicitera.
- Soit $U = (u_0, u_1, \dots, u_N, u_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+2}$; on pose $V = (v_0, v_1, \dots, v_N, v_{N+1})$, avec $v_0 = u_0/h$, $v_{N+1} = u_{N+1}/h$, et $v_i = u_i$ pour $i = 1, \dots, N$. Montrer que $AU \cdot V > 0$ si $U \neq 0$. En déduire qu'il existe une unique solution au système linéaire (1.90).
- Peut-on mettre le système sous une forme équivalente $\tilde{A}U = \tilde{b}$ où \tilde{A} est une matrice symétrique définie positive ?
- Soit A la matrice définie à la question 1. Montrer que si $V = (v_0, v_1, \dots, v_N, v_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+2}$ est tel que $AV \geq 0$ (composante par composante, c'est-à-dire $(AV)_i \geq 0$ pour tout $i = 0, \dots, N+1$), alors $v_i \geq 0$ pour $i = 0, \dots, N+1$.
- On définit l'erreur de consistance en $x_i = ih$ par $R_i = (A\bar{U} - b)_i$ (où A est la matrice définie par la question 1), avec $\bar{U} = (u_0, \dots, u_{N+1})$ et $\bar{u}_i = u(ih)$, $i = 0, \dots, N+1$ où u est la solution exacte de (1.89). Donner l'ordre de l'erreur de consistance du schéma en $x_i = ih$ pour $i = 0, \dots, N+1$ (en supposant u suffisamment régulière).
- On définit la fonction φ de $[0;1]$ dans \mathbb{R} par $\varphi(x) = -x^2 + 4$, et $\phi \in \mathbb{R}^{N+2}$ par $\phi_i = \varphi(x_i)$ pour $i = 0, \dots, N+1$.
 - Montrer que $A\phi = S$ avec $S = (s_0, s_1, \dots, s_N, s_{N+1})$ et $s_0 = 4 + h$, $s_i = 2$ pour $i = 1, \dots, N$ et $s_{N+1} = 1 + h$.
 - Soit

$$\mu = \max\left(\max_{i=1, \dots, N} \left(\frac{|b_i|}{2}\right), \frac{|b_0|}{4}, |b_{N+1}|\right)$$

Montrer que $A(U + \mu\phi) \geq 0$ et que $A(U - \mu\phi) \leq 0$. En déduire que $\|U\|_\infty \leq 4\mu$ et que $\|A^{-1}\|_\infty \leq 4$. On rappelle que pour une matrice carrée M à n lignes et n colonnes :

$$\|M\|_\infty = \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Mx\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

- En déduire que le schéma est convergent et donner son ordre de convergence.

Partie B – Approximation par volumes finis

On se donne maintenant un ensemble de N mailles $(K_i)_{i=1,\dots,N}$, telles que $K_i =]x_{i-1/2}; x_{i+1/2}[$ avec $x_{1/2} = 0 < x_{3/2} < x_{i-1/2} < x_{i+1/2} < \dots < x_{N+1/2} = 1$ et on note $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$. On se donne également N points $(x_i)_{i=1,\dots,N}$ situés dans les mailles K_i . On a donc :

$$0 = x_{1/2} < x_1 < x_{3/2} < \dots < x_{i-1/2} < x_i < x_{i+1/2} < \dots < x_{N+1/2} = 1$$

On notera $x_0 = 0$ et $x_{N+1} = 1$, $h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i$ pour $i = 0, \dots, N$ et $h = \max_{i=1,\dots,N} h_i$ [figure 1.2].

1. écrire un schéma de volumes finis associé à ce maillage pour le problème (1.89).
2. écrire le schéma sous la forme $AU = b$ où A est une matrice U et b des vecteurs qu'on explicitera.
3. Montrer qu'il existe une unique solution au système linéaire $AU = b$ défini à la question précédente.
4. Soit A la matrice définie à la question 2. Montrer que si $V = (v_0, v_1, \dots, v_N, v_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+2}$ est tel que $AV \geq 0$ alors $v_i \geq 0$ pour $i = 0, \dots, N+1$.
5. Donner l'ordre de consistance sur les flux.
6. Donner une estimation d'erreur pour ce schéma.

Exercice 17 — Convergence de la norme H^1 discrète. Montrer que si $u_T :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $u_T(x) = u_i, \forall x \in K_i$ où $(u_i)_{i=1,\dots,N}$ solution de (1.41)-(1.43), alors $\|u_T\|_{1,T}$ converge dans $L^2(]0; 1[)$ lorsque h tend vers 0, vers $\|Du\|_{L^2(]0; 1[)}$, où u est la solution du problème (1.1)-(1.2).

corrigé p.60

Exercice 18 — Problème elliptique 1d, discrétisation par volumes finis. Soient $a, b \geq 0, c, d \in \mathbb{R}$ et $f \in C(]0; 1], \mathbb{R})$; on cherche à approcher la solution u du problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + au'(x) + b(u(x) - f(x)) = 0 & x \in [0; 1] \end{cases} \quad (1.91)$$

$$\begin{cases} u(0) = c \end{cases} \quad (1.92)$$

$$\begin{cases} u(1) = d \end{cases} \quad (1.93)$$

On suppose que (1.91)-(1.92)-(1.93) admet une solution unique $u \in C^2(]0; 1], \mathbb{R})$. Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $h_1, \dots, h_N > 0$ tels que $\sum_{i=1}^N h_i = 1$. On pose $x_{1/2} = 0$ de sorte que $x_{N+1/2} = 1$ et :

$$\begin{cases} x_{i+1/2} = x_{i-1/2} + h_i & i = 1, \dots, N \\ h_{i+1/2} = \frac{h_{i+1} + h_i}{2} & i = 1, \dots, N-1 \\ f_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx & i = 1, \dots, N \end{cases}$$

Pour approcher la solution u de (1.91)-(1.92)-(1.93), on propose le schéma numérique suivant :

$$F_{i+1/2} - F_{i-1/2} + bh_i u_i = bh_i f_i \quad i \in \{1, \dots, N\}, \quad (1.94)$$

avec $(F_{i+1/2})_{i \in \{0, \dots, N\}}$ donné par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} F_{i+1/2} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} + au_i & i = 1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (1.95)$$

$$\begin{cases} F_{1/2} = -\frac{u_1 - c}{h_{1/2}} + ac & F_{N+1/2} = -\frac{d - u_N}{h_{N+1/2}} + au_N \end{cases} \quad (1.96)$$

En tenant compte des expressions (1.95) et (1.96), le schéma numérique (1.94) donne donc un système de N équations à N inconnues u_1, \dots, u_N :

1. Expliquer comment, à partir de (1.91), (1.92) et (1.93), on obtient ce schéma numérique.
2. Existence de la solution approchée.
 - (a) On suppose ici que $c = d = 0$ et $f_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$. Montrer qu'il existe un unique vecteur $U = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$ solution de (1.94). Ce vecteur est obtenu en prenant $u_i = 0$, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$. (On rappelle que dans (1.94) les termes $F_{i+1/2}$ et $F_{i-1/2}$ sont donnés par (1.95) et (1.96))

- (b) On revient maintenant au cas général (c'est-à-dire $c, d \in \mathbb{R}$ et $f \in C([0;1], \mathbb{R})$). Montrer qu'il existe un unique vecteur $U = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$ solution de (1.94). (On rappelle, encore une fois, que dans (1.94) les termes $F_{i+1/2}$ et $F_{i-1/2}$ sont donnés par (1.95) et (1.96))

Soient $\alpha, \beta > 0$. On suppose, dans tout la suite de l'exercice, qu'il existe $h > 0$ tel que $\alpha h \leq h_i \leq \beta h$, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$. On note $\bar{u}_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x) dx$, pour $i = 1, \dots, N$. On rappelle que u est la solution exacte de (1.91)-(1.92)-(1.93).

3. Non consistance du schéma au sens des différences finies

- (a) Montrer que le système peut se mettre sous la forme $AU = B$, où B est définie par

$$\begin{cases} B_1 = bf_1 + \frac{2c}{h_1^2} + \frac{ac}{h_1} & (1.97) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_i = bf_i & i = 2, \dots, N-1 & (1.98) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_N = bf_N + \frac{2d}{h_N^2} & (1.99) \end{cases}$$

- (b) On pose $\bar{R} = A\bar{U} - B$ avec $\bar{U} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_N)$. Vérifier que pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, \bar{R}_i peut se mettre sous la forme :

$$\bar{R}_i = \bar{R}_i^1 + \bar{R}_i^2$$

$$\text{où } \sup_{i=1, \dots, N} |\bar{R}_i^1| \leq C_1 \text{ et } \sup_{i=1, \dots, N} |\bar{R}_i^2| \leq C_2 h.$$

- (c) On se restreint dans cette question au cas où $a = 0$, $b > 0$, $f = 0$, $c = 1$, $d = e^{\sqrt{b}}$, $N = 2q$, $h_i = h$ si i est pair et $h_i = h/2$ si i est impair avec $h = 2/3N$. Montrer que $\|\bar{R}\|_\infty$ ne tend pas vers 0 avec h .

4. Consistance des flux. En choisissant convenablement $(\bar{F}_{i+1/2})_{i \in \{0, \dots, N\}}$, montrer que :

$$\bar{F}_{i+1/2} - \bar{F}_{i-1/2} + bh_i \bar{u}_i = bh_i f_i, \quad i \in \{1, \dots, N\}, \quad (1.100)$$

et que $(\bar{F}_{i+1/2})_{i \in \{0, \dots, N\}}$ vérifie les égalités suivantes :

$$\begin{cases} \bar{F}_{i+1/2} = -\frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_i}{h_{i+1/2}} + a\bar{u}_i + R_{i+1/2} & i \in \{1, \dots, N-1\}, & (1.101) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{F}_{1/2} = -\frac{\bar{u}_1 - c}{h_{1/2}} + ac + R_{1/2} & \bar{F}_{N+1/2} = -\frac{d - \bar{u}_N}{h_{N+1/2}} + a\bar{u}_N + R_{N+1/2} & (1.102) \end{cases}$$

avec :

$$|R_{i+1/2}| \leq C_1 h \quad i \in \{0, \dots, N\}, \quad (1.103)$$

où $C_1 \in \mathbb{R}$ et C_1 ne dépend que de α, β et u .

5. Estimation d'erreur. On pose $e_i = \bar{u}_i - u_i$, pour $i \in \{1, \dots, N\}$ et $E = (e_1, \dots, e_N)$.

- (a) Montrer que E est solution du système (de N équations) suivant :

$$G_{i+1/2} - G_{i-1/2} + bh_i e_i = 0, \quad i \in \{1, \dots, N\}, \quad (1.104)$$

avec $(G_{i+1/2})_{i \in \{0, \dots, N\}}$ donné par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} G_{i+1/2} = -\frac{e_{i+1} - e_i}{h_{i+1/2}} + ae_i + R_{i+1/2} & i \in \{1, \dots, N-1\} & (1.105) \end{cases}$$

$$\begin{cases} G_{1/2} = -\frac{e_1}{h_{1/2}} + R_{1/2} & G_{N+1/2} = -\frac{-e_N}{h_{N+1/2}} + ae_N + R_{N+1/2} & (1.106) \end{cases}$$

- (b) En multipliant (1.104) par e_i et en sommant sur $i = 1, \dots, N$, montrer qu'il existe $C_2 \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de α, β et u tel que :

$$\sum_{i=0}^N (e_{i+1} - e_i)^2 \leq C_2 h^3 \quad (1.107)$$

avec $e_0 = e_{N+1} = 0$.

(c) Montrer qu'il existe $C_3 \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de α, β , et u tel que :

$$|e_i| \leq C_3 h, \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, N\}. \quad (1.108)$$

6. (Principe du maximum.) On suppose, dans cette question, que $f(x) \leq d \leq c$, pour tout $x \in [0; 1]$. Montrer que $u_i \leq c$, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$. (On peut aussi montrer que $u(x) \leq c$, pour tout $x \in [0; 1]$.)

7. On remplace, dans cette question, (1.95) et (1.96) par :

$$\begin{cases} F_{i+1/2} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} + au_{i+1} & i \in \{1, \dots, N-1\} \\ F_{1/2} = -\frac{u_1 - c}{h_{1/2}} + au_1 & F_{N+1/2} = -\frac{d - u_N}{h_{N+1/2}} + ad \end{cases} \quad (1.109)$$

$$\quad (1.110)$$

Analyser brièvement le nouveau schéma obtenu (existence de la solution approchée, consistance des flux, estimation d'erreur, principe du maximum).

Exercice 19 — Discrétisation 2D par différences finies. Écrire le système linéaire obtenu lorsqu'on discrétise le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega =]0; 1[\times]0; 1[\\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

par différences finies avec un pas uniforme $h = 1/N$ dans les deux directions d'espace. Montrer l'existence et l'unicité de la solution du système linéaire obtenu.

corrigé p.62

Exercice 20 — Problème elliptique 2d et différences finies. Soit $\Omega =]0; 1[^2 \subset \mathbb{R}^2$. On se propose d'étudier deux schémas numériques pour le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) + k \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = f(x, y) & (x, y) \in \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.111)$$

où $k > 0$ est un réel donné et $f \in C(\bar{\Omega})$ est donnée. On note u la solution exacte de (1.111) et on suppose que $u \in C^4(\bar{\Omega})$.

1. Principe du maximum — Montrer que pour tout $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$ tel que $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega$, on a :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx + \int_{\Omega} k \frac{\partial u}{\partial x}(x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx$$

En déduire que si $f \leq 0$ sur $\bar{\Omega}$, on a alors $u \leq 0$ sur $\bar{\Omega}$. Soit $N \in \mathbb{N}$; on pose $h = 1/(N+1)$ et $u_{i,j}$ est la valeur approchée recherchée de $u(ih, jh)$, $(i, j) \in \{0, \dots, N+1\}^2$. On pose $f_{i,j} = f(ih, jh)$, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, N\}^2$. On s'intéresse à deux schémas de la forme :

$$\begin{cases} a_0 u_{i,j} - a_1 u_{i-1,j} - a_2 u_{i+1,j} - a_3 u_{i,j-1} - a_4 u_{i,j+1} = f_{i,j} & \forall (i, j) \in \{1, \dots, N\}^2 \\ u_{i,j} = 0 & (i, j) \in \gamma \end{cases} \quad (1.112)$$

où a_0, a_1, a_2, a_3 et a_4 sont données (ce sont des fonctions données de h) et $\gamma = \{(i, j), (ih, jh) \in \partial\Omega\}$ (γ dépend aussi de h). Le premier schéma, schéma [I], correspond au choix suivant des a_i :

$$a_0 = \frac{4}{h^2} \quad a_1 = \frac{1}{h^2} + \frac{k}{2h} \quad a_2 = \frac{1}{h^2} - \frac{k}{2h} \quad a_3 = a_4 = \frac{1}{h^2}.$$

Le deuxième schéma, schéma [II], correspond au choix suivant des a_i :

$$a_0 = \frac{4}{h^2} + \frac{k}{h} \quad a_1 = \frac{1}{h^2} + \frac{k}{h} \quad a_2 = a_3 = a_4 = \frac{1}{h^2}$$

2. Consistance — Donner une majoration de l'erreur de consistance en fonction de k, h et des dérivées de u , pour les schémas [I] et [II]. Donner l'ordre des schémas [I] et [II].

3. Principe du maximum discret — Dans le cas du schéma [II] montrer que si $(w_{i,j})$ vérifie :

$$a_0 w_{i,j} - a_1 w_{i-1,j} - a_2 w_{i+1,j} - a_3 w_{i,j-1} - a_4 w_{i,j+1} \leq 0 \quad \forall (i,j) \in \{1, \dots, N\}^2$$

on a alors

$$w_{i,j} \leq \max_{(n,m) \in \gamma} (w_{n,m}) \quad \forall (i,j) \in \{1, \dots, N\}^2$$

Montrer que ceci est aussi vrai dans le cas du schéma [I] si h vérifie une condition à déterminer.

4. Stabilité — Montrer que le schéma [II] et le schéma [I] sous la condition trouvée en 3. sont stables (au sens $\|U\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$, avec une constante C à déterminer explicitement, où $U = \{u_{i,j}\}_{(i,j) \in \{0, \dots, N+1\}^2}$ est solution de (1.112). [On pourra utiliser la fonction $\phi(x, y) = y^2/2$].

En déduire que dans le cas du schéma [II] et du schéma [I] sous la condition trouvée en 3. le problème (1.112) admet, pour tout f , une et une seule solution.

5. Convergence — Les schémas [I] et [II] sont-ils convergents ? (au sens $\max_{(i,j) \in \{0, \dots, N+1\}^2} (|u_{i,j} - u(ih, jh)|) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$). Quel est l'ordre de convergence de chacun des schémas ?

6. Commentaires — Quels sont, à votre avis, les avantages respectifs des schémas [I] et [II] ?

corrigé p.69

Exercice 21 — Implantation de la méthode des volumes finis. On considère le problème de conduction du courant électrique

$$-\operatorname{div}(\mu_i \nabla \phi(x)) = 0 \quad x \in \Omega_i \quad i = 1, 2 \quad (1.113)$$

où ϕ représente le potentiel électrique, $j = -\mu \nabla \phi(x)$ est donc le courant électrique, $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ sont les conductivités thermiques dans les domaines Ω_1 et avec Ω_2 , avec $\Omega_1 =]0; 1[\times]0; 1[$ et $\Omega_2 =]0; 1[\times]1; 2[$. On appelle $\Gamma_1 =]0; 1[\times \{0\}$, $\Gamma_2 = \{1\} \times]0; 2[$, $\Gamma_3 =]0; 1[\times \{2\}$ et $\Gamma_4 = \{0\} \times]0; 2[$ les frontières extérieures de Ω et on note $I =]0; 1[\times \{0\}$, l'interface entre Ω_1 et Ω_2 (voir Figure 1.5). Dans la suite, on notera μ la conductivité électrique sur Ω avec $\mu|_{\Omega_i} = \mu_i$, $i = 1, 2$.

On suppose que les frontières Γ_2 et Γ_4 sont parfaitement isolées. Le potentiel électrique étant défini à une constante près, on impose que sa moyenne soit nulle sur le domaine, pour que le problème soit bien posé.

La conservation du courant électrique impose que

$$\int_{\Gamma_1} j \cdot \mathbf{n} + \int_{\Gamma_3} j \cdot \mathbf{n} = 0$$

où \mathbf{n} désigne le vecteur unitaire normal à la frontière $\partial\Omega$ et extérieure à Ω .

Enfin, on suppose que l'interface I est le siège d'une réaction électrochimique qui induit un saut de potentiel. On a donc pour tout point de l'interface I :

$$\phi_2(x) - \phi_1(x) = \psi(x) \quad \forall x \in I$$

où ϕ_i désigne la restriction de ϕ au sous domaine i . La fonction ϕ est donc discontinue sur l'interface I . Notons que, par contre, le courant électrique est conservé et on a donc

$$(-\mu \nabla \phi \cdot \mathbf{n})|_2(x) + (-\mu \nabla \phi \cdot \mathbf{n})|_1(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

1. écrire le problème complet, avec conditions aux limites.

2. Discrétiser le problème par la méthode des volumes finis, avec un maillage rectangulaire uniforme, (considérer deux inconnues discrètes pour chaque arête de l'interface) et écrire le système linéaire obtenu sur les inconnues discrètes.

corrigé p.65

Exercice 22 — Elimination des inconnues d'arêtes. On se place ici dans le cadre des hypothèses et notations du paragraphe 1.4.2 :

1. Pour chaque arête interne $\sigma = K|L$, calculer la valeur u_σ en fonction de u_K et u_L et en déduire que les flux numériques $F_{K,\sigma}$ et $F_{L,\sigma}$ vérifient bien (1.70) ;

2. Pour chaque arête $\sigma \subset \Gamma_1 \cup \Gamma_3$, telle que $\sigma \in \mathcal{E}_K$, calculer u_σ en fonction de u_K et montrer que $F_{K,\sigma}$ vérifie bien (1.71) ;

3. Pour chaque arête $\sigma \in \mathcal{E}_1$, avec $\sigma = K|L$, $K \in \Omega_1$, calculer la valeur u_σ en fonction de u_K et u_L et en déduire que les flux numériques $F_{K,\sigma}$ et $F_{L,\sigma}$ vérifient bien (1.73);
4. écrire le système linéaire que satisfont les inconnues $(u_K)_{K \in \mathcal{T}}$.

1.5.2 Corrigés

Exercice 1.

1. Le schéma différences finies pour l'équation (1.74) s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2}(2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}) + \sin u_i = f_i & i = 1, \dots, N \\ u_0 = a \\ u_{N+1} = b \end{cases},$$

ce qui s'écrit encore

$$\begin{cases} \frac{2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}}{h^2} + \sin u_i = f_i & i = 2, \dots, N-1 \\ \frac{2u_1 - u_2 - a}{h^2} + \sin u_1 = f_1 \\ \frac{2u_N - u_{N-1} - b}{h^2} + \sin u_N = f_N \end{cases}$$

Le schéma volumes finis pour la même équation s'écrit :

$$F_{i+1/2} - F_{i-1/2} + h \sin u_i = h f_i \quad i = 1, \dots, N \quad (1.114)$$

avec :

$$\begin{cases} F_{i+1/2} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h} & i = 1, \dots, N-1 \\ F_{1/2} = -\frac{u_1 - a}{h/2} & F_{N+1/2} = -\frac{b - u_N}{h/2} \end{cases}$$

En remplaçant les expressions des flux dans l'équation (1.114). On obtient :

$$\begin{cases} \frac{2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}}{h^2} + \sin u_i = f_i & i = 2, \dots, N-1 \\ \frac{3u_1 - 2u_2 - a}{h^2} + \sin u_1 = 2f_1 \\ \frac{3u_N - 2u_{N-1} - b}{h^2} + \sin u_N = 2f_N \end{cases}$$

2. La différence entre les deux schémas réside uniquement dans la première et la dernière équations.

Exercice 3.

1. On se donne N points de discrétisation et on écrit l'équation (1.76a) en chaque point x_i , $i = 1, \dots, N$. Avec la discrétisation donnée dans le cours pour $u''(x)$, et en tenant compte des conditions limites (??) on obtient le schéma suivant :

$$\frac{1}{h^2}(2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}) + c(x_i)u_i = f(x_i), \quad i = 2, \dots, N,$$

$$\frac{1}{h^2}(2u_1 - a) = \left(\frac{1}{h^2} - c(h)\right)a + f(h)$$

$$\frac{1}{h^2}(2u_N - b) = \left(\frac{1}{h^2} - c(1-h)\right)b + f(1-h).$$

2. Supposons $a \leq b$ (l'autre cas se traite de manière similaire). On note $u_0 = a$ et $u_{N+1} = b$. Soit $i_0 = \min\{i; 0 \leq i \leq N+1, u_i = \min_{j=1, N+1} u_j\}$. Si $i_0 > 0$, on a

$$\frac{1}{h^2}(u_{i_0} - u_{i_0+1}) + \frac{1}{h^2}(u_{i_0} - u_{i_0-1}) \geq 0,$$

ce qui entraîne $u_{i_0} - u_{i_0+1} = 0$ et $u_{i_0} - u_{i_0-1} = 0$. Or la deuxième égalité est impossible par définition de i_0 . On a donc $i_0 = 0$ et $u_i \geq a$ pour tout $i = 1, \dots, N$.

Exercice 5.

1. La matrice M et le second membre b sont donnés par :

$$\begin{cases} (\text{MU})_i = \frac{2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}}{h^2} + \frac{v_i(u_i - u_{i-1})}{h}, \text{ pour } i = 2, \dots, N \\ (\text{MU})_1 = \frac{2u_1 - u_2}{h^2} + \frac{v_1 u_1}{h} \\ (\text{MU})_N = \frac{2u_N - u_{N-1}}{h^2} + \frac{v_N(u_N - u_{N-1})}{h} \end{cases} \quad \text{et } b = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{h^2} + \frac{v_1}{h}\right)a_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{h^2}a_1 \end{pmatrix}$$

(a) Supposons $\text{MU} \geq 0$. Soit $i_0 = \min\{i; u_i = \min_j u_j\}$.

i. Si $i_0 = 1$, comme $\frac{2u_1 - u_2}{h^2} + \frac{v_1 u_1}{h} \geq 0$, on a

$$\left(\frac{1}{h^2} + \frac{v_1}{h}\right)u_1 + \frac{u_1 - u_2}{h^2} \geq 0$$

et comme $u_1 - u_2 \leq 0$, ceci entraîne $u_1 \geq 0$.

ii. Si $2 \leq i_0 \leq N - 1$, on a :

$$\frac{u_{i_0} - u_{i_0+1}}{h^2} + \frac{u_{i_0} - u_{i_0-1}}{h^2} + \frac{v_{i_0}(u_{i_0} - u_{i_0-1})}{h} \geq 0$$

Mais par définition de i_0 , on a $u_{i_0} - u_{i_0+1} \leq 0$ et $u_{i_0} - u_{i_0-1} < 0$ donc ce cas est impossible.

iii. Si $i_0 = N$, on a :

$$\frac{1}{h^2}u_N + \frac{1}{h^2}(u_N - u_{N-1}) + \frac{1}{h}v_N(u_N - u_{N-1}) \geq 0.$$

Or par définition de $i_0 = N$, on a $u_N < u_{N-1}$, et donc $u_N > 0$.

On a donc montré que si $\text{MU} \geq 0$ alors $U \geq 0$.

(b) Comme $\text{MU} \geq 0 \Rightarrow U \geq 0$, on a donc (en prenant U puis $-U$) $\text{MU} = 0 \Rightarrow U = 0$, ce qui prouve que M est inversible,

(c) Soit U solution de $\text{MU} = b$. Posons $\tilde{U} = (u_0, u_1, \dots, u_N, u_{N+1})$, avec $u_0 = a_0$ et $u_{N+1} = a_1$. Remarquons d'abord que le minimum et le maximum des composantes u_i de \tilde{U} ne peuvent être atteints pour $i = 1, \dots, N$ que si les u_i sont tous égaux (auquel cas $u_i = a_0 = a_1$ pour tout $i = 0, \dots, N + 1$). En effet, pour $i = 1, \dots, N$, on a :

$$\frac{1}{h^2}(u_i - u_{i+1}) + \frac{1}{h^2}(u_i - u_{i-1}) + \frac{1}{h}v_i(u_i - u_{i-1}) = 0 \quad (1.115)$$

Soit $i_0 = \min\{i; u_i = \min_j u_j\}$ et $i_1 = \min\{i; u_i = \max_j u_j\}$. Par définition de i_0 , on a $u_{i_0} - u_{i_0+1} \leq 0$ et $u_{i_0} - u_{i_0-1} < 0$ donc (1.115) est impossible si $1 < i_0 < N$. Donc $i_0 = 1$ ou N . Soit $i_1 = \min\{i; u_i = \max_j u_j\}$, on a $u_{i_1} - u_{i_1+1} \geq 0$ et $u_{i_1} - u_{i_1-1} > 0$ et (1.115) est encore impossible si $1 < i_1 < N$.

On en déduit que $i_0 = 0$ ou $N + 1$ et $i_1 = 0$ ou $N + 1$, ce qui prouve que $\min(a_0, a_1) \leq u_i \leq \max(a_0, a_1)$.

2. (a) Par définition, $m_{i,i} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h}v_i$ avec $v_i \geq 0$, ce qui prouve le résultat.

(b) Par définition, $m_{i,j}$ est soit nul, soit égal à $-\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h}v_i$ si $j = i - 1$, soit égal à $-\frac{1}{h^2}$ si $j = i + 1$, ce qui prouve le résultat.

(c) On a montré que M est inversible à la question précédente.

(d) D'après la question 1.2, on sait que si $\text{MU} \geq 0$, alors $U \geq 0$. Soit e_i le i -ème vecteur de la base canonique. On a $e_i = M(M^{-1})e_i \geq 0$, et donc $M^{-1}e_i \geq 0$, ce qui montre que tous les coefficients de M^{-1} doivent être positifs.

Exercice 6.

1. La matrice M et le second membre b sont donnés par :

$$(MU)_i = \frac{1}{h^2}(2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}) + \frac{1}{h}(v_{i+1/2}u_i - v_{i-1/2}u_{i-1}) \quad i = 2, \dots, N,$$

$$(MU)_1 = \frac{1}{h^2}(2u_1 - u_2) + \frac{1}{h}v_{3/2}u_1$$

$$(MU)_N = \frac{1}{h^2}(2u_N - u_{N-1}) + \frac{1}{h}(v_{N+1/2}u_N - v_{N-1/2}u_{N-1})$$

et :

$$b = \begin{pmatrix} (\frac{1}{h^2} + \frac{v_{1/2}}{h})a_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{h^2}a_1 \end{pmatrix}$$

2. Le produit $MU \cdot W$ s'écrit :

$$\begin{aligned} MU \cdot W = & \sum_{i=2}^{N-1} \left(\frac{2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}}{h^2} + \frac{v_{i+1/2}u_i - v_{i-1/2}u_{i-1}}{h} \right) w_i \\ & + \left(\frac{2u_1 - u_2}{h^2} + \frac{v_{3/2}u_1}{h} \right) w_1 + \frac{2u_N - u_{N-1}}{h^2} + \left(\frac{v_{N+1/2}u_N - v_{N-1/2}u_{N-1}}{h} \right) w_N \quad (1.116) \end{aligned}$$

On remarque ensuite que $(M^t W)_i = M^t W \cdot e_i$ où e_i est le i -ème vecteur de la base canonique $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (le 1 étant placé en i -ème position). On en déduit que :

$$(M^t W)_i = W \cdot M e_i = M e_i \cdot W$$

On obtient donc $(M^t W)_i$ en prenant $u_i = 1$ et $u_j = 0$ pour $j \neq i$ dans (1.116). On obtient :

$$(M^t W)_1 = \frac{1}{h^2}(2w_1 - w_2) + \frac{1}{h}v_{1/2}(w_1 - w_2),$$

$$(M^t W)_i = \frac{1}{h^2}(2w_i - w_{i+1} - w_{i-1}) + \frac{1}{h}v_{i+1/2}(w_i - w_{i+1}) \quad \text{si } i = 2, \dots, N-1,$$

$$(M^t W)_N = \frac{1}{h^2}(2w_N - w_{N-1}) + \frac{1}{h}v_{N+1/2}w_N.$$

3. (a) La matrice M^t est aussi la transposée de la matrice M de la question 1.2 en remplaçant v_i par $v_{i+1/2}$. Il suffit alors de remarquer que si une matrice carrée satisfait la propriété $AX \geq 0 \Rightarrow X \geq 0$, alors la matrice A^t satisfait $A^t X \geq 0 \Rightarrow X \geq 0$. En effet, la propriété $AX \geq 0 \Rightarrow X \geq 0$ est vérifiée si et seulement si A est inversible et $A^{-1} \geq 0$; or $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$, qu'on note aussi A^{-t} , ce qui prouve que la propriété $A^t X \geq 0 \Rightarrow X \geq 0$ est aussi vérifiée.
- (b) Ceci est immédiatement démontré par la remarque utilisée dans la question précédente sur A et sa transposée.
4. On vient de montrer que la matrice M vérifiait les point (c) et (d) de 1.3. Les points (a) et (b) sont immédiats par hypothèse sur v . On en déduit que M est bien une M -matrice.
5. Prenons $a_0 = a_1 = 1$. Si la solution U de (1.81) vérifie $\min(a_0, a_1) \leq u_i \leq \max(a_0, a_1)$, alors on doit avoir $u_i = 1$ pour tout $i = 1, \dots, N$. L'équation (1.81) s'écrit alors $v_{i+1/2} - v_{i-1/2} = 0$. Si v est non constant, ceci est impossible.

Exercice 7.**Partie I**

1. Soit $u = (u_1, \dots, u_N)$. On a

$$Au = b \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{h^2}(u_i - u_{i-1}) + \frac{1}{h^2}(u_i - u_{i+1}) = b_i & \forall i = 1, \dots, N \\ u_0 = u_{N+1} = 0 \end{cases}$$

Supposons $b_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, N$, et soit $p \in \{0, \dots, N+1\}$ tel que $u_p = \min(u_i, i = 0, \dots, N+1)$.

— Si $p = 0$ ou $N+1$, alors $u_i \geq 0 \forall i = 0, N+1$ et donc $u \geq 0$.

— Si $p \in \{1, \dots, N\}$, alors

$$\frac{1}{h^2}(u_p - u_{p-1}) + \frac{1}{h^2}(u_p - u_{p+1}) \geq 0$$

et comme $u_p - u_{p-1} < 0$ et $u_p - u_{p+1} \leq 0$, on aboutit à une contradiction.

Montrons maintenant que A est inversible. On vient de montrer que si $Au \geq 0$ alors $u \geq 0$. On en déduit par linéarité que si $Au \leq 0$ alors $u \leq 0$, et donc que si $Au = 0$ alors $u = 0$. Ceci démontre que l'application linéaire représentée par la matrice A est injective donc bijective (car on est en dimension finie).

2. Soit $\varphi \in C([0; 1], \mathbb{R})$ tel que $\varphi(x) = 1/2x(1-x)$ et $\phi_i = \varphi(x_i), i = 1, N$, où $x_i = ih$. $(A\phi)_i$ est le développement de Taylor à l'ordre 2 de $\varphi''(x_i)$, et comme φ est un polynôme de degré 2, ce développement est exact. Donc $(A\phi)_i = \varphi''(x_i) = 1$.
3. Soient $b \in \mathbb{R}^N$ et $u \in \mathbb{R}^N$ tels que $Au = b$. On a :

$$(A(u \pm \|b\|\varphi))_i = (Au)_i \pm \|b\|(A\phi)_i = b_i \pm \|b\|.$$

Prenons d'abord $\bar{b}_i = b_i + \|b\| \geq 0$, alors par la question (1),

$$u_i + \|b\|\phi_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Si maintenant on prend $\bar{b}_i = b_i - \|b\| \leq 0$, alors

$$u_i - \|b\|\phi_i \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

On a donc $-\|b\|\phi_i \leq \|b\|\phi_i$.

On en déduit que $\|u\|_\infty \leq \|b\| \|\phi\|_\infty$; or $\|\phi\|_\infty = 1/8$, d'où $\|u\|_\infty \leq \|b\|/8$. On peut alors écrire que pour tout $b \in \mathbb{R}^N$,

$$\|A^{-1}b\|_\infty \leq \frac{1}{8}\|b\|, \text{ donc } \frac{\|A^{-1}b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \leq \frac{1}{8}, \text{ d'où } \|A^{-1}\| \leq \frac{1}{8}$$

On montre que $\|A^{-1}\| = 1/8$ en prenant le vecteur b défini par $b(x_i) = 1, \forall i = 1, \dots, N$. On a en effet $A^{-1}b = \phi$, et comme N est impair, $\exists i \in \{1, \dots, N\}$ tel que $x_i = 1/2$; or $\|\phi\|_\infty = \varphi(1/2) = 1/8$.

4. Par définition, on a $\|A\| = \sup_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|$, et donc $\|A\| = \max_{i=1, N} \sum_{j=1, N} |a_{i,j}|$, d'où le résultat.
5. Grâce aux questions 3 et 4, on a, par définition du conditionnement pour la norme $\|\cdot\|$, $\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\| = \frac{1}{2h^2}$. Comme $A\delta_u = \delta_b$, on a :

$$\|\delta_u\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta_b\| \frac{\|b\|}{\|b\|} \leq \|A^{-1}\| \|\delta_b\| \frac{\|A\| \|u\|}{\|b\|},$$

d'où le résultat.

Pour obtenir l'égalité, il suffit de prendre $b = Au$ où u est tel que $\|u\| = 1$ et $\|Au\| = \|A\|$, et δ_b tel que $\|\delta_b\| = 1$ et $\|A^{-1}\delta_b\| = \|A^{-1}\|$. On obtient alors

$$\frac{\|\delta_b\|}{\|b\|} = \frac{1}{\|A\|} \text{ et } \frac{\|\delta_u\|}{\|u\|} = \|A^{-1}\|.$$

D'où l'égalité.

Partie 2

1. Soient $\varphi^{(h)}$ et $f^{(h)}$ les fonctions constantes par morceaux définies par

$$\varphi^{(h)}(x) = \begin{cases} \varphi(ih) = \phi_i & \text{si } x \in]x_i - h/2; x_i + h/2[\quad i = 1, \dots, N \\ 0 & \text{si } x \in [0; h/2] \quad \text{ou } x \in]1 - h/2; 1] \end{cases}$$

$$f^{(h)}(x) = \begin{cases} f(ih) = b_i & \text{si } x \in]x_i - h/2; x_i + h/2[\quad i = 1, \dots, N \\ f(ih) = 0 & \text{si } x \in [0; h/2] \quad \text{ou } x \in]1 - h/2; 1] \end{cases}$$

Comme $f \in C([0; 1], \mathbb{R})$ et $\varphi \in C^2([0; 1], \mathbb{R})$, la fonction f_h (resp. φ_h) converge uniformément vers f (resp. φ) lorsque $h \rightarrow 0$. On a donc

$$h \sum_{i=1}^N b_i \varphi_i = \int_0^1 f^{(h)}(x) \varphi^{(h)}(x) dx \rightarrow \int_0^1 f(x) \varphi(x) dx \text{ lorsque } h \rightarrow 0.$$

Comme $b_i > 0$ et $f_i > 0, \forall i = 1, \dots, N$, on a évidemment :

$$S_N = \sum_{i=1}^N b_i \varphi_i > 0 \text{ et } S_N \rightarrow \int_0^1 f(x) \varphi(x) dx = \beta > 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0$$

Donc il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $N \geq N_0, S_N \geq \beta/2$, et donc $S_N \geq \alpha = \min(S_0, S_1 \dots S_{N_0}, \beta/2) > 0$.

2. On a $N\|u\| = N \sup_{i=1, \dots, N} |u_i| \geq \sum_{i=1}^N u_i$. D'autre part, $A\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}^t$ donc $u \cdot A\varphi = \sum_{i=1}^N u_i$; or $u \cdot A\varphi = A^t u \cdot \varphi = Au \cdot \varphi$ car A est symétrique donc :

$$u \cdot A\varphi = \sum_{i=1}^N b_i \varphi_i \geq \frac{\alpha}{h}$$

d'après la question 1. Comme $\delta_u = A^{-1} \delta_b$, on a donc $\|\delta_u\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta_b\|$ et comme $N\|u\| \geq \frac{\alpha}{h}$, on obtient :

$$\frac{\|\delta_u\|}{\|u\|} \leq \frac{1}{8} \frac{hN}{\alpha} \|\delta_b\| \frac{\|f\|_\infty}{\|b\|}$$

Or $hN = 1$ et on a donc bien :

$$\frac{\|\delta_u\|}{\|u\|} \leq \frac{\|f\|_\infty}{8\alpha} \frac{\|\delta_b\|}{\|b\|}$$

3. Le conditionnement $\text{cond}(A)$ calculé dans la partie 1 est d'ordre $1/h^2$, et donc tend vers l'infini lorsque le pas du maillage tend vers 0, alors qu'on vient de montrer dans la partie 2 que la variation relative $\|\delta_u\|/\|u\|$ est inférieure à une constante multipliée par la variation relative de $\|\delta_b\|/\|b\|$. Cette dernière information est nettement plus utile et réjouissante pour la résolution effective du système linéaire.

Exercice 8.

2. Pour $k = 1$ à N , calculons BU_k :

$$(BU_k)_j = -\sin k\pi(j-1)h + 2\sin k\pi(jh) - \sin k\pi(j+1)h, \text{ où } h = \frac{1}{N+1}.$$

En utilisant le fait que $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ pour développer $\sin k\pi(1-j)h$ et $\sin k\pi(j+1)h$, on obtient (après calculs) :

$$(BU_k)_j = \lambda_k (U_k)_j, \quad j = 1, \dots, N,$$

où $\lambda_k = 2(1 - \cos k\pi h) = 2(1 - \cos \frac{k\pi}{N+1})$. On peut remarquer que pour $k = 1, \dots, N$, les valeurs λ_k sont distinctes. On a donc trouvé les N valeurs propres $\lambda_1 \dots \lambda_N$ de B associées aux vecteurs propres U_1, \dots, U_N de \mathbb{R}^N tels que $(U_k)_j = \sin \frac{k\pi j}{N+1}, j = 1, \dots, N$.

3. Comme $A = Id + \frac{1}{h^2} B$, les valeurs propres de la matrice A sont les valeurs $\mu_i = 1 + \frac{1}{h^2} \lambda_i$.
4. Comme A est symétrique, le conditionnement de A est donné par

$$\text{cond}_2(A) = \frac{\mu_N}{\mu_1} = \frac{1 + \frac{2}{h^2} (1 - \cos \frac{N\pi}{N+1})}{1 + \frac{2}{h^2} (1 - \cos \frac{\pi}{N+1})}$$

Exercice 9.

1. Si f est constante, alors $-u''$ est constante, et donc les dérivées d'ordre supérieur de u sont nulles. Donc par l'estimation (1.30) sur l'erreur de consistance, on a $R_i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, N$. Si on appelle U le vecteur de composantes u_i et \bar{U} le vecteur de \mathbb{R}^N de composantes $u(x_i)$, on peut remarquer facilement que $U - \bar{U} = A^{-1}R$, où R est le vecteur de composantes R_i . On a donc $U - \bar{U} = 0$, c.q.f.d.
2. Il est facile de voir que f n'est pas forcément constante, en prenant $f(x) = \sin 2\pi x$, et $h = 1/2$, on n'a donc qu'une seule inconnue u_1 qui vérifie $u_1 = 0$, et on a également $u(1/2) = \sin \pi = 0$.

Exercice 10.

1. On se donne un pas constant $h = x_{i+1} - x_i = \frac{1}{N+1}$. L'approximation centrée de $-u''(x_i)$ est $\frac{2u(x_i) - u(x_{i-1}) - u(x_{i+1}))}{h^2}$. L'approximation centrée de $u'(x_i)$ est $\frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2h}$. On prend alors en compte les conditions limites du système de type Dirichlet. On introduit les valeurs $u_0 = a$ et $u_{N+1} = b$, et on obtient alors le schéma suivant :

$$\begin{cases} \frac{2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}}{h^2} + \left(\frac{1}{1+ih}\right) \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = f_i, & i = 1, \dots, N \\ u_0 = a & u_{N+1} = b \end{cases} \quad (1.117)$$

On en déduit la forme matricielle du système : $A_h u_h = b_h$, avec

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{1+h} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{1}{1+2h} & \ddots & \frac{1}{1+2h} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & & 0 & \frac{1}{1+Nh} & \frac{1}{1+(N-1)h} \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$b_h = \begin{bmatrix} f_1 + a \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h(1+h)} \right) \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N + b \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h(1+Nh)} \right) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad u_h = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix}$$

2. Majorons l'erreur de consistance ; on appelle $R_i^{(1)}$ et $R_i^{(2)}$ les erreurs de consistance sur les termes de diffusion et convection au point x_i , $i = 1, \dots, N-1$, et on note $R^{(1)}$ et $R^{(2)}$ les vecteurs de \mathbb{R}^N associés. Par définition,

$$R_i^{(1)} = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} - u''(x_i) \quad \text{et} \quad R_i^{(2)} = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2h} - u'(x_i)$$

Comme $u \in C^4(]0; 1[)$, un développement de Taylor à l'ordre 4 aux points x_{i+1} et x_i donne :

$$\begin{cases} u(x_{i+1}) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2} u''(x_i) + \frac{h^3}{6} u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{24} u^{(4)}(\eta_i), \\ u(x_{i-1}) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2} u''(x_i) - \frac{h^3}{6} u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{24} u^{(4)}(\zeta_i), \end{cases}$$

où η_i (resp. ζ_i) appartient à l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ (resp. $[x_{i-1}, x_i]$). En effectuant la somme et la différence de ces deux lignes, on trouve :

$$\begin{cases} -u''(x_i) = \frac{2u(x_i) - u(x_{i-1}) - u(x_{i+1}))}{h^2} + \frac{h^2}{24} (u^{(4)}(\eta_i) + u^{(4)}(\zeta_i)) \end{cases} \quad (1.118a)$$

$$\begin{cases} u'(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2h} + \frac{h^3}{6} u^{(3)}(x_i) + \frac{h^2}{24} (u^{(4)}(\eta_i) - u^{(4)}(\zeta_i)) \end{cases} \quad (1.118b)$$

L'égalité (1.118a) entraîne que :

$$\|\mathbf{R}^{(1)}\|_\infty \leq \frac{h^2}{12} \sup_{[0;1]} |u^{(4)}|,$$

et l'égalité (1.118b) entraîne que :

$$\|\mathbf{R}^{(1)2}\|_\infty \leq \frac{h^2}{12} \sup_{[0;1]} |u^{(3)}|$$

L'erreur de consistance R pour le schéma (1.117) vérifie donc :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{R}\|_\infty &\leq \max_{i=1,\dots,N} \left(\|\mathbf{R}^{(1)}\|_\infty + \frac{1}{1+ih} \|\mathbf{R}^{(2)}\|_\infty \leq \|\mathbf{R}^{(1)}\|_\infty + \|\mathbf{R}^{(2)}\|_\infty \right) \\ &\leq \frac{h^2}{12} \left(\sup_{[0;1]} |u^{(4)}| + \sup_{[0;1]} |u^{(3)}| \right). \end{aligned} \quad (1.119)$$

3. Supposons que $A_h v \geq 0$, et montrons que $v \geq 0$ pour $v \in \mathbb{R}^N$. Par définition de la matrice A_h ,

$$\left(\frac{-1}{h^2} - \frac{1}{2h(1+ih)} \right) u_{i-1} + \frac{2}{h^2} u_i + \left(\frac{-1}{h^2} + \frac{1}{2h(1+ih)} \right) u_{i+1} \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (1.120)$$

Posons $p = \min\{i \in \{1, \dots, N\}; v_p = \min_{j=1, \dots, N} v_j\}$, et supposons d'abord que $p = 1$. On a alors :

$$v_1 \leq v_j, \quad \forall j = 1, \dots, N.$$

Mais l'inéquation (1.120) pour $i = p = 1$ s'écrit :

$$\frac{1}{h^2} (v_1 - v_2) + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h(1+h)} \right) v_1 \geq 0,$$

On a donc :

$$v_1 \geq \frac{2+2h}{2+3h} (v_2 - v_1) \geq 0,$$

ce qui montre que $\min_{j=1, \dots, N} v_j = v_1 \geq 0$ si $p = 1$.

Un raisonnement similaire permet de montrer que si $p = N$, on a $\min_{j=1, \dots, N} v_j = v_N \geq 0$.

Supposons enfin que $p \in \{2, \dots, N-1\}$ on a alors par l'inégalité (1.120) :

$$\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h(1+ph)} \right) (v_p - v_{p-1}) + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h(1+ph)} \right) (v_p - v_{p+1}) \geq 0.$$

Or $h < 1$, donc $\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h(1+ph)} > 0$. Les deux termes du membre de gauche de l'équation ci-dessus sont donc négatifs ou nuls. On doit donc avoir $v_{p-1} = v_p = v_{p+1}$ ce qui est impossible car p est le plus petit indice j tel que $v_j = \min_{i=1, \dots, N} v_i$. Le minimum ne peut donc pas être atteint pour $j = p > 1$. On a ainsi finalement montré que $\min_{i \in \{1, \dots, N\}} v_i \geq 0$, on a donc $v \geq 0$. La matrice A_h est donc d'inverse positive par la proposition 1.8.

4. (a) Calculons les dérivées successives de θ :

$$\begin{cases} \theta'(x) = -1/2(1+x) - (1+x)\ln(1+x) + \frac{4}{3}(1+x)\ln 2 \\ \theta''(x) = -1/2 - 1 - \ln(1+x) + \frac{4}{3}\ln 2, \\ \theta^{(3)}(x) = \frac{-1}{1+x}, \\ \theta^{(4)}(x) = \frac{1}{(1+x)^2}; \end{cases}$$

Calculons $-\theta''(x) + \frac{1}{1+x}\theta'(x)$. On trouve :

$$-\theta''(x) + \frac{1}{1+x}\theta'(x) = 1/2 + 1 + \ln(1+x) - \frac{4}{3}\ln 2 - 1/2 - \ln(1+x) + \frac{4}{3}\ln 2 = 1.$$

De plus $\theta(0) = 0$ et $\theta(1) = 0$, donc θ est solution du problème (1.85) pour $f(x) = 1$. L'analyse de consistance menée à la question 2. s'applique ici. On a donc :

$$\max_{1 \leq i \leq N} \left| \frac{-\theta(x_{i-1}) + 2\theta(x_i) - \theta(x_{i+1}))}{h^2} + \frac{\theta(x_{i+1}) - \theta(x_{i-1}))}{2h(1+ih)} - 1 \right| \leq \frac{h^2}{12} \left(\sup_{[0;1]} |\theta^{(4)}| + \sup_{[0;1]} |\theta^{(3)}| \right)$$

et comme $\sup_{[0;1]} |\theta^{(4)}| = 1$ et $\sup_{[0;1]} |\theta^{(3)}| = 1$, on a

$$\max_{1 \leq i \leq N} \left| \frac{-\theta(x_{i-1}) + 2\theta(x_i) - \theta(x_{i+1}))}{h^2} + \frac{\theta(x_{i+1}) - \theta(x_{i-1}))}{2h(1+ih)} - 1 \right| \leq \frac{h^2}{4}.$$

(b) On a d'après la question précédente que : $\max_{1 \leq i \leq N} |(A_h \theta_h)_i - f_i| \leq \frac{h^2}{4}$, avec $f_i = 1$, et donc :

$$\frac{h^2}{4} \leq (A_h \theta_h)_i - 1 \leq \frac{h^2}{4} \text{ ce qui entraîne } (A_h \theta_h)_i \geq 1 - \frac{h^2}{4}.$$

(c) Par définition de la norme on a $\|B\|_\infty = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Bv\|}{\|v\|} = \sup_{i \in \{1, \dots, N\}} \sum_{j=1}^N |B_{i,j}|$, et comme A_h^{-1} est une

matrice positive, on a : $\|A_h^{-1}\|_\infty = \sup_{i \in \{1, \dots, N\}} \sum_{j=1}^N (A_h^{-1})_{i,j}$; Considérons le vecteur particulier $v =$

$(1 - \frac{1}{4}h^2; \dots; 1 - \frac{1}{4}h^2)$, et notons $d = A_h^{-1}v$; on a donc $A_h d = v$. D'après la question précédente, on a :

$$(A_h \theta_h)_i \geq v_i, \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$A_h(\theta_h - A_h^{-1}v) \geq 0.$$

Par la propriété de la positivité (question 3), on en déduit que $\theta_h - A_h^{-1}v \geq 0$, et donc :

$$(\theta_h)_i \geq (1 - \frac{1}{4}h^2)(A_h^{-1}e)_i \text{ avec } e = (1, \dots, 1)$$

Or $e \geq 0$, $A_h^{-1}e \geq 0$, et $1 - \frac{1}{4}h^2 > 0$. On en déduit que $(A_h^{-1}e)_i \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{4}h^2} (\theta_h)_i$, soit encore :

$$\|A_h^{-1}e\|_\infty = \|A_h^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{4}h^2} \|\theta_h\|_\infty.$$

La fonction θ est continue et bornée sur $[0; 1]$; il existe donc K tel que $|\theta(x)| \leq K$. De plus $\frac{1}{1 - \frac{1}{4}h^2} \leq \frac{4}{3}$. En posant $M = \frac{4}{3}K$, on obtient donc :

$$\|A_h^{-1}\|_\infty \leq M. \tag{1.121}$$

5. Dans la question 2, on a montré que le schéma est consistant d'ordre 2 et l'erreur de consistance R est majorée de la manière suivante :

$$\|R\|_\infty \leq \frac{h^2}{12} \left(\sup_{[0;1]} \|u^{(4)}\| + \sup_{[0;1]} \|u^{(3)}\| \right)$$

Soit $\bar{u} = (u(x_1), \dots, u(x_N))$ le vecteur dont les composantes sont les valeurs de la solution exacte aux points de discrétisation. Par définition, on a :

$$A_h u_h - A_h \bar{u} = b_h - (b_h + R),$$

et donc l'erreur de discrétisation vérifie :

$$e_h = u - u_h = A_h^{-1}R. \tag{1.122}$$

Pour montrer la convergence du schéma il suffit de montrer que e_h tend vers 0 avec h . Ceci se déduit de la stabilité du schéma ainsi que la consistance. De (1.122), on déduit :

$$\|e_h\|_\infty = \|A_h^{-1} R\|_\infty \leq \|A_h^{-1}\|_\infty \|R\|_\infty,$$

et donc, grâce à la stabilité (1.121) et la consistance (1.119), on obtient : $\|e_h\|_\infty \leq K h^2$, ce qui prouve la convergence d'ordre 2.

6. Dans le cas où $u \in \mathcal{C}^3$, on peut écrire les développements limités de la question 1 jusqu'à l'ordre 3. Un raisonnement similaire à celui de la question 5 donne alors une estimation d'erreur de la forme $\|e_h\|_\infty \leq K h$, ce qui prouve la convergence d'ordre 1. Dans le cas où $u \in \mathcal{C}^2$ par contre, on ne peut plus obtenir d'estimation d'erreur de cette façon.
7. Avec les valeurs $u_0 = a$ et $u_{N+1} = b$, le schéma s'écrit maintenant :

$$\begin{cases} \frac{2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}}{h^2} \alpha \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = f_i & i = 1, \dots, N \\ u_0 = a \\ u_{N+1} = b \end{cases}$$

On en déduit la forme matricielle du système $A_h u_h = b_h$

$$A_h = \begin{bmatrix} \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} + \frac{\alpha}{2h} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} + \frac{\alpha}{2h} & \frac{2}{h^2} & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & \ddots & -\frac{1}{h^2} + \frac{\alpha}{2h} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{h^2} + \frac{\alpha}{2h} & \frac{2}{h^2} \end{bmatrix}$$

soit encore

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{1+h} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{1}{1+2h} & \ddots & \frac{1}{1+2h} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{1+(N-1)h} \\ 0 & \dots & & 0 & \frac{1}{1+Nh} & 0 \end{bmatrix}$$

avec

$$b_h = \begin{bmatrix} f_1 + a \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h(1+h)} \right) \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N + b \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h(1+Nh)} \right) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad u_h = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix}$$

Exercice 11 — Non consistance des volumes finis. Par développement de Taylor, pour $i = 1, \dots, N$, il existe $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ tel que :

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + h_{i+1/2} u'(x_i) + 1/2 h_{i+1/2}^2 u''(x_i) + \frac{h_{i+1/2}^3}{6} u'''(\xi_i),$$

et donc

$$R_i = -\frac{1}{h_i} \frac{h_{i+1/2} + h_{i-1/2}}{2} u''(x_i) + u''(x_i) + \rho_i \quad i = 1, \dots, N,$$

où $|\rho_i| \leq Ch$, C ne dépendant que de la dérivée troisième de u . Il est facile de voir que, en général, R_i , ne tend pas vers 0 lorsque h tend vers 0 (sauf dans des cas particuliers). En effet, prenons par exemple $f \equiv 1$, $h_i = h$ pour i pair, $h_i = h/2$ pour i impair et $x_i = (x_{i+1/2} + x_{i-1/2})/2$ pour $i = 1, \dots, N$. On a dans ce cas $u'' \equiv -1$, $u''' \equiv 0$ et donc :

$$R_i = \begin{cases} -1/4 & \text{si } i \text{ est pair} \\ +1/2 & \text{si } i \text{ est impair.} \end{cases}$$

On en conclut que $\sup\{|R_i|, i = 1, \dots, N\} \not\rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.

Exercice 13.

1. Par développement de Taylor-Young, pour $i = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) &= u(x_{i+1/2}) + (x_{i+1} - x_{i+1/2})u'(x_{i+1/2}) + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_{i+1/2})^2 u''(x_{i+1/2}) \\ &\quad + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_{i+1/2})^2 \varepsilon(x_{i+1} - x_{i+1/2}), \\ u(x_i) &= u(x_{i+1/2}) + (x_i - x_{i+1/2})u'(x_{i+1/2}) + \frac{1}{2}(x_i - x_{i+1/2})^2 u''(x_{i+1/2}) \\ &\quad + \frac{1}{2}(x_i - x_{i+1/2})^2 \varepsilon(x_i - x_{i+1/2}), \end{aligned}$$

avec $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$. Par soustraction, on en déduit que :

$$u(x_{i+1}) - u(x_i) = (x_{i+1} - x_i)u'(x_{i+1/2}) + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} + x_i - 2x_{i+1/2})u''(x_{i+1/2}) + \tilde{\rho}_{i+1/2},$$

où

$$\tilde{\rho}_{i+1/2} = \frac{1}{2}((x_{i+1} - x_{i+1/2})^2 \varepsilon(x_{i+1} - x_{i+1/2}) - (x_i - x_{i+1/2})^2 \varepsilon(x_i - x_{i+1/2})).$$

En posant

$$F_{i+1/2}^* = -\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+1/2}}$$

on obtient après simplifications :

$$F_{i+1/2}^* = -u'(x_{i+1/2}) - 1/2[x_{i+1} + x_i - 2x_{i+1/2}]u''(x_{i+1/2}) + \rho_{i+1/2}$$

avec $|\rho_{i+1/2}| \leq Ch^2$, où $h = \max_{i=1, \dots, N} h_i$ et C ne dépend que de u''' .

2. Dans le cas où $u \in C^3([0; 1])$, $x_{i+1/2} = (x_{i+1} + x_i)/2$, on a donc $|F_{i+1/2}^* + u'(x_{i+1/2})| \leq \rho_{i+1/2}$ et le flux est consistant d'ordre 2.

Dans le cas général, on peut seulement majorer $1/2(x_{i+1} + x_i - 2x_{i+1/2})$ par h , on a donc un flux consistant d'ordre 1.

Exercice 14.

1. On se donne une discrétisation $(x_i)_{i=1, \dots, N}$ de l'intervalle $[0; 1]$ de pas constant et égal à h . On écrit l'équation en chaque point x_i et on remplace $-u''(x_i)$ par le quotient différentiel habituel. En appelant u_1, \dots, u_N les inconnues localisées aux points x_1, \dots, x_N et u_0, u_{N+1} les inconnues auxiliaires localisées en $x = 0$ et $x = 1$, on obtient les équations discrètes associées aux inconnues $i = 1, \dots, N$:

$$\frac{1}{h^2}(2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}) + c_i u_i = f_i$$

avec $c_i = c(x_i)$ et $f_i = f(x_i)$. Il reste à déterminer u_0 et u_{N+1} . Ceci se fait en approchant la dérivée $u'(0)$ (resp. $u'(1)$) par $(u(x_1) - u(0))/h$ (resp. $(u(1) - u(x_N))/h$). Comme $u'(0) = 0$ et $u'(1) = 0$, on

obtient donc que $u_0 = u_1$ et $u_{N+1} = u_N$. Le schéma différences finies s'écrit donc :

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2}(u_1 - u_2) + c_1 u_1 = f_1 \\ \frac{1}{h^2}(2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}) + c_i u_i = f_i, & i = 2, \dots, N-1 \\ \frac{1}{h^2}(u_N - u_{N-1}) + c_N u_N = f_N. \end{cases}$$

2. On se donne un maillage volumes finis, et on intègre l'équation sur chaque maille, ce qui donne le schéma $F_{i+1/2} - F_{i-1/2} = h_i f_i$, $i = 1, \dots, N$ où $F_{i+1/2}$ est le flux numérique à l'interface $x_{i+1/2}$. Pour $i = 1, \dots, N-1$, ce flux numérique est donné par

$$F_{i+1/2} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}}.$$

Pour $i = 0$ et $i = N+1$, on se sert des conditions de Neumann, qui imposent un flux nul. On écrit donc $F_{1/2} = F_{N+1/2} = 0$.

Exercice 15.

1. La discrétisation par différences finies donne comme i -ème équation (voir par exemple exercice ??) :

$$\frac{1}{h^2}(2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}) + c_i u_i = f_i \quad i = 1, \dots, N.$$

Il reste donc à déterminer les inconnues u_0 et u_{N+1} à l'aide de la discrétisation des conditions aux limites, qu'on approche par :

$$\begin{aligned} \frac{u_1 - u_0}{h} + \alpha(u_0 - \bar{u}) &= 0, \\ \frac{u_{N+1} - u_N}{h} + \alpha(u_{N+1} - \bar{u}) &= 0 \end{aligned}$$

où u_0 et u_{N+1} sont les valeurs approchées en x_0 et x_{N+1} , on a donc par élimination :

$$u_0 = \frac{1}{\alpha - 1/h} \left(\alpha \bar{u} - \frac{u_1}{h} \right) \text{ et } u_{N+1} = \frac{1}{\alpha + 1/h} \left(\alpha \bar{u} + \frac{u_N}{h} \right).$$

Ce qui termine la définition du schéma.

2. Par volumes finis, la discrétisation de l'équation s'écrit

$$F_{i+1/2} - F_{i-1/2} = h_i f_i, i = 1, \dots, N,$$

et les seuls flux "nouveaux" sont encore $F_{1/2}$ et $F_{N+1/2}$, qu'on obtient à partir de la discrétisation des conditions aux limites. Ceci peut se faire de plusieurs manières. On peut, par exemple, discrétiser la condition aux limites en 0 par :

$$F_{1/2} + \alpha(u_0 - \bar{u}) = 0, \text{ avec } F_{1/2} = \frac{u_1 - u_0}{\frac{h_1}{2}}.$$

On a dans ce cas $-\alpha(u_0 - \bar{u}) \times \frac{h_1}{2} = -u_1 + u_0$ d'où on déduit que $u_0 = \frac{\alpha \bar{u} h_1 + 2u_1}{\alpha h_1 + 2}$ et qui conduit à l'expression :

$$F_{1/2} = \frac{\alpha}{\alpha h_1 + 2} (2(u_1 - \bar{u}) - \alpha h_1 \bar{u}).$$

Le calcul est semblable pour $F_{N+1/2}$

Exercice 16 (Différences finies et volumes finis pour les conditions de Fourier)

A- 1. Soit $U = (u_0, u_1, \dots, u_N, u_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+2}$ et $b = (c, f(x_1), \dots, f(x_N), d) \in \mathbb{R}^{N+2}$. Le système (1.90) s'écrit sous la forme $AU = b$, avec

$$A = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & & & & 0 \\ 0 & & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{h} & 1 + \frac{1}{h} \end{bmatrix}$$

A- 2. On a :

$$\begin{aligned} AU \cdot V &= \left(u_0 - \frac{u_1 - u_0}{h}\right) \frac{u_0}{h} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{h^2} (2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}) u_i + \left(u_{N+1} + \frac{u_{N+1} - u_N}{h}\right) \frac{u_{N+1}}{h} \\ &= \frac{u_0^2}{h} + \frac{1}{h^2} \left[\sum_{i=0}^N (u_i - u_{i+1}) u_i + \sum_{i=1}^{N+1} \frac{1}{h^2} (u_i - u_{i-1}) u_i \right] \\ &= \frac{1}{h^2} \left(\sum_{i=0}^N (u_{i+1} - u_i)^2 \right) + \frac{1}{h} (u_0^2 + u_{N+1}^2). \end{aligned}$$

On a donc $AU \cdot V \geq 0$ et $AU \cdot V = 0$ si et seulement si $U = 0$. Ceci démontre qu'il ne peut exister $U \neq 0$ tel que $AU = 0$. On en déduit que $\text{Ker} A = \{0\}$ et donc que A est inversible et qu'il existe une unique solution au système (1.90).

A- 3. Oui, il suffit de multiplier les première et dernière équations de (1.90) par $\frac{1}{h}$.

A- 4. Soit $i_0 = \min\{k = 0, \dots, N+1 ; v_k = \min_{j=0, \dots, N+1} v_j\}$. Montrons que $i_0 = 0$ ou $N+1$. Si $0 < i_0 < N+1$, alors par définition de i_0 , on a $v_{i_0} < v_{i_0-1}$ et $v_{i_0} \leq v_{i_0+1}$. Mais par hypothèse,

$$(AV)_{i_0} = \frac{1}{h^2} (v_{i_0} - v_{i_0-1}) + (v_{i_0} - v_{i_0+1}) \geq 0.$$

Or à gauche de cette inégalité, on a la somme d'un terme strictement négatif avec un terme négatif, qui est donc strictement négatif : c'est impossible. Donc on a bien $i_0 = 0$ ou $N+1$. Si $i_0 = 0$, on en déduit en particulier que $v_1 \geq v_0$; on conclut alors que $v_0 \geq 0$: en effet, comme $(Av)_0 \geq 0$, on a $v_0 - \frac{v_1 - v_0}{h} \geq 0$, et donc $v_0 \geq 0$. On a donc bien $v_i \geq 0$ pour $i = 0, \dots, N$. Le même raisonnement s'applique si $i_0 = N+1$.

A- 5. Pour $i = 1, \dots, N$, on a $R_i = \frac{2u(x_i) - u(x_{i-1}) - u(x_{i+1}))}{h^2} + u''(x_i)$, et en supposant $u \in C^4([0; 1])$, les développements de Taylor habituels entraînent que $|R_i| \leq Ch^2$ où $C \geq 0$ ne dépend que de u .

Pour $i = 0$, on a $R_0 = u(x_0) - \frac{u(x_1) - u(x_0)}{h} - c = -\frac{u(x_1) - u(x_0)}{h} + u'(x_0)$. On en déduit que $|R_0| \leq Ch$ $C \geq 0$ ne dépend que de u . La condition limite en 1 se traite de manière similaire, et on a donc $|R_{N+1}| \leq Ch$. Le schéma est donc consistant d'ordre 1.

A- 6. (a) Comme φ est un polynôme de degré 2, on a

$$(A\Phi)_i = \frac{2\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}) - \varphi(x_{i+1}))}{h^2} = -\varphi''(x_i) = 2, \quad i = 1, \dots, N.$$

On a $(A\Phi)_0 = \varphi(x_0) - \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_0)}{h} = 4 - \frac{1}{h}(4 + h^2 - 4) = 4 - h$ et $(A\Phi)_{N+1} = \varphi(x_{N+1}) - \frac{\varphi(x_{N+1}) - \varphi(x_N)}{h} = 3 - (2 - h) = 1 + h$

A- 6 (b) On a

$$A(U \pm \mu\phi) = \begin{bmatrix} b_0 \pm \mu(4+h) \\ b_1 \pm 2\mu \\ \vdots \\ b_N \pm 2\mu \\ b_{N+1} \pm \mu(1+h) \end{bmatrix}$$

On a donc bien $A(U + \mu\phi) \geq 0$ et $A(U - \mu\phi) \leq 0$ pour $\mu = \max\left(\max_{i=1,\dots,N}\left(\frac{|b_i|}{2}\right), \frac{|b_0|}{4}, |b_{N+1}|\right)$

Par la question 4., on sait que si $AV \geq 0$ alors $V \geq 0$ (et donc aussi que si $AV \leq 0$ alors $V \leq 0$). On en déduit que $U + \mu\phi \geq 0$ et $U - \mu\phi \leq 0$. Or $\max_{i=1,\dots,N+1} |\phi_i| = 4$, et on a donc $-4\mu \leq u_i \leq 4\mu$, pour $i = 0, \dots, N+1$. On en déduit que $\|U\|_\infty \leq 4\mu$.

Par définition, $\|A^{-1}\|_\infty = \sup_{V \neq 0} \frac{\|A^{-1}V\|_\infty}{\|V\|_\infty}$. Et donc $\|A^{-1}\|_\infty \leq 4$.

comme $-\varphi'' = 2$, $\varphi(0) - \varphi'(0) = 4$ et $\varphi(1) - \varphi'(1) = 1$, on a donc

$$\begin{aligned} -(u - \mu\varphi)'' &= f - 2\mu \\ (u - \mu\varphi)(0) + (u - \mu\varphi)'(0) &= c - 4\mu \\ (u - \mu\varphi)(1) + (u - \mu\varphi)'(1) &= d - \mu \end{aligned}$$

A- 7. Par définition de l'erreur de consistance, on a $A\bar{U} - b = R$, et comme $AU = b$, en notant $E = U - \bar{U}$ le vecteur erreur, on a $AE = -R$. On en déduit que $\|E\|_\infty \leq \|A^{-1}\|_\infty \|R\|_\infty \leq 4Ch$. Le schéma est donc convergent d'ordre 1.

B- 1. On écrit les équations de bilan sur les mailles ; en intégrant l'équation (1.89a) sur chaque maille K_i , $i = 1, \dots, N$. On obtient

$$\bar{F}_{i+1/2} - \bar{F}_{i-1/2} = h_i f_i,$$

où $\bar{F}_{i+1/2} = -u'(x_{i+1/2})$ est le flux en $x_{i+1/2}$ pour $i = 0, \dots, N$, et f_i est la valeur moyenne de f sur la maille K_i . Le schéma volumes finis s'écrit :

$$F_{i+1/2} - F_{i-1/2} = h_i f_i, i = 1, \dots, N \quad (1.123)$$

où $F_{i+1/2}$ est le flux numérique dont il reste à donner l'expression en fonction des inconnues $u_0, u_1, \dots, u_N, u_{N+1}$. Pour $i = 1, \dots, N-1$, le flux numérique s'écrit de manière classique

$$F_{i+1/2} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}}, \quad (1.124)$$

ce qui donne une erreur de consistance d'ordre 1 sur le flux. Les flux en 0 et en 1 sont approchés en tenant compte des conditions aux limites de Fourier en 0 et 1 :

$$F_{1/2} = -\frac{u_1 - u_0}{h_{1/2}}, \text{ et } F_{1/2} = c - u_0. \quad (1.125)$$

$$F_{N+1/2} = -\frac{u_{N+1} - u_N}{h_{N+1/2}}, \text{ et } F_{N+1/2} = u_{N+1} - d. \quad (1.126)$$

B- 2. On peut écrire le schéma (1.123)–(1.126) sous la forme $AU = b$, avec $U = (u_0, u_1, \dots, u_N, u_{N+1})$, $b = (c, h_1 f_1, \dots, h_N f_N, d)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{h_{1/2}} & -\frac{1}{h_{1/2}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h_{1/2}} & \frac{1}{h_{1/2}} + \frac{1}{h_{3/2}} & -\frac{1}{h_{3/2}} & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & -\frac{1}{h_{N-1/2}} & \frac{1}{h_{N-1/2}} + \frac{1}{h_{N+1/2}} & -\frac{1}{h_{N+1/2}} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{h_{N+1/2}} & 1 + \frac{1}{h_{N+1/2}} \end{bmatrix}$$

B- 3. Soit $V = (v_0, v_1, \dots, v_N, v_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+2}$. Montrons que $AV \cdot V > 0$ si $V \neq 0$.

$$\begin{aligned} AV \cdot V &= (v_0 + \frac{1}{h_{1/2}}(v_0 - v_1))v_0 + \sum_{i=1}^N (-\frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1/2}} + \frac{v_i - v_{i-1}}{h_{i-1/2}})v_i + \frac{1}{h_{N+1/2}}(v_{N+1} - v_N)v_{N+1} + v_{N+1}^2 \\ &= v_0^2 - \sum_{i=0}^N (-\frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1/2}})v_i + \sum_{i=0}^N \frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1/2}} v_{i+1} + v_{N+1}^2 \\ &= v_0^2 - \sum_{i=0}^N (-\frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1/2}})v_i + \sum_{i=0}^N \frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1/2}} v_{i+1} + v_{N+1}^2 + \sum_{i=0}^N \frac{(v_{i+1} - v_i)^2}{h_{i+1/2}} + v_{N+1}^2 \\ &> 0 \text{ pour tout } V \neq 0. \end{aligned}$$

On en déduit que $AV = 0$ si et seulement si $V = 0$, ce qui prouve que A est inversible et que le système (1.123)–(1.126) admet une solution unique.

B- 4. Soit $i_0 = \min\{k = 0, \dots, N+1 ; v_k = \min_{j=0, \dots, N+1} v_j\}$. Montrons que $i_0 = 0$ ou $N+1$. Si $0 < i_0 < N+1$, alors par définition de i_0 , on a $v_{i_0} < v_{i_0-1}$ et $v_{i_0} \leq v_{i_0+1}$. Mais par hypothèse, pour

$$(AV)_{i_0} = \frac{1}{h_{i_0+1/2}}(v_{i_0} - v_{i_0+1}) + \frac{1}{h_{i_0-1/2}}(v_{i_0} - v_{i_0-1}) \geq 0.$$

Or à gauche de cette inégalité, on a la somme d'un terme négatif avec un terme strictement négatif, qui est donc strictement négatif : c'est impossible. Donc on a bien $i_0 = 0$ ou $N+1$. Si $i_0 = 0$, on en déduit en particulier que $v_1 \geq u_0$; on conclut alors que $v_0 \geq 0$: en effet, comme $(Av)_0 \geq 0$, on a $v_0 \geq \frac{1}{h_{1/2}}(v_1 - v_0) \geq 0$. On a donc bien $v_i \geq 0$ pour $i = 0, \dots, N$. Le même raisonnement s'applique si $i_0 = N+1$.

B- 5. Pour $i = 0, \dots, N$, on note $\bar{F}_{i+1/2} = -u'(x_{i+1/2})$ le flux exact et $F_{i+1/2}^* = -\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+1/2}}$. Par définition, l'erreur de consistance sur le flux est donnée par $R_{i+1/2} = \bar{F}_{i+1/2} - F_{i+1/2}^*$. Par un développement de Taylor, on obtient facilement que si u est de classe C^1 , alors $|R_{i+1/2}| \leq Ch$ où $C \in \mathbb{R}_+$ ne dépend que de h .

B- 6. On a

$$F_{i+1/2} - F_{i-1/2} = h_i f_i \quad \text{et} \quad \bar{F}_{i+1/2} - \bar{F}_{i-1/2} = h_i f_i \quad i = 1, \dots, N.$$

En soustrayant ces deux équations, en notant $e_i = u(x_i) - u_i$, on obtient :

$$-\frac{e_{i+1} - e_i}{h_{i+1/2}} + \frac{e_i - e_{i-1}}{h_{i-1/2}} = R_{i+1/2} - R_{i-1/2} \quad i = 1, \dots, N.$$

De même, les équations continues et discrètes du bord s'écrivent :

$$\begin{aligned} u(0) + \bar{F}_{1/2} &= c, & u(1) - \bar{F}_{N+1/2} &= d \\ u_0 + F_{1/2} &= c, & u_{N+1} - F_{N+1/2} &= d. \end{aligned}$$

En les soustrayant deux à deux, on obtient

$$e_0 - \frac{e_1 - e_0}{h_{1/2}} = R_{1/2} \quad \text{et} \quad e_{N+1} - \frac{e_{N+1} - e_N}{h_{N+1/2}} = R_{N+1/2}.$$

On obtient donc finalement

$$\begin{aligned} e_0 - \frac{e_1 - e_0}{h_{1/2}} &= R_{1/2}, \\ -\frac{e_{i+1} - e_i}{h_{i+1/2}} + \frac{e_i - e_{i-1}}{h_{i-1/2}} &= R_{i+1/2} - R_{i-1/2}, \quad i = 1, \dots, N, \\ e_{N+1} - \frac{e_{N+1} - e_N}{h_{N+1/2}} &= R_{N+1/2}. \end{aligned}$$

On multiplie la première équation par e_0 , on multiplie la deuxième par e_i et la troisième par e_{N+1} , et on somme toutes les équations résultantes ; on obtient, en utilisant la consistance des flux,

c'est-à-dire $|R_{i+1/2}| \leq Ch$:

$$e_0^2 + \sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+1/2}} + e_{N+1}^2 = \sum_{i=0}^N R_{i+1/2}(e_{i+1} - e_i) \leq Ch \sum_{i=0}^N |e_{i+1} - e_i|.$$

Pour arriver à une majoration du terme de gauche, il faut arriver à majorer le terme $Ch|e_{i+1} - e_i|$ de manière "efficace". Un des moyens les plus simples est d'utiliser l'inégalité de Young :

$$Ch|e_{i+1} - e_i| = \frac{|e_{i+1} - e_i|}{\sqrt{h_{i+1/2}}} (Ch\sqrt{h_{i+1/2}}) \leq 1/2 \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+1/2}} + 1/2C^2h^2h_{i+1/2},$$

et donc

$$e_0^2 + 1/2 \sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+1/2}} + e_{N+1}^2 \leq 1/2C^2h^2 \sum_{i=0}^N h_{i+1/2} = 1/2C^2h^2.$$

On en déduit que

$$|e_0| \leq Ch, |e_{N+1}| \leq Ch \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+1/2}} + e_{N+1}^2 \leq C^2h^2$$

Remarquons que comme e_0 n'est pas nul, on ne peut pas appliquer l'inégalité de Poincaré discrète directement, mais on peut l'adapter en reprenant sa preuve ; en effet,

$$|e_i| \leq |e_0| + \sum_{k=0}^{i-1} |e_{k+1} - e_k| \leq |e_0| + \sum_{k=0}^N \frac{|e_{k+1} - e_k|}{\sqrt{h_{i+1/2}}} \sqrt{h_{i+1/2}} \leq |e_0| + \sum_{k=0}^N \frac{|e_{k+1} - e_k|^2}{h_{i+1/2}} \leq 2Ch$$

Et on a donc également $\|e_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\{0;1\})} \leq Ch$ où $e_{\mathcal{T}}$ est la fonction constante par maille et égale à e_i sur la maille K_i . Le schéma est donc convergent d'ordre h .

Exercice 18 — Problème elliptique 1D et discrétisation par volumes finis.

1. On intègre (1.91) sur une maille $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ et on obtient :

$$-u'(x_{i+1/2}) + u'(x_{i-1/2}) + a[u(x_{i+1/2}) - u(x_{i-1/2})] + b \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x) dx = bh_i f_i. \quad (1.127)$$

Pour justifier le schéma numérique proposé on remarque que :

$$u(x_{i+1}) = u(x_{i+1/2}) + (x_{i+1} - x_{i+1/2})u'(x_{i+1/2}) + 1/2(x_{i+1} - x_{i+1/2})^2 u''(\xi_i)$$

avec $\xi_i \in [x_{i+1/2}, x_{i+1}]$ et de même

$$u(x_i) = u(x_{i+1/2}) + (x_i - x_{i+1/2})u'(x_{i+1/2}) + 1/2(x_i - x_{i+1/2})^2 u''(\gamma_i)$$

avec $\gamma_i \in [x_{i-1/2}, x_i]$, dont on déduit :

$$u(x_{i+1}) - u(x_i) = h_{i+1/2}u'(x_{i+1/2}) + \frac{1}{8}(h_{i+1}^2 u''(\xi_i) - h_i^2 u''(\gamma_i)).$$

De plus en utilisant le fait que x_i est le milieu de $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ on a (voir démonstration plus loin)

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u dx = u(x_i)h_i + \frac{1}{24}u''(\alpha_i)h_i^3 \quad (1.128)$$

D'où le schéma numérique.

Démontrons la formule (1.128). Pour cela il suffit (par changement de variable) de démontrer que si $u \in C^2(\mathbb{R})$, alors pour tout $\alpha \geq 0$, on a :

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} u dx = 2\alpha u(0) + \frac{1}{3}u''(\alpha_i)\alpha^3. \quad (1.129)$$

Pour cela, on utilise une formule de type Taylor avec reste intégral, qu'on obtient en remarquant que si on pose $\varphi(t) = u(tx)$, alors $\varphi'(t) = xu'(tx)$, et $\varphi''(t) = x^2u''(tx)$. Or $\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)dt$, et par intégration par parties, on obtient donc :

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 \varphi''(t)(1-t)dt.$$

On en déduit alors que

$$u(x) = u(0) + xu'(0) + \int_0^1 x^2u''(tx)(1-t)dt.$$

En intégrant entre $-\alpha$ et α , on obtient alors :

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} u(x) dx = 2\alpha u(0) + A, \text{ avec } A = \int_0^1 x^2u''(tx)(1-t)dt dx.$$

Comme la fonction u'' est continue elle est minorée et majorée sur $[-\alpha, \alpha]$. Soient donc $m = \min_{[-\alpha, \alpha]} u''$ et $M = \max_{[-\alpha, \alpha]} u''$. Ces deux valeurs sont atteintes par u'' puisqu'elle est continue. On a donc $u''([-\alpha, \alpha]) = [m, M]$. De plus, la fonction $(x, t) \mapsto x^2(1-t)$ est positive ou nulle sur $[-\alpha, \alpha] \times [0; 1]$. On peut donc minorer et majorer A de la manière suivante

$$m \int_0^1 x^2(1-t)dt dx \leq A \leq M \int_0^1 x^2(1-t)dt dx.$$

Or

$$\int_0^1 x^2(1-t)dt dx = \frac{1}{3}\alpha^3$$

On en déduit que $\frac{1}{3}\alpha^3 m \leq A \leq \frac{1}{3}\alpha^3 M$, et donc que

$$A = \frac{1}{3}\alpha^3 \gamma$$

avec $\gamma \in [m, M]$; mais comme u'' est continue, elle prend toutes les valeurs entre m et M , il existe donc $\beta \in [-\alpha, \alpha]$ tel que $\gamma = u''(\beta)$, ce qui termine la preuve de (1.129).

2. (a) On multiplie (1.94) par u_i et on somme pour $i = 1, \dots, N$. On obtient après changement d'indice que

$$\sum_{i=0}^{i=N} \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{h_{i+1/2}} + \frac{a}{2} \sum_{i=0}^{i=N} (u_{i+1} - u_i)^2 + b \sum_{i=0}^{i=N} u_i^2 h_i = 0.$$

Ce qui donne $u_i = 0$ pour tout $i = 1 \dots N$, d'où en mettant le schéma sous la forme matricielle $AU = B$ on déduit que l'application linéaire représentée par la matrice A est injective donc bijective (grâce au fait qu'on est en dimension finie) et donc que (1.94) admet une unique solution.

3. (a) Evident.

- (b) On pose $\bar{R} = A\bar{U} - B$. On a donc $R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)}$, avec

$$R_i^{(1)} = -\frac{1}{h_i} \left[\left(\frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_i}{h_{i+1/2}} - u'(x_{i+1/2}) \right) - \left(\frac{\bar{u}_i - \bar{u}_{i-1}}{h_{i-1/2}} - u'(x_{i-1/2}) \right) \right],$$

$$R_i^{(2)} = \frac{a}{h_i} [(\bar{u}_i - u(x_{i+1/2})) - (\bar{u}_{i-1} - u(x_{i+1/2}))].$$

De plus on remarque que

$$\bar{u}_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u dx = u(x_{i+1/2}) - \frac{h_i}{2} u'(x_{i+1/2}) + \frac{h_i^2}{6} u''(x_{i+1/2}) - \frac{h_i^3}{24} u^{(3)}(d_i) \quad (1.130)$$

$$\bar{u}_{i+1} = \frac{1}{h_{i+1}} \int_{x_{i+1/2}}^{x_{i+3/2}} u dx = u(x_{i+1/2}) + \frac{h_{i+1}}{2} u'(x_{i+1/2}) + \frac{h_{i+1}^2}{6} u''(x_{i+1/2}) - \frac{h_{i+1}^3}{24} u^{(3)}(\delta_i) \quad (1.131)$$

avec $d_i \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ et $\delta_i \in [x_{i+1/2}, x_{i+3/2}]$. Ce qui implique que :

$$\frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_i}{h_{i+1/2}} = u'(x_{i+1/2}) + \frac{1}{3} u''(x_{i+1/2})(h_{i+1} - h_i) + \frac{1}{24} \frac{1}{h_{i+1/2}} [u^{(3)}(\delta_i)h_{i+1}^3 + u^{(3)}(d_i)h_i^3]$$

et donc

$$\frac{1}{h_i} \left[\frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_i}{h_{i+1/2}} - u'(x_{i+1/2}) \right] = S_i + K_i,$$

avec

$$|S_i| = \left| \frac{1}{3} u''(x_{i+1/2}) \left(\frac{h_{i+1}}{h_i} - 1 \right) + \frac{1}{24} \right| \leq Ch$$

et

$$|K_i| = \left| \frac{1}{h_i h_{i+1/2}} [u^{(3)}(\delta_i)h_{i+1}^3 + u^{(3)}(d_i)h_i^3] \right| \leq Ch,$$

où C ne dépend que de u . De plus si on pose $L_i = (\bar{u}_i - u(x_{i+1/2}))/h_i$ par développement de Taylor, il existe \tilde{C} ne dépendant que de u telle que $|L_i| \leq Ch$. Finalement on conclut que $|R_i^{(1)}| = |-S_i + S_{i+1}| \leq C_1$ et $|R_i^{(2)}| = |-K_i + K_{i-1} + a(L_i - L_{i-1})| \leq C_2 h$.

4. Reprendre les résultats précédents. Pour $|R_{i+1/2}| \leq Ch$ reprendre calcul du 3 $|R_{i+1/2}| = |h_i(-S_i - K_i + L_i)|$.
5. (a) On pose $e_i = \bar{u}_i - u_i$. Cette définition implique que e_i est solution du système (1.104)-(1.106).
- (b) Un calcul similaire à celui de la question 2. donne que

$$b \sum_1^N h_i e_i + \sum_{i=0}^{i=N} \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+1/2}} + \frac{a}{2} \sum_{i=0}^{i=N} (e_{i+1} - e_i)^2 = \sum_{i=0}^{i=N} R_{i+1/2} (e_{i+1} - e_i)$$

D'où en utilisant le fait que $\alpha h \leq h_i \leq \beta h$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz on déduit que

$$\frac{1}{\beta h} \sum_{i=0}^{i=N} (e_{i+1} - e_i)^2 \leq \left(\sum_{i=0}^{i=N} (e_{i+1} - e_i)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=0}^{i=N} R_{i+1/2}^2 \right)^{1/2}$$

et en utilisant (1.103), et le fait que $\sum_{i=0}^{i=N} h_i = 1$ entraîne $N \leq \frac{1}{\alpha h}$, on déduit :

$$\sum_{i=0}^{i=N} (e_{i+1} - e_i)^2 \leq C_1 \frac{\beta}{\alpha} h^3.$$

En remarquant que $e_i = \sum_{j=0}^{j=i-1} (e_{j+1} - e_j)$ on a pour tout $0 < i \leq N$ que

$$|e_i| \leq \left(\sum_{j=0}^{j=i} (e_{j+1} - e_j)^2 \right)^{1/2} i^{1/2} \leq \left(C_1 \frac{\beta}{\alpha} h^3 \right)^{1/2} N^{1/2}$$

et donc $|e_i| \leq \frac{\sqrt{C_1 \beta}}{\alpha} h$, pour tout $0 < i \leq N$.

Exercice 20. On note (x, y) les coordonnées d'un point de \mathbb{R}^2 .

1. En multipliant la première équation de (1.111) par φ et en intégrant par parties, on trouve, pour tout $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$ tel que $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega$:

$$\int_{\Omega} \nabla u(x, y) \cdot \nabla \varphi(x, y) \, dx dy + \int_{\Omega} k \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \varphi(x, y) \, dx = \int_{\Omega} f(x, y) \varphi(x, y) \, dx dy. \quad (1.132)$$

On suppose maintenant que $f \leq 0$ sur Ω . On se donne une fonction $\psi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que $\psi(s) = 0$ si $s \leq 0$ et $\psi(s) > 0$ si $s > 0$. (On peut choisir, par exemple, $\psi(s) = s^2$ pour $s > 0$ et $\psi(s) = 0$ pour $s \leq 0$) et on prend dans (1.132) $\varphi = \psi \circ u$. On obtient ainsi :

$$\int_{\Omega} \psi'(u(x, y)) |\nabla u(x, y)|^2 \, dx dy + \int_{\Omega} k \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \psi(u(x, y)) \, dx = \int_{\Omega} f(x, y) \psi(u(x, y)) \, dx dy \leq 0. \quad (1.133)$$

En notant G la primitive de ψ s'annulant en 0, on a :

$$\frac{\partial}{\partial x} G(u(x, y)) = \psi(u(x, y)) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$$

Comme $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on obtient donc :

$$\int_{\Omega} k \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \psi(u(x, y)) \, dx dy = \int_{\Omega} k \frac{\partial}{\partial x} G(u(x, y)) \, dx dy = \int_{\partial\Omega} k G(u(x, y)) n_x \, d\gamma(x, y) = 0,$$

où n_x désigne la première composante du vecteur normal \mathbf{n} à $\partial\Omega$ extérieur à Ω , et $d\gamma(x, y)$ le symbole d'intégration par rapport à la mesure de Lebesgue unidimensionnelle sur $\partial\Omega$. De (1.133) on déduit alors :

$$\int_{\Omega} \psi'(u(x, y)) |\nabla u(x, y)|^2 \, dx dy \leq 0,$$

et donc, comme $\psi' \geq 0$ et que la fonction $(x, y) \mapsto \psi'(u(x, y)) |\nabla u(x, y)|^2$ est continue :

$$\psi'(u(x, y)) |\nabla u(x, y)|^2 = 0, \forall (x, y) \in \bar{\Omega}.$$

Ceci donne aussi

$$\nabla \psi(u(x, y)) = 0, \forall (x, y) \in \bar{\Omega}.$$

La fonction $\psi \circ u$ est donc constante sur $\bar{\Omega}$, comme elle est nulle sur $\partial\Omega$, elle est nulle sur $\bar{\Omega}$, ce qui donne $u \leq 0$ sur $\bar{\Omega}$.

2. On s'intéresse ici à la consistance au sens des différences finies. On pose donc $\bar{u}_{i,j} = u(ih, jh)$ pour $i, j \in \{0, \dots, N+1\}^2$. On a bien $\bar{u}_{i,j} = 0$ pour $(i, j) \in \gamma$, et pour $(i, j) \in \{1, \dots, N\}^2$, on pose $R_{ij} = a_0 \bar{u}_{i,j} - a_1 \bar{u}_{i-1,j} - a_2 \bar{u}_{i+1,j} - a_3 \bar{u}_{i,j-1} - a_4 \bar{u}_{i,j+1} - f_{i,j}$. On rappelle que u est solution de (2.5.84), R_j est donc l'erreur de consistance. Dans le cas du schéma [I] on a :

$$R_{ij} = \frac{2\bar{u}_{ij} - \bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{i-1,j}}{h^2} + \frac{2\bar{u}_{ij} - \bar{u}_{i,j+1} - \bar{u}_{i,j-1}}{h^2} + k \frac{\bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{i-1,j}}{2h} - f_{ij}.$$

Comme $u \in C^4(\bar{\Omega})$, il existe $\xi_{ij} \in]0; 1[$ et $\eta_{ij} \in]0; 1[$ tel que :

$$\bar{u}_{i+1,j} = \bar{u}_{i,j} + h \frac{\partial u}{\partial x}(ih, jh) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(ih, jh) + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(ih, jh) + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(ih + \xi_{ij}h, jh) \quad (1.134)$$

$$\bar{u}_{i-1,j} = \bar{u}_{i,j} - h \frac{\partial u}{\partial x}(ih, jh) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(ih, jh) - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(ih, jh) + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(ih + \eta_{ij}h, jh). \quad (1.135)$$

On obtient des formules analogues pour $\bar{u}_{i,j+1}$ et $\bar{u}_{i,j-1}$, et on en déduit

$$|R_{i,j}| \leq \frac{h^2}{12} \|u_{xxxx}\|_{\infty} + \frac{h^2}{12} \|u_{yyyy}\|_{\infty} + k \frac{h^2}{6} \|u_{xxx}\|_{\infty}$$

où $\|u_{xxxx}\|_{\infty}$ désigne la norme uniforme sur $\bar{\Omega}$ de la dérivée h^2 de u par rapport à x (notations analogues pour $\|u_{yyyy}\|_{\infty}$ et $\|u_{xxx}\|_{\infty}$). On obtient finalement $|R_{ij}| \leq C_1 h^2$ où C_1 ne dépend que de u et k . Comme pour h petit, on a $h^2 \leq h$, on en déduit que schéma [I] est donc d'ordre 2.

Pour le schéma [II], on a :

$$R_{ij} = \frac{2\bar{u}_{ij} - \bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{i-1,j}}{h^2} + \frac{2\bar{u}_{ij} - \bar{u}_{i,j+1} - \bar{u}_{i,j-1}}{h^2} + k \frac{\bar{u}_{ij} - \bar{u}_{i-1,j}}{h} - f_{ij}.$$

D'où l'on déduit

$$|R_{ij}| \leq \frac{h^2}{12} \|u_{xxxx}\|_\infty + \frac{h^2}{12} \|u_{yyyy}\|_\infty + \frac{kh}{2} \|u_{xx}\|_\infty,$$

et donc $|R_{ij}| \leq C_2 h$ où C_2 ne dépend que de u et k . Le schéma [II] est donc d'ordre 1.

3. Dans le cas du schéma [II], la famille des $w_{ij}, i, j \in \{0, \dots, N+1\}^2$ vérifie $\forall i, j \in \{1, \dots, N\}$:

$$\frac{1}{h^2} (w_{ij} - w_{i+1,j}) + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{k}{h} \right) (w_{ij} - w_{i-1,j}) + \frac{1}{h^2} (w_{ij} - w_{i,j+1}) + \frac{1}{h^2} (w_{ij} - w_{i,j-1}) \leq 0$$

On pose $M = \max\{w_{i,j}, (i,j) \in \{0, \dots, N+1\}^2\}$ et $m = \max\{w_{i,j}, (i,j) \in \gamma\}$. Noter que $\gamma = \{0, \dots, N+1\}^2 \setminus \{1, \dots, N\}^2$. On a bien sûr $m \leq M$ et il reste donc à montrer que $M \leq m$. Soit $A = \{(i,j) \in \{0, \dots, N+1\}^2, w_{i,j} = M\}$ et soit $(\bar{i}, \bar{j}) \in A$ tel que $\bar{i} = \max\{i, (i,j) \in A\}$ et $\bar{j} = \max\{j, (i,j) \in A\}$. On distingue deux cas :

(a) Si $\bar{i} \in \{0, N+1\}$ ou $\bar{j} \in \{0, \dots, N+1\}$, on a alors $(\bar{i}, \bar{j}) \in \gamma$ et donc $M = w_{\bar{i}, \bar{j}} \leq m$.

(b) Sinon, on a $\bar{i} \notin \{0, N+1\}$ et $\bar{j} \notin \{0, N+1\}$, et donc $(\bar{i}, \bar{j}) \in \{1, \dots, N\}^2$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} (w_{\bar{i}, \bar{j}} - w_{\bar{i}+1, \bar{j}}) + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{k}{h} \right) (w_{\bar{i}, \bar{j}} - w_{\bar{i}-1, \bar{j}}) + \\ \frac{1}{h^2} (w_{\bar{i}, \bar{j}} - w_{\bar{i}, \bar{j}+1}) + \frac{1}{h^2} (w_{\bar{i}, \bar{j}} - w_{\bar{i}, \bar{j}-1}) \leq 0, \quad (1.136) \end{aligned}$$

ce qui est impossible car $w_{\bar{i}, \bar{j}} = M$ et donc

$$\begin{aligned} w_{\bar{i}, \bar{j}} - w_{\bar{i}, \bar{j}-1} &\geq 0, \\ w_{\bar{i}, \bar{j}} - w_{\bar{i}, \bar{j}+1} &\geq 0, \\ w_{\bar{i}, \bar{j}} - w_{\bar{i}-1, \bar{j}} &\geq 0, \\ w_{\bar{i}, \bar{j}} - w_{\bar{i}+1, \bar{j}} &> 0, \end{aligned}$$

noter que la dernière inégalité est bien stricte car $(\bar{i}+1, \bar{j}) \notin A$ (c'est l'intérêt du choix de \bar{i}).

On a donc bien montré que $M \leq m$.

Dans le cas du schéma [II], si on a $\bar{i} \notin \{0, N+1\}$ et $\bar{j} \notin \{0, N+1\}$, et donc $(\bar{i}, \bar{j}) \in \{1, \dots, N\}^2$ le même raisonnement que celui du schéma 1 donne :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{h^2} - \frac{k}{2h} \right) (u_{\bar{i}, \bar{j}} - u_{\bar{i}+1, \bar{j}}) + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{h}{2h} \right) (u_{\bar{i}, \bar{j}} - u_{\bar{i}-1, \bar{j}}) \\ + \frac{1}{h^2} (u_{\bar{i}, \bar{j}} - u_{\bar{i}, \bar{j}+1}) + \frac{1}{h^2} (u_{\bar{i}, \bar{j}} - u_{\bar{i}, \bar{j}-1}) \leq 0. \quad (1.137) \end{aligned}$$

On ne peut conclure à une contradiction que si $\frac{1}{h^2} - \frac{k}{2h} \geq 0$. Le schéma [II] vérifie

$$w_{i,j} \leq \max_{(k,\ell) \in \gamma} (w_{k,\ell}) \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}^2$$

lorsque h vérifie la condition (dite Condition de stabilité) :

$$h \leq \frac{2}{k} \quad (1.138)$$

4. La fonction ϕ vérifie $\phi_x = 0$, $\phi_y = y$ et $\phi_{yy} = 1$ et donc $-\Delta\phi + k \frac{\partial\phi}{\partial x} = -1$. On pose maintenant $\phi_{i,j} = \phi(ih, jh)$ pour $i, j \in \{a, \dots, N+1\}^2$ (Noter que ϕ ne vérifie pas la condition $\phi_{i,j} = 0$ si $(i,j) \in \gamma$). Comme $\phi_{xx} = \phi_{xxx} = \phi_{xxxx} = \phi_{yyyy} = 0$, les calculs de la question 2 montrent que pour les schémas [I] et [II] :

$$a_0\phi_{i,j} - a_1\phi_{i-1,j} - a_2\phi_{i+1,j} - a_3\phi_{i,j-1} - a_4\phi_{i,j+1} = -1$$

pour $i, j \in \{1, \dots, N\}^2$. En posant $w_{i,j} = u_{i,j} + C\phi_{i,j}$ pour $(i, j) \in \{0, \dots, N+1\}^2$ (et U solution de (1.112)) on a donc :

$$a_0 w_{i,j} - a_1 w_{i-1,j} - a_2 w_{i+1,j} - a_3 w_{i,j-1} - a_4 w_{i,j+1} = f_{i,j} - C \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}$$

On prend $C = \|f\|_\infty$, de sorte que $f_{i,j} - C \leq 0$ pour tout (i, j) pour le schéma [II] et pour le schéma [I] avec $h \leq 2/k$, la question 3 donne alors pour $(i, j) \in \{1, \dots, N\}^2$,

$$w_{i,j} \leq \max\{w_{k\ell}, (k\ell) \in \gamma\} \leq \frac{C}{2}$$

car $u_{i,j} = 0$ si $(i, j) \in \gamma$ et $-\max_{\Omega} \phi = 1/2$. On en déduit pour $(i, j) \in \{1, \dots, N\}^2$, $w_{i,j} \leq C/2 = 1/2\|f\|_\infty$. Pour montrer que $-w_{i,j} \leq 1/2\|f\|_\infty$, on prend maintenant $w_{i,j} = C\phi_{i,j} - u_{i,j}$ pour $(i, j) \in \{0, \dots, N+1\}^2$, avec $C = \|f\|_\infty$. On a donc

$$a_0 w_{i,j} - a_1 w_{i-1,j} - a_2 w_{i+1,j} - a_3 w_{i,j-1} - a_4 w_{i,j+1} = -C - f_{i,j} \leq 0, \forall i, j \in \{1, \dots, N\}.$$

Ici encore, pour le schéma [II] ou le schéma [I] avec la condition $h \leq 2/k$, la question 3 donne

$$w_{i,j} \leq \max\{w_{k\ell}, (k\ell) \in \gamma\} = \frac{C}{2}$$

donc $u_{i,j} \geq -C/2 = -\|f\|_\infty/2$ pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, N\}^2$. Pour le schéma [II] ou le schéma [I] avec la condition $h \leq 2/k$, on a donc :

$$\|U\|_\infty \leq 1/2\|f\|_\infty. \quad (1.139)$$

Le système (1.112) peut être vu comme un système linéaire de N^2 équation, à N^2 inconnues (qui sont les $u_{i,j}$ pour $(i, j) \in \{1, \dots, N\}^2$). Si le second membre de ce système linéaire est nul, l'inégalité (1.139)(I) prouve que la solution est nulle. Le système (1.112) admet donc, pour tout f , au plus une solution. Ceci est suffisant pour affirmer qu'il admet, pour tout f , une et une seule solution.

5. Pour $(i, j) \in \{0, \dots, N+1\}^2$ on pose $e_{ij} = u(ih, jh) - u_{i,j}$. On a donc, pour les schémas [I] et [II], avec les notations de la question 2 :

$$a_0 e_{ij} - a_1 e_{i-1,j} - a_2 e_{i+1,j} - a_3 e_{i,j-1} - a_4 e_{i,j+1} = R_{ij}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}^2.$$

avec les questions 2 et 4, on a donc, pour le schéma [I], si $h \leq 2/k$:

$$\max\{|e_{ij}|, (i, j) \in \{1, \dots, N\}^2\} \leq 1/2C_1 h^2,$$

où C_1 et C_2 ne dépendent que de u et k (et sont données à la question 2). Les deux schémas sont convergents. Le schéma [I] converge en " h^2 " et le schéma [II] en " h ".

6. Le schéma [1] converge plus vite mais a une condition de stabilité $k \leq 2/h$. Le schéma [II] est inconditionnellement stable.

Exercice 22.

1. On a vu au paragraphe 1.4.2 que si σ est une arête du volume de contrôle K , alors le flux numérique $F_{K,\sigma}$ s'écrit :

$$F_{K,\sigma} = \lambda_i \frac{u_\sigma - u_K}{d_{K,\sigma}} m(\sigma). \quad (1.140)$$

On cherche à éliminer les inconnues auxiliaires u_σ . Pour cela, si σ est une arête interne, $\sigma = K|L$, on écrit la conservativité du flux numérique $F_{K,\sigma} = -F_{L,\sigma}$, ce qui entraîne, si σ n'est pas une arête de l'interface I , que :

$$-\lambda_i \frac{u_\sigma - u_K}{d_{K,\sigma}} m(\sigma) = \lambda_i \frac{u_\sigma - u_L}{d_{L,\sigma}} m(\sigma)$$

On en déduit que

$$u_\sigma \left(\frac{1}{d_{K,\sigma}} + \frac{1}{d_{L,\sigma}} \right) = \frac{u_K}{d_{K,\sigma}} + \frac{u_L}{d_{L,\sigma}},$$

soit encore que

$$u_\sigma = \frac{d_{K,\sigma} d_{L,\sigma}}{d_\sigma} \left(\frac{u_K}{d_{K,\sigma}} + \frac{u_L}{d_{L,\sigma}} \right).$$

Remplaçons alors dans (1.140). On obtient :

$$F_{K,\sigma} = \lambda_i \left(\frac{d_{L,\sigma}}{d_\sigma} \left(\frac{u_K}{d_{K,\sigma}} + \frac{u_L}{d_{L,\sigma}} \right) - \frac{u_K}{d_{K,\sigma}} \right) = -\frac{\lambda_i}{d_\sigma} \left(\frac{d_{L,\sigma}}{d_{K,\sigma}} u_K + u_L - u_K - \frac{d_{L,\sigma}}{d_{K,\sigma}} u_K \right)$$

On obtient donc finalement bien la formule (1.70).

2. Considérons maintenant le cas d'une arête $\sigma \subset \Gamma_1 \cup \Gamma_3$, où l'on a une condition de Fourier, qu'on a discrétisée par :

$$F_{K,\sigma} = -m(\sigma) \lambda_i \frac{u_\sigma - u_K}{d_{K,\sigma}} = m(\sigma) \alpha (u_\sigma - u_{ext}).$$

On a donc

$$u_\sigma = \frac{1}{\alpha + \frac{\lambda_i}{d_{K,\sigma}}} \left(\frac{\lambda_i u_K}{d_{K,\sigma}} + \alpha u_{ext} \right)$$

On remplace cette expression dans l'égalité précédente. Il vient :

$$F_{K,\sigma} = \frac{m(\sigma) \alpha}{\alpha + \frac{\lambda_i}{d_{K,\sigma}}} \left(\frac{\lambda_i}{d_{K,\sigma}} u_K + \alpha u_{ext} - \alpha u_{ext} - \frac{\lambda_i}{d_{K,\sigma}} u_{ext} \right),$$

Ce qui, après simplifications, donne exactement (1.71).

3. Considérons maintenant une arête $\sigma = K|L$ appartenant à l'interface I. La discrétisation de la condition de saut de flux sur I. S'écrit :

$$F_{K,\sigma} + F_{L,\sigma} = \int_\sigma \theta(x) d\gamma(x) = m(\sigma) \theta_\sigma$$

Supposons que K (resp. L) soit situé dans le milieu de conductivité (resp. λ_2). En remplaçant $F_{K,\sigma}$ et $F_{L,\sigma}$ par leurs expressions, on obtient :

$$-\lambda_1 m(\sigma) \frac{u_\sigma - u_K}{d_{K,\sigma}} - \lambda_2 m(\sigma) \frac{u_\sigma - u_L}{d_{L,\sigma}} = m(\sigma) \theta_\sigma.$$

On en déduit que

$$u_\sigma \left(\frac{\lambda_1}{d_{K,\sigma}} + \frac{\lambda_2}{d_{L,\sigma}} \right) = \left(\frac{\lambda_1 u_K}{d_{K,\sigma}} + \frac{\lambda_2 u_L}{d_{L,\sigma}} - \theta_\sigma \right).$$

En remplaçant u_σ dans l'expression de $F_{K,\sigma}$, on obtient :

$$F_{K,\sigma} = -\frac{m(\sigma)}{d_{K,\sigma}} \lambda_1 \frac{1}{\frac{\lambda_1}{d_{K,\sigma}} + \frac{\lambda_2}{d_{L,\sigma}}} \left(\frac{\lambda_1 u_K}{d_{K,\sigma}} + \frac{\lambda_2 u_L}{d_{L,\sigma}} - \theta_\sigma - \frac{\lambda_1 u_K}{d_{K,\sigma}} - \frac{\lambda_2 u_K}{d_{L,\sigma}} \right).$$

En simplifiant, on obtient :

$$F_{K,\sigma} = -\frac{m(\sigma) \lambda_1}{\lambda_1 d_{L,\sigma} + \lambda_2 d_{K,\sigma}} \left(\lambda_2 u_L - \lambda_2 u_K - d_{L,\sigma} \theta_\sigma \right),$$

ce qui est exactement (1.73). On obtient alors l'expression $F_{L,\sigma} = m(\sigma) \theta_\sigma - F_{K,\sigma}$ ce qui donne, après simplifications :

$$F_{L,\sigma} = \frac{\lambda_2 m(\sigma)}{\lambda_1 d_{L,\sigma} + \lambda_2 d_{K,\sigma}} [\lambda_1 (u_L - u_K) + d_{K,\sigma} \theta_\sigma].$$

On vérifie bien que $F_{K,\sigma} + F_{L,\sigma} = m(\sigma) \theta_\sigma$.

4. Le système linéaire que satisfont les inconnues $(u_K)_{K \in \mathcal{M}}$ s'écrit $AU = b$ avec $U = (u_K)_{K \in \mathcal{T}}$. Pour construire les matrices A et b , il faut se donner une numérotation des mailles. On suppose qu'on a $n \times 2p$ mailles ; on considère un maillage uniforme du type de celui décrit sur la figure 1.5 et on note $h_x = 1/n$ (resp. $h_y = 1/p$) la longueur de la maille dans la direction x (resp. y). Comme le maillage est cartésien, il est facile de numéroter les mailles dans l'ordre "lexicographique" ; c'est-à-dire que la k -ème maille a comme centre le point $x_{i,j} = ((i-1/2)h_x, (j-1/2)h_y)$, avec $k = n(j-1) + i$. On peut donc déterminer le numéro de la maille (et de l'inconnue associée) k à partir de la numérotation cartésienne (i, j) de la maille.

$$k = n(j-1) + i$$

Remarquons que, comme on a choisi un maillage uniforme, on a pour tout $K \in \mathcal{T}$: $m(K) = h_x h_y$, pour toute arête intérieure verticale σ : $d_\sigma = h_x m(\sigma) = h_y$ et pour toute arête intérieure horizontale, $d_\sigma = h_y$ et $m(\sigma) = h_x$. Pour chaque numéro de maille, nous allons maintenant construire l'équation correspondante.

- Mailles internes — $i = 2, \dots, n-1$; $j = 2, \dots, p-1, p+1, \dots, 2p-1$. L'équation associée à une maille interne K s'écrit

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} = m(K) f_K.$$

Avec l'expression de $F_{K,\sigma}$ donnée par (1.70), ceci amène à :

$$2\lambda_m \left(\frac{h_x}{h_y} + \frac{h_y}{h_x} \right) u_k - \lambda_m \frac{h_x}{h_y} (u_{k-n} + u_{k+n}) - \lambda_m \frac{h_y}{h_x} (u_{k+1} + u_{k-1}) = h_x h_y f_k,$$

avec $m = 1$ si $j \leq p-1$ et $m = 2$ si $j \geq p+1$.

- Mailles du bord Γ_2 — Les mailles du bord Γ_2 sont repérées par les indices (n, j) , $j = 2$ à $p-1$, $j = p+1$ à $2p-1$, (on exclut pour l'instant les coins). L'équation des flux est la même que pour les mailles internes, mais le flux sur la frontière Γ_2 est nul. Ceci donne :

$$\lambda_m \left(2 \frac{h_x}{h_y} + \frac{h_y}{h_x} \right) u_k - \lambda_m \frac{h_x}{h_y} (u_{k-n} + u_{k+n}) - \lambda_m \frac{h_y}{h_x} u_{k-1} = h_x h_y f_k,$$

avec $k = n(j-1) + n$, $j = 2$ à $p-1$, $j = p+1$ à $2p-1$ et $m = 1$ si $j \leq p-1$, $m = 2$ si $j \geq p+1$.

- Mailles de bord Γ_4 — Les mailles du bord Γ_4 sont repérées par les indices $(1, j)$, $j = 2$ à $p-1$, $j = p+1$ à $2p-1$. Pour ces mailles, il faut tenir compte du fait que sur une arête de Γ_4 , le flux $F_{K,\sigma}$ est donné par :

$$F_{K,\sigma} = -\lambda_m \frac{g_\sigma - u_K}{d_{K,\sigma}} m(\sigma)$$

avec $g_\sigma = \frac{1}{m(\sigma)} \int g(y) d\gamma(y)$. D'où on tire l'équation relative à la maille $k = n(j-1) + 1$, $j = 2, \dots, p-1, p+1, \dots, 2p-1$:

$$\lambda_m \left(2 \frac{h_x}{h_y} + 3 \frac{h_y}{h_x} \right) u_k - \lambda_m \frac{h_x}{h_y} (u_{k-n} + u_{k+n}) - \lambda_m \frac{h_y}{h_x} u_{k+1} = h_x h_y f_k + 2 \frac{h_y}{h_x} \lambda_m g_j,$$

avec $g_j = g_{\sigma_j}$ et $m = 1$ si $j \leq p-1$, $m = 2$ si $j \geq p+1$.

- Mailles du bord $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$ — Pour $j = 1$, où $j = 2p, i = 2 \dots n-1$. On tient compte ici de la condition de Fourier sur la maille qui appartient au bord, pour laquelle l'expression du flux est :

$$F_{K,\sigma} = \frac{\alpha \lambda_m m(\sigma)}{\lambda_m + \alpha d_{K,\sigma}} (u_K - u_{ext}).$$

Pour une arête σ horizontale, on note : $C_{F,\sigma} = \frac{\alpha m(\sigma)}{\lambda_m + \alpha d_{K,\sigma}}$. Notons que $C_{F,\sigma}$ est égal à

$$C_F = \frac{2\alpha h_x}{2\lambda_m + \alpha h_y}.$$

Notons que ce coefficient ne dépend pas de σ . Les équations s'écrivent donc :

$$\lambda_1 \left(2 \frac{h_y}{h_x} + \frac{h_x}{h_y} + C_F \right) u_k - \lambda_1 \frac{h_x}{h_y} u_{k+n} - \lambda_1 \frac{h_y}{h_x} (u_{k+1} + u_{k-1}) = h_x h_y f_k + \lambda_1 C_F u_{ext},$$

$$k = 2, \dots, n-1,$$

$$\lambda_2 \left(\frac{2h_y}{h_x} + \frac{h_x}{h_y} + C_F \right) u_k - \lambda_2 \frac{h_x}{h_y} u_{k-n} - \lambda_2 \frac{h_y}{h_x} (u_{k+1} + u_{k-1}) = h_x h_y f_k + \lambda_2 C_F u_{ext},$$

$$k = 2n(p-1) + 2, \dots, 2np-1,$$

— Mailles des coins extérieurs — Il suffit de synthétiser les calculs déjà faits :

— coin sud-est : $i = 1, j = 1, k = 1$; un bord Dirichlet, un bord Fourier :

$$\lambda_1 \left(\frac{3h_y}{h_x} + \frac{h_x}{h_y} + C_F \right) u_1 - \lambda_1 \frac{h_y}{h_x} u_2 - \lambda_1 \frac{h_x}{h_y} u_{n+1} = h_x h_y f_1 + \lambda_1 C_F u_{ext} + \frac{2h_y}{h_x} \lambda_1 g_1$$

— coin sud-ouest : $i = 1n, j = 1, k = n$; un bord Fourier, un bord Neumann :

$$\lambda_1 \left(\frac{h_y}{h_x} + \frac{h_x}{h_y} + C_F \right) u_1 - \lambda_1 \frac{h_y}{h_x} u_{n-1} - \lambda_1 \frac{h_x}{h_y} u_{2n} = h_x h_y f_n + \lambda_1 C_F u_{ext}$$

— coin nord-ouest : $i = 2n, j = 2p, k = 2np$. On a encore un bord Fourier, un bord Neumann, et l'équation s'écrit :

$$\lambda_2 \left(\frac{h_y}{h_x} + \frac{h_x}{h_y} + C_F \right) u_{2np} - \lambda_2 \frac{h_y}{h_x} u_{2np-1} - \lambda_2 \frac{h_x}{h_y} u_{2n(p-1)} = h_x h_y f_{2np} + \lambda_2 C_F u_{ext}$$

— coin nord-est : $i = 1, j = 2p \quad k = n(2p-1) + 1$ un bord Dirichlet, un bord Fourier :

$$\lambda_2 \left(\frac{3h_y}{h_x} + \frac{h_x}{h_y} + C_F \right) u_k - \lambda_2 \frac{h_y}{h_x} u_{k+1} - \lambda_2 \frac{h_x}{h_y} (u_{k-n} + h_x h_y f_k + \lambda_2 C_F u_{ext}) + \frac{2h_y}{h_x} \lambda_2 g_k.$$

— Interface — L'expression du flux sur une arête de l'interface est donnée par (1.73). On pose, pour chaque arête σ de l'interface,

$$s_{I,\sigma} = \frac{m(\sigma)}{\lambda_1 d_{L,\sigma} + \lambda_2 d_{K,\sigma}}.$$

Notons que dans le cas du maillage uniforme considéré, ce coefficient est égal à :

$$s_I = \frac{2h_x}{(\lambda_1 + \lambda_2)h_y},$$

et qu'il est indépendant de l'arête σ . Tenant compte de ce flux, on obtient, pour $k = n(p-1) + i, i = 2, \dots, N-1$

$$\lambda_1 \left(\frac{2h_y}{h_x} + \frac{h_x}{h_y} + \lambda_2 s_I \right) u_k - \lambda_1 \frac{h_y}{h_x} u_{k+1} - \lambda_1 \frac{h_y}{h_x} u_{k-1} - \lambda_1 \frac{h_x}{h_y} u_{k-n} - \lambda_1 s_I u_{k+n} = h_x h_y f_k + \lambda_1 s_I \frac{h_y}{2} \theta_i,$$

avec

$$\theta_i = \int_{\sigma_i} \theta(x) d\gamma(x).$$

Et de même, pour $k = np + i, i = 2, \dots, N-1$,

$$\lambda_1 \left(\frac{2h_y}{h_x} + \frac{h_x}{h_y} + \lambda_1 s_I \right) u_k - \lambda_2 \frac{h_y}{h_x} u_{k+1} - \lambda_2 \frac{h_y}{h_x} u_{k-1} - \lambda_2 \frac{h_x}{h_y} u_{k+n} - \lambda_2 s_I u_{k-n} = h_x h_y f_k + \lambda_2 s_I \frac{h_y}{2} \theta_i.$$

Il ne reste plus qu'à traiter les coins des interfaces.

— $i = 1, j = p \quad k = n(p-1) + 1$. Dirichlet sous l'interface

$$\lambda_1 \left(\frac{3h_y}{h_x} + \frac{h_x}{h_y} + \lambda_2 s_I \right) u_k - \lambda_1 \frac{h_y}{h_x} u_{k+1} - \lambda_1 \frac{h_x}{h_y} u_{k+n} - \lambda_1 s_I u_{k+n} = h_x h_y f_k + \lambda_1 s_I \frac{h_y}{2} \theta_i + \frac{2h_y}{h_x} \lambda_1 g_j$$

— $i = 1, j = p + 1, k = np + 1$, Dirichlet, dessus de l'interface

$$\lambda_2 \left(\frac{3h_y}{h_x} + \frac{h_x}{h_y} + \lambda_1 s_I \right) u_k - \lambda_2 \frac{h_y}{h_x} u_{k+1} - \lambda_2 \frac{h_x}{h_y} u_{k+n} - \lambda_2 s_I u_{k-n} = h_x h_y f_k + \lambda_2 S_I \frac{h_y}{2} \theta_i + \frac{2h_y}{h_x} \lambda_2 g_j$$

— $i = n, j = p, k = n(p-1) + n$. Neumann, sous l'interface.

$$\lambda_1 \left(\frac{h_y}{h_x} + \frac{h_x}{h_y} + \lambda_2 s_I \right) u_k - \lambda_1 \frac{h_y}{h_x} u_{k-1} - \lambda_1 \frac{h_x}{h_y} u_{k-n} - \lambda_1 s_I u_{k+n} = h_x h_y f_k + \lambda_1 S_I \frac{h_y}{2} \theta_i$$

— $i = n, j = p + 1, k = np + n$, Neuman, dessus de l'interface

$$\lambda_2 \left(\frac{h_y}{h_x} + \frac{h_x}{h_y} + \lambda_1 s_I \right) u_k - \lambda_2 \frac{h_y}{h_x} u_{k-1} - \lambda_2 \frac{h_x}{h_y} u_{k+n} - \lambda_2 s_I u_{k-n} = h_x h_y f_k + \lambda_2 S_I \frac{h_y}{2} \theta_i.$$

On a ainsi obtenu $2np$ équations à $2np$ inconnues. Notons que chaque équation fait intervenir au plus 5 inconnues.

Exercice 21.

1. Le problème complet s'écrit :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mu_i \nabla \phi)(x) = 0 & x \in \Omega_i \quad i = 1, 2 \\ \nabla \phi(x) \cdot \mathbf{n}(x) = 0 & x \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \\ \int_{\Gamma_1} \mu_1 \nabla \phi(x) \cdot \mathbf{n}(x) d\gamma(x) + \int_{\Gamma_3} \mu_2 \nabla \phi(x) \cdot \mathbf{n}(x) d\gamma(x) = 0 \\ \phi_2(x) - \phi_1(x) = 0 & \forall x \in I \\ -(\mu \nabla \phi \cdot \mathbf{n})|_2(x) - (\mu \nabla \phi \cdot \mathbf{n})|_1(x) = 0 & \forall x \in I \end{cases}$$

2. On se donne le même maillage rectangulaire uniforme qu'à l'exercice précédent. On note ϕ_K l'inconnue associée à la maille K ou ϕ_k si on la référence la maille K par son numéro $k = n(j-1) + i$ où $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, 2p\}$. Pour une maille intérieure, l'équation obtenue est la même que (??) en remplaçant λ_m par μ_m .

Etudions maintenant le cas d'une maille proche de l'interface. Comme indiqué, on va considérer deux inconnues discrètes par arête de l'interface. Soient K et L ayant en commun l'arête $\bar{\sigma} \subset I$, K est située au dessous de L . Les équations associées à K et L s'écrivent alors

$$\sum_{\sigma \in \xi_K} F_{K,\sigma} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\sigma \in \xi_L} F_{L,\sigma} = 0.$$

Pour les arêtes $\sigma \in \xi_K$ autres que $\bar{\sigma}$, le flux s'écrit de manière habituelle

$$F_{K,\sigma} = \mu_1 \frac{\phi_K - \phi_M}{d_\sigma}$$

avec $\sigma = K|M$. Pour l'arête $\sigma = \bar{\sigma}$, on a $F_{K,\sigma} = \mu_1 \frac{\phi_K - \phi_\sigma^-}{d_\sigma} m(\sigma)$ et $F_{L,\sigma} = \mu_2 \frac{\phi_L - \phi_\sigma^+}{d_\sigma} m(\sigma)$, où les deux inconnues discrètes ϕ_σ^+ et ϕ_σ^- sont reliées par les relations :

$$\phi_\sigma^+ - \phi_\sigma^- = \psi_\sigma \left(= \frac{1}{m(\sigma)} \int_\sigma \psi(x) d\gamma(x) \right)$$

$$F_{K,\sigma} + F_{L,\sigma} = 0.$$

On peut alors éliminer ϕ_σ^+ et ϕ_σ^- ; en utilisant par exemple $\phi_\sigma^+ = \psi_\sigma + \phi_\sigma^-$ et en remplaçant dans la deuxième équation, on obtient :

$$-\mu_1 \frac{\phi_\sigma^- - \phi_K}{d_{K,\sigma}} + \mu_2 \frac{\phi_\sigma^- + \psi_\sigma - \phi_L}{d_{L,\sigma}} = 0,$$

ce qui donne :

$$\phi_{\sigma^-} = \frac{1}{\frac{\mu_1}{d_{K,\sigma}} + \frac{\mu_2}{d_{L,\sigma}}} \left(\frac{\mu_1}{d_{K,\sigma}} \phi_K + \frac{\mu_2}{d_{L,\sigma}} \phi_L - \frac{\mu_2}{d_{L,\sigma}} \psi_\sigma \right).$$

En remplaçant cette expression dans les flux, on obtient :

$$F_{K,\sigma} = -F_{L,\sigma} = m(\sigma) \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 d_{L,\sigma} + \mu_2 d_{K,\sigma}} (\phi_K - \phi_L + \psi_\sigma)$$

On peut alors écrire l'équation discrète associée à une maille de numéro k située sous l'interface (avec $k = n(p-1) + i$, $i = 2, \dots, n-1$). On pose :

$$\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 d_{L,\sigma} + \mu_2 d_{K,\sigma}} = \frac{\mu_1}{d_\sigma}$$

(μ_1 est donc la moyenne harmonique pondérée entre μ et μ_2). Notons que pour une arête de I , $d_\sigma = h_y$, et $m(\sigma) = h_x$. L'équation associée à la maille k s'écrit donc :

$$\left(2\mu_1 \frac{h_y}{h_x} + \mu_1 \frac{h_x}{h_y} + \frac{\mu_1 h_x}{h_y} \right) u_k - \mu_1 \frac{h_y}{h_x} (u_{k-1} + u_{k+1}) - \mu_1 \frac{h_x}{h_y} u_{k-n} - \mu_1 \frac{h_x}{h_y} u_{k+n} = -\mu_1 \frac{h_x}{h_y} \psi_i$$

où ψ_i est le saut de potentiel à travers l'arête σ_i de l'interface considérée ici. De même, l'équation associée à une maille k avec $k = np + i$, $i = 2, \dots, n-1$ située au dessus de l'interface s'écrit :

$$\left(2\mu_1 \frac{h_y}{h_x} + \mu_1 \frac{h_x}{h_y} + \mu_1 \frac{h_x}{h_y} \right) u_k - \mu_1 \frac{h_y}{h_x} (u_{k-1} + u_{k+1}) - \mu_1 \frac{h_x}{h_y} u_{k+n} - \mu_1 \frac{h_x}{h_y} u_{k-n} = +\mu_1 \frac{h_x}{h_y} \psi_i.$$

La discrétisation des conditions aux limites de Neumann sur Γ_2 et Γ_4 est effectuée de la même manière que pour le cas du problème thermique, voir exercice ??.

Il ne reste plus qu'à discrétiser la troisième équation du problème (??), qui relie les flux sur la frontière Γ_1 avec les flux sur la frontière Γ_3 . En écrivant la même condition avec les flux discrets, on obtient :

$$\mu_1 \sum_{i=1}^n \frac{2h_x}{h_y} (u_i - u_{B,i}) + \mu_2 \sum_{i=1}^n \frac{2h_x}{h_y} (u_{H,i} - u_{k(i)}) = 0,$$

où $\mu_{B,i}$ représente l'inconnue discrète sur la i -ème arête de Γ_1 et $\mu_{H,i}$ l'inconnue discrète sur la i -ème arête de Γ_3 et $k(i) = n(p-1) + i$ est le numéro de la maille jouxtant la i -ème arête de Γ_3 .

Remarquons que tel qu'il est posé, le système n'est pas inversible : on n'a pas assez d'équations pour éliminer les inconnues $u_{B,i}$ et $u_{H,i}$, $i = 1 \dots N$. On peut par exemple pour les obtenir considérer une différence de potentiel fixée entre Γ_1 et Γ_3 , et se donner un potentiel fixé sur Γ_1 .

Université de Marseille, année 2018-2019
Master CEPS, Calcul scientifique
TP1, en python

L'objet de ce TP est de calculer la solution approchée d'un modèle de diffusion thermique avec rayonnement (dans un matériau comme le verre, par exemple) avec une discrétisation par différences finies et une méthode de monotonie. Un modèle simplifié uni-dimensionnel consiste à chercher la solution u du problème suivant :

$$-\frac{1}{10}u''(x) + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-y}}(u^4(x) - u^4(y))dy = 0 \text{ pour } x \in]0, 1[, \quad (1)$$

$$u(0) = 1, \quad u(1) = 2. \quad (2)$$

Pour $n \geq 1$, on pose $h = 1/(n + 1)$.

1. Montrer qu'une discrétisation de (1)-(2) avec un pas constant h consiste à chercher le vecteur u de \mathbb{R}^n solution de

$$Au + R(u) = b, \quad (3)$$

avec $A, R(u)$ donnés par :

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A[i, i] = 2/(10h^2)$, $A[i, j] = -1/(10h^2)$ si $|i - j| = 1$ et $A[i, j] = 0$ si $|i - j| > 1$,
- $R(u) \in \mathbb{R}^n$, $R(u)_i = \sum_{j \neq i} \frac{h}{\sqrt{h|i-j|}}(u_i^4 - u_j^4)$,
- $b \in \mathbb{R}^n$, $b_1 = 1/(10h^2)$, $b_n = 2/(10h^2)$, $b_i = 0$ pour $1 < i < n$.

Pour trouver une solution de (3), on se donne $\beta \geq 0$ et on utilise la méthode itérative suivante :

Initialisation $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $x_i^{(0)} = 1$ pour tout i .

Itérations Pour $k \geq 0$, $Au^{(k+1)} + \beta u^{(k+1)} = -R(u^{(k)}) + \beta u^{(k)} + b$.

2. Ecrire un programme réalisant la méthode itérative indiquée avec un test d'arrêt des itérations utilisant que la norme infinie de $(u^{(k+1)} - u^{(k)})$ est inférieure à une valeur donnée ε et un nombre maximal d'itérations.
3. Pour $\varepsilon = 10^{-6}$ et plusieurs valeurs de n (par exemple $n = 5$, $n = 10$, $n = 100$, $n = 200$), on s'intéresse au comportement de l'algorithme en fonction des valeurs de β .
 - (a) L'algorithme converge-t-il pour $\beta = 0$? Constater qu'il existe $\beta_n > 0$ pour lequel la convergence de la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est monotone (c'est-à-dire $x^{(k+1)} \geq x^{(k)}$ pour tout k) quand $\beta \geq \beta_n$. [On peut effectivement montrer qu'un tel β_n existe.] La solution dépend-elle de β ?
 - (b) Essayer de donner un choix automatique de β_n (en fonction de n) pour que la convergence de la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ soit monotone avec $\beta = \beta_n$.
 - (c) Donner l'évolution du nombre d'itérations nécessaires en fonction des valeurs de β .