Chapitre 1

Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev [1] sont des espaces fonctionnels (c.à.d constitués de fonctions) dont les puissances et les dérivées (au sens de la transposition, ou au sens faible, que nous allons préciser) sont intégrables. Tout comme les espaces de Lebesgue, ces espaces sont complets ce qui est un avantage considérable pour l'étude des solutions des équations aux dérivées partielles.

1.1 Dérivées faibles

La notion de dérivée faible, introduite par Jean Leray [2] en 1934 est fondamentale pour l'étude de l'existence des solutions des équations aux dérivées partielles elliptiques et de leur régularité. Dans toute la suite, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, et on note $C_c^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact sur Ω c'est-à-dire

$$C_c^\infty((\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega); \exists K \subset \Omega,\ K \text{ compact}\,;\, u = 0 \text{ sur } K^c\}.$$

Le lemme suivant est fondamental, car il permet de confondre $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ avec l'application linéaire T_f de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ définie par $T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$. On rappelle que $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ si, pour tout sous–ensemble compact K de Ω, la restriction $f|_K$ de f à K est un élément de $L^1(K)$.

Lemme 1.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, et soient f et $g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Alors :*

$$\left[\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right] \Longleftrightarrow [f = g \text{ p.p.}]\,.$$

La démonstration de ce lemme se fait par régularisation (on se ramène à des fonctions continues).
On note $\mathcal{D}^*(\Omega)$ l'ensemble des formes linéaires sur $C_c^\infty(\Omega)$: on dit que $\mathcal{D}^*(\Omega)$ est le dual algébrique de $C_c^\infty(\Omega)$.
Le lemme précédent nous permet de définir la dérivée par transposition d'une fonction L^1 de la manière suivante :

Définition 1.2 (Dérivée par transposition) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, et soit $f \in L^1(\Omega)$. On appelle dérivée par transposition de f par rapport à sa i-ème variable la forme linéaire de $\mathcal{D}^*(\Omega)$, notée $D_i f$ et définie par :*

$$\langle D_i f, \varphi\rangle_{\mathcal{D}^*(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = -\int_\Omega f \partial_i \varphi \,\mathrm{d}x$$

1. Sergueï Lvovitch Sobolev, (6 octobre 1908-3 janvier 1989) est un mathématicien et physicien atomique russe de l'époque soviétique.
2. Jean Leray, mathématicien français,1906 -1998, est un mathématicien français il a travaillé sur les équations aux dérivées partielles et sur la topologie algébrique.

où $\partial_i\varphi$ désigne la dérivée partielle classique de φ par rapport à sa i-ème variable. Noter que si $f \in C^1(\Omega)$, alors $D_i f$ n'est autre que $\partial_i f$. Il s'agit donc bien d'une généralisation de la notion de dérivée.
Si la forme linéaire $D_i f$ peut être confondue avec une fonction localement intégrable au sens du lemme 1.1, on dit que f admet une dérivée faible.

Vous avez probablement rencontré ou entendu parler de la dérivée au sens des distributions. Celle ci est très liée à la dérivée par transposition, mais un peu plus compliquée à définir parce qu'elle demande la définition d'une topologie ; nous n'en aurons pas vraiment besoin dans le cadre de ce cours.
Par exemple, la fonction de Heaviside [3], définie par $H(x) = 1$ si $x \geq 0$ et $H(x) = 0$ sinon, admet une dérivée par transposition ; en effet, pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\varphi(0)$$

et donc DH est la forme linéaire qui à φ associe l'opposé de sa valeur en 0, qu'on appelle aussi Dirac en 0 : $DH = -\delta_0$. Par contre, cette dérivée n'est pas une dérivée faible, car δ_0 ne peut pas être assimilée à une fonction de L^1, au sens où il n'existe pas de fonction $g \in L^1(\mathbb{R}$ telle que $\delta_0(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} g\varphi\,\mathrm{d}x$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ (voir exercice 1).
Pour $\alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, et $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, on définit la dérivée faible $D_1^{\alpha_1}\dots D_N^{\alpha_N} u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, si elle existe, par

$$\int_{\mathbb{R}^N} D_1^{\alpha_1}\dots D_N^{\alpha_N} u(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\,\partial_1^{\alpha_1}\dots\partial_N^{\alpha_N}\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \forall\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N),$$

où $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$ et $\partial_i^{\alpha_i}\varphi$ désigne la dérivée partielle (classique) d'ordre α_i par rapport à la i-ème variable.

1.2 Espaces de Sobolev

Définition 1.3 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On définit les espaces de Sobolev suivants :*

1. *$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)$ t.q. $D_i u \in L^2(\Omega)$, pour tout $i = 1, \dots, N\}$.*
   Dans cette définition, lorsqu'on dit $D_i u \in L^2(\Omega)$, on sous-entend

   "il existe une fonction $g \in L^2(\Omega)$ telle que $\langle D_i f, \varphi\rangle_{\mathcal{D}^*(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = -\int_\Omega g\varphi\,\mathrm{d}x$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$."

   On ne le répétera pas par la suite.
2. *Pour $m \in \mathbb{N}$, $H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)$ t.q. $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ t.q.$|\alpha| \leq m\}$.*
3. *Pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et $m \in \mathbb{N}$, on définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par*

   $$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ t.q.} |\alpha| \leq m.\}$$

   Noter que pour $m = 0$, l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$.

Proposition 1.4 (Structure d'espace vectoriel) *Les espaces $H^m(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert lorqu'on les munit du produit scalaire*

$$\langle u, v\rangle_{H^m} = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha u\rangle_{L^2},$$

3. Oliver Heaviside (1850 - 1925) physicien britannique autodidacte.

où $\langle \cdot,\cdot\rangle_{L^2}$ *désigne le produit scalaire dans* $L^2(\Omega)$ *i.e.* $\langle u,v\rangle_{L^2} = \int_\Omega uv\, \mathrm{d}x$. *Notons que* $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$

Une norme naturelle sur $W^{m,p}(\Omega)$ *est définie par :*

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p}, & si\ 1 \leqslant p < +\infty; \\ \displaystyle\max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}, & si\ p = +\infty; \end{cases}$$

où $\|.\|_{L^p}$ *désigne la norme dans* $L^p(\Omega)$.
Muni de cette norme $W^{m,p}(\Omega)$ *est un* ***espace de Banach*** *(c.à.d. un espace vectoriel normé complet).*
On peut montrer que la norme :

$$\|u\|_{m,p} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha u\|_{L^p}, & 1 \leqslant p < +\infty; \\ \displaystyle\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}, & p = +\infty. \end{cases}$$

est une norme équivalente à la précédente. L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ *a donc les mêmes propriétés quelle que soit la norme utilisée. Ces normes sont notées indifféremment* $\|.\|_{m,p}$ *ou* $\|.\|_{W^{m,p}}$

Remarque 1.5 (Espaces de Sobolev et continuité) *En dimension 1 d'espace* ($N = 1$)*, avec* $a, b \in \mathbb{R}$*, tout élément de* $W^{1,p}(]a,b[)$ *(qui est donc une classe de fonctions) peut être assimilé à une fonction continue, au sens où il existe un représentant de la classe qui est continu (voir à ce propos l'exercice 3). Ceci tient au fait qu'en dimension 1, toute "fonction" de* $W^{1,p}(]a,b[)$ *peut s'écrire comme l'intégrale de sa dérivée.*

$$u \in W^{1,p}(]a,b[) \Longleftrightarrow \left\{ \exists \tilde{u} \in C(]a,b[) \text{ et } v \in L^p(]a,b[); u = \tilde{u} \text{ p.p. et } \tilde{u}(x) = \tilde{u}(a) + \int_a^x v(s)\, ds \right\}.$$

En dimension strictement supérieure à 1, ceci est faux. En particulier $H^1(\Omega) \not\subset C(\overline{\Omega})$*, comme le prouve l'exemple suivant : soit* $\Omega = \{x = (x_1,x_2)^t \in \mathbb{R}^2, |x_i| < \frac{1}{2}, i = 1,2\}$*, et u la fonction définie sur* Ω *par* $u(x) = (\ln(|x|))^\gamma$*, avec* $\gamma \in]0,1/2[$*. Alors* $u \in H^1(\Omega)$ *mais* $u \notin L^\infty(\Omega)$ *(voir exercice 5), et donc en particulier,* $u \notin C(\overline{\Omega})$*.*

Proposition 1.6 (Séparabilité) *Dans le cas où p est fini, c'est aussi un* ***espace séparable*** *(c.à.d. un espace vectoriel normé qui contient une partie dénombrable dense).*

Preuve Voir exercice 7.

Les espaces de Sobolev $W^{m,p}$ sont réflexifs sauf si $p = 1$ ou $+\infty$. On commence par rappeler ci-dessous la définition d'un espace réflexif.

Définition 1.7 (Espace réflexif) *Soit* E *un espace vectoriel normé réel. On note* E'' *son dual topologique, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues de* E *dans* $\mathbb{R}$*. Pour tout* $x \in E$*, on définit l'application* J_x *de* E' *dans* $\mathbb{R}$ *par* $J_x(T) = T(x)$ *pour tout* $T \in E'$*. On a*

$$|J_x(T)| = |T(x)| \leq \|T\|_{E'} \|x\|_R$$

et donc J_x *est une forme linéaire continue sur* E'*, ce qu'on note* $J_x \in E''$ *où* E'' *est le bidual de* E*, c.à.d. le dual topologique de* E'*. On peut montrer par le théorème de de Hahn-Banach, que* $\|J_x\|_{E''} = \|x\|_E$*.*
L'application J*, définie de* E *dans* E'' *par* $J(x) = J_x$ *pour tout* $x \in E$*, est donc une isométrie linéaire, et on a évidemment* $J(E) \subset E''$*.*
On dit que E *est un espace* ***réflexif*** *si* $J(E) = E''$*, ce qui revient à dire que* J *est surjective.*
Notons que tout espace réflexif E *est forcément complet puisque le dual d'un espace vectoriel normé quelconque est toujours complet.*

Proposition 1.8 (Réflexivité) *Pour tout $p \in]1, +\infty[$, l'espace e $W^{m,p}(\Omega)$ est un* ***espace réflexif****.*

Preuve Voir exercice 8.

1.3 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

Un théorème fondamental :

Théorème 1.9 (Hahn Banach) *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et p une fonction convexe définie sur E et qui ne prend que des valeurs finies. Soit F un sous-espace vectoriel de E, et T une forme linéaire sur F qui vérifie $T(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in F$. Il existe alors un prolongement de T en une forme linéaire sur l'espace E tout entier, vérifiant encore la condition : $T(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.*

et surtout son corollaire :

Corollaire 1.10 *Soit E un espace normé, F un sous-espace de E et T une forme linéaire continue sur F. On peut alors prolonger T en une application continue définie sur E, de même norme que T.*

Théorème 1.11 (CNS sur la dimension) *Un espace de Banach E est de dimension finie si et seulement si sa boule unité est compacte.*

Définition 1.12 (Convergence faible et faible *) *Soit E un espace de Banach*

1. ***Convergence faible*** *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ et $u \in E$. On dit que $u_n \to u$ faiblement dans E lorsque $n \to \infty$ si $T(u_n) \to T(u)$ pour tout $T \in E'$.*
2. ***Convergence faible*** ** Soient $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E'$ et $u \in E'$. On dit que $T_n \to T$ dans E' faible * si $T_n(x) \to T(x)$ pour tout $x \in E$.*

Théorème 1.13 (Compacité faible * des bornés du dual d'un espace séparable) *Soit E un espace séparable, et soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de E' (c.à.d. telle qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ t.q. ($\|T_n\|_{E'} \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe une sous-suite, encore notée $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $T \in E'$ telle que $T_n \to T$ dans E' faible *.*

Une application importante de ce théorème est la suivante : si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $L^\infty(\Omega)$, alors il existe une sous-suite encore notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $u \in L^\infty(\Omega)$ tels que $\int_\Omega u_n\varphi \,\mathrm{d}x \to \int_\Omega u\varphi \,\mathrm{d}x$ pour tout $\varphi \in L^1(\Omega)$. En effet, $L^\infty(\Omega)$ est le dual de $L^1(\Omega)$, qui est séparable.

Théorème 1.14 (Compacité faible des bornés du dual d'un espace réflexif) *Soit E un espace réflexif, et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de E (c.à.d. telle qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ t.q. ($\|u_n\|_E \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe une sous-suite, encore notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $u \in E$ telle que $u_n \to u$ dans E faiblement.*

1.4 Théorèmes de densité

Définition 1.15 (Frontière lipschitzienne) *Un ouvert borné Ω de$\mathbb{R}^N$ est dit à frontière lipschitzienne sâĂ'il existe des ouverts $(\Omega_0, \Omega_1, ..., \Omega_n)$ de $\mathbb{R}^N$ et des applications $(\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n)$ telles que :*

1. *$\overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=0}^n \Omega_i$ et $\Omega_0 \subset \Omega$.*
2. *$\phi_0 : \Omega_0 \to B_{1,N} = \{x \in R^N \| |x|| < 1\}$ est bijective et ϕ_0 et ϕ_0^{-1} sont lipschitziennes,*
3. *Pour tout $i \geq 1$,$\phi_i : \Omega_i \to B_{1,N}$ est bijective et ϕ_i et ϕ_0^{-1} sont lipschitziennes, et $\phi_i(\Omega_i \cap \Omega) = B_{1,N} \cap \mathbb{R}^N_+$et $\phi_i(\Omega_i \cap \partial\Omega) = B_{1,N} \cap \{(0, y), y \in \mathbb{R}^{N-1}$.*

Théorème 1.16 *Soit Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne et $1 \leq p < +\infty$ alors :*

1. *L'ensemble $C^\infty(\overline{\Omega})$ des restrictions des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ à $\overline{\Omega}$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.*
2. *Il existe une application linéaire continue $P : W^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ telle que*

$$\forall u \in W^{m,p}(\Omega), P(u) = u \textit{ sur } \Omega.$$

La démonstration se fait par troncature et régularisation. Un cas particulier fait l'objet de l'exercice 14.
Par contre, si Ω est un ouvert borné, l'espace $C^\infty(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^1(\Omega)$. Son adhérence est un sous espace strict de $H^1(\Omega)$, qu'on note $H_0^1(\Omega)$.

Définition 1.17 (Espace $H_0^1(\Omega)$)

1. *On appelle $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, ce qu'on note aussi : $H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$.*
2. *Pour $m > 0$ et $1 \leq p < +\infty$, on définit le sous espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ de $W^{m,p}(\Omega)$ comme l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$:*
$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

On remarquera facilement que si $\Omega = \mathbb{R}^N$, on a $H_0^1(\Omega) = H^1(\Omega)$ alors que, comme on l'a dit précédemment, l'inclusion est stricte si Ω est un ouvert borné.

1.5 Théorèmes de trace

Théorème 1.18 (Trace) *Soit $\Omega = \mathbb{R}_+^N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^N; x \in \mathbb{R}, x > 0$ et $y \in \mathbb{R}^{N-1}$. Pour tout p tel que $1 \leq p < +\infty$, il existe une application linéaire continue γ de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\mathbb{R}^{N-1})$ telle que $\gamma u = u$ p.p sur $\mathbb{R}^{N-1}$ si $u \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+^N)$.*

Théorème 1.19 (Trace sur un ouvert borné) *Soit Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne et $1 \leq p < +\infty$ alors l'application γ_0 définie de $C^\infty(\overline{\Omega}) \subset W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\partial\Omega)$ par $u \in C^\infty(\overline{\Omega}) \mapsto \gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega}$, est linéaire continue. On la prolonge en γ, application linéaire continue de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\partial\Omega)$.*
Remarquons que $p > N$, on peut montrer (voir théorème 1.25) que $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ et γu est alors la valeur de u au bord au sens classique, i.e.$\gamma u = \gamma_0 u$.

Remarque 1.20 (Lien avec la trace classique.) *On suppose que $\Omega = \mathbb{R}_+^N$ ou que Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne. Alors :*

1. *Si $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, on a alors $\gamma u = u$ p.p sur $\partial\Omega$ (au sens de la mesure $N - 1$ dimensionnelle.*
2. *Ker $\gamma = W_0^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)$.*

Voir à ce propos l'exercice 13.

Théorème 1.21 *Soit Ω un ouvert borné à frontière lipschitzienne et $1 \leq p < +\infty$ alors il existe une application γ définie de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\partial\Omega)$ et tel que*

$$\gamma u(y) = u(y) \textit{ p.p. } y \in \partial\Omega \textit{ si } u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}).$$

De plus Ker $\gamma = W_0^{1,p}(\Omega)$.

Le théorème suivant généralise la propriété d'intégration par parties des fonctions régulières.

Théorème 1.22 (Intégration par parties)

- *Si* $\Omega = \mathbb{R}_+^N (= \{x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N; x_1 \geq 0\})$*, alors*

$$\begin{cases} \text{Si } 2 \leq i \leq N, \displaystyle\int_\Omega u\, D_i v\, \mathrm{d}x = -\int_\Omega D_i u\, v\, \mathrm{d}x,\ \forall (u,v) \in (H^1(\Omega))^2, \\ \text{Si } i = 1, \displaystyle\int_\Omega u\, D_1 v\, \mathrm{d}x = -\int_\Omega D_1 u\, v\, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \gamma u(y)\, \gamma v(y)\, \mathrm{d}\gamma(y),\ \forall (u,v) \in (H^1(\Omega))^2, \end{cases}$$

- *si* Ω *est un ouvert borné à frontière lipschitzienne, alors, pour tout* $i = 1, \ldots, N$*,*

$$\int_\Omega u\, D_i v\, \mathrm{d}x = -\int_\Omega D_i u\, v\, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \gamma u(y)\, \gamma v(y) n_i(y)\, \mathrm{d}\gamma(y),\ \forall (u,v) \in (H^1(\Omega))^2,$$

où γu *désigne la trace de* u *sur la frontière* $\partial\Omega$ *et* $\mathrm{d}\gamma(y)$ *désigne l'intégration par rapport à la mesure adéquate sur* $\partial\Omega$ *(c.à.d. la mesure de Hausdorff sur* $\partial\Omega$ *qu'on peut voir comme une mesure de Lebesque* $(N-1)$ *dimensionnelle), et* $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_N)^t$ *est la normale à* $\partial\Omega$ *extérieure à* Ω*.*

1.6 Théorèmes de compacité

Les théorèmes suivants sont une conséquence du théorème de Kolmogorov (voir [2, Théorème 8.5]).

Théorème 1.23 (Rellich) *Soit* Ω *un ouvert borné, et* $1 \leq p < +\infty$*. Toute partie bornée de* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *est relativement compacte dans* $L^p(\Omega)$*. Ceci revient à dire que de toute suite bornée de* $W_0^{1,p}(\Omega)$*, on peut extraire une sous-suite qui converge dans* $L^p(\Omega)$*.*

Le théorème précédent reste vrai avec $W^{1,p}(\Omega)$ à condition de supposer la frontière lipschitzienne.

Théorème 1.24 *Soit* Ω *un ouvert borné à frontière lipschitzienne, et* $1 \leq p < +\infty$*. Toute partie bornée de* $W^{1,p}(\Omega)$ *est relativement compacte dans* $L^p(\Omega)$*. Ceci revient à dire que de toute suite bornée de* $W^{1,p}(\Omega)$*, on peut extraire une sous-suite qui converge dans* $L^p(\Omega)$*.*

1.7 Injections de Sobolev

Le théorème suivant donne les injections de Sobolev ; ces injections établissent le fait qu'une fonction dont une certaine puissance d'elle-même et de sa dérivée est intégrable (c'est-à-dire $u \in W^{1,p}$) est en fait dans un “meilleur" espace (en terme d'intégration ou de régularité). On distingue trois cas différents, selon que la puissance est inférieure strictement, égale, ou supérieure strictement à la dimension de l'espace N.

Théorème 1.25 (Injections de Sobolev) *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$*. On suppose que* Ω *est un borné à frontière lipschitzienne ou que* $\Omega = \mathbb{R}^N$*.*

1. *Si* $p < N$*, alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$*, avec* $p^* = \frac{Np}{N-p}$*, et l'injection est continue, c.à.d. qu'il existe* $C \in \mathbb{R}_+$ *t.q.* $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$*,* $\|u\|_{L^{p^*}} \leq C\|u\|_{W^{1,p}}$ *: on note ceci*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega);$$

on a en particulier

$$W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega) \text{ et } W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega) \text{ pour } N = 1.$$

2. *Si $p > N$, alors*
$$W^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,1-\frac{N}{p}}(\Omega)$$
où, pour $\alpha > 0$, $C^{0,\alpha}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions höldériennes d'exposant α défini par
$$C^{0,\alpha}(\Omega) = \{u \in C(\Omega, \mathbb{R}) \mid \exists k \in \mathbb{R}; |u(x) - u(y)| \leq k\|x - y\|^{\alpha}, \forall (x, y) \in \Omega^2. \tag{1.7.1}$$
La démonstration de ce résultat fait l'objet de l'exercice 11.
3. *Dans le cas où Ω est borné à frontière lipschitzienne, $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout q tel que $1 \leq q \leq N$. Ceci est faux dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$, voir un contre exemple à l'exercice 5.*

Si Ω est un ouvert borné sans hypothèse de régularité sur la frontière, les trois assertions précédentes restent vraies si l'on remplace l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ par l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$. Dans ce cas, pour $N > 1$, le point 3 est vrai pour tout $q \in [1, +\infty[$.

Bibliographie pour le chapitre 1

1. Réviser l'intégration et la théorie de la mesure dans le polycopié en ligne : T. Gallouët et R Herbin, Mesure, Intégration et probabilités, `http://www.cmi.univ-mrs.fr/~herbin/PUBLI/integ.pdf`
2. Lire le livre de H. Brézis pour l'analyse fonctionnelle et les résultats principaux sur les Sobolev : H. Brézis, Analyse Fonctionnelle, Masson, 1983
3. Consulter le livre d' Adams pour un exposé complet sur les espaces de Sobolev Sobolev spaces, ...

Exercices

Exercice 1 (Exemple de dérivée)

Soient $N \geq 1$, $\Omega = \{x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N, |x_i| < 1, i = 1, \ldots, N\}$ et $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ définie par $u(x) = 1$ si $x \in \Omega$ et $u(x) = 0$ si $x \notin \Omega$.

1. Pour $i = \{1, \ldots, N\}$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, montrer que $\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx$ ne dépend que des valeurs prises par φ sur le bord de Ω.
2. Montrer que $u \notin W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$.

Exercice 2 (Une fonction de dérivée nulle est constante)

Soit $u \in L^1_{loc}(]0, 1[)$ t.q. $Du = 0$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $u = a$ p.p.. (u est donc la fonction constante égale à a.)

Exercice 3 (Espace de Sobolev en 1d)

Soit $1 \leq p \leq \infty$ et $u \in W^{1,p}(]0, 1[)$.

1. Soit $u \in W^{1,p}(]0, 1[)$.
   (a) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $u(x) = C + \int_0^x Du(t)dt$, pour presque tout $x \in]0, 1[$. En déduire que $u \in C([0, 1], \mathbb{R})$ (au sens pù il existe $v \in C([0, 1], \mathbb{R})$ t.q. $u = v$ p.p. sur $]0, 1[$, en identifiant u et v, on peut donc dire que $W^{1,p}(]0, 1[) \subset C([0, 1], \mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $\|u\|_\infty \leq \|u\|_{W^{1,p}(]0,1[)}$.

(c) Si $p > 1$, Montrer que u est une fonction höldérienne d'exposant $1 - (1/p)$.

2. Soit $u \in C([0,1], \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $w \in L^p(]0,1[)$ t.q. $u(x) = u(0) + \int_0^x w(t)dt$, pour tout $x \in]0,1[$. Montrer que $u \in W^{1,p}(]0,1[)$ et $Du = w$.

Exercice 4 (Généralisation de l'exercice 2)

Soient $N \geq 1$, $B = \{x \in \mathbb{R}^N, |x| < 1\}$ et $u \in L^1_{loc}(B)$ t.q. $D_i u = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $u = a$ p.p.. (u est donc la fonction constante égale à a.)

Exercice 5 (Non généralisation de l'exercice 3)

Soit $\Omega = \{x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2, |x_i| < \frac{1}{2}, i = 1, 2\}$, $\gamma \in]0, 1/2[$ et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $u(x) = (\ln(|x|))^\gamma$. Montrer que $u \in H^1(\Omega)$. En déduire que $H^1(\Omega) \not\subset C(\overline{\Omega})$.

Exercice 6 (Trois applications de Hahn-Banach)

Soit E un espace de Banach réel.

1. Soit $x \in E$, $x \neq 0$. Montrer qu'il existe $T \in E'$ t.q. $T(x) = \|x\|_E$ et $\|T\|_{E'} = 1$.
2. Soient F un s.e.v de E et $x \in E$. Montrer que $x \notin \bar{F}$ si et seulement si il existe $T \in E'$ t.q. $T(x) \neq 0$ et $T(y) = 0$ pour tout $y \in F$.
3. Pour $x \in E$, on définit J_x de E' dans $\mathbb{R}$ par $J_x(T) = T(x)$ pour tout $T \in E'$. Montrer que $J_x \in E"$ pour tout $x \in E$ et que l'application $J : x \mapsto J_x$ est une isométrie de E sur $J(E) \subset E"$. (Définition : On dit que E est réflexif si $J(E) = E"$.)

Exercice 7 (Séparabilité de L^p)

1. Montrer que si $1 \leq p < \infty$, $L^p(\mathbb{R})$ est séparable.

2. Montrer que $L^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas séparable.

Exercice 8 (Réflexivité de L^p si $1 < p < \infty$)

Soient (X, T, m) un espace mesuré σ-fini et $1 < p < \infty$, montrer que $L^p(X, T, m)$ est un espace de Banach réflexif.

Exercice 9 (Séparabilité et réflexivité d'un s.e.v. fermé)

Soient E un espace de Banach (réel) et F un s.e.v. fermé de E. Montrer que :

1. E séparable $\Rightarrow$ F séparable.
2. E réflexif $\Rightarrow$ F réflexif.

Exercice 10 (Fonctions lipschitziennes)

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. Montrer que $D_i u \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$.
N.B. : Réciproquement, si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $D_i u \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, alors u est lipschitzienne (au sens : il existe $v : \Omega \to \mathbb{R}$ lipschitzienne t.q. $u = v$ p.p.).

Exercice 11 (Inégalités de Sobolev pour $p > N$)

L'objet de cet exercice est de démontrer l'inégalité de Sobolev pour $p > N$.

Si $x \in \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), on note $x = (x_1, \bar{x})$, avec $x_1 \in \mathbb{R}$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}^{N-1}$. On note $H = \{(t, (1-|t|)a),\, t \in]-1,1[,\, a \in B_{N-1}\}$, où $B_{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^{N-1},\, |x| < 1\}$. (On rappelle que $|\cdot|$ désigne toujours la norme euclidienne.) Soit $N < p < \infty$.

1. Soit $u \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $C_1 \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de N et p, t.q.

$$|u(1,0) - u(-1,0)| \leq C_1 \|(|\nabla u|)\|_{L^p(H)}. \tag{1.7.2}$$

[On pourra commencer par écrire $u(1,0) - u(0,a)$ comme une intégrale utilisant convenablement $\nabla u(t,(1-t)a)$ pour $t \in]0,1[$, et intégrer pour $a \in B_{N-1}$ pour comparer u(1,0) et sa moyenne sur B_{N-1}. On pourra se limiter au cas $N = 2$, pour éviter des complications inutiles.]

2. Soit $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $C_2 \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de N et p, t.q.

$$|u(x) - u(y)| \leq C_2 \|(|\nabla u|)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} |x-y|^{1-\frac{N}{p}}. \tag{1.7.3}$$

[Après, éventuellement, une rotation et une translation, on peut supposer que $x = (b,0)$ et $y = (-b,0)$. Se ramener alors à (1.7.2).]

Pour $\alpha \in]0,1]$ et K sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^N$, on note

$$C^{0,\alpha}(K) = \{u \in C(K,\mathbb{R}),\ \|u\|_{L^\infty(K)} < \infty \text{ et } \sup_{x,y \in K,\, x \neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty\},$$

et, si $u \in C^{0,\alpha}(K)$,

$$\|u\|_{0,\alpha} = \|u\|_{L^\infty(K)} + \sup_{x,y \in K,\, x \neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Noter que $C^{0,\alpha}(K)$, muni de cette norme, est un espace de Banach.

3. Soit $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $C_3 \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de N et p, t.q.

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C_3 \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}. \tag{1.7.4}$$

[Cette question est plus délicate... Il faut utiliser (1.7.3) et le fait que $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$.]

4. (Injection de Sobolev dans $\mathbb{R}^N$.) Montrer que $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, avec $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$, et qu'il existe $C_4 \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de N et p, t.q.

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)} \leq C_4 \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}. \tag{1.7.5}$$

5. (Injection de Sobolev dans Ω.) Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), à frontière lipschitzienne. Montrer que $W^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, avec $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$, et qu'il existe $C_5 \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de Ω, N et p, t.q.

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C_5 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{1.7.6}$$

Exercice 12 (Inégalités de Sobolev pour $p \leq N$)

1. Soit $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$.
   (a) On suppose ici $N = 1$. Montrer que $\|u\|_\infty \leq \|u'\|_1$.
   (b) Par récurrence sur N, montrer que $\|u\|_{N/(N-1)} \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_1^{1/N} \ldots \|\frac{\partial u}{\partial x_N}\|_1^{1/N}$.
   (c) Montrer qu'il existe C_N ne dépendant que de N t.q. $\|u\|_{N/(N-1)} \leq C_N \| \, |\nabla u| \, \|_1$.
   (d) Soit $1 \leq p < N$. Montrer qu'il existe $C_{N,p}$ ne dépendant que N et p t.q. $\|u\|_{p^\star} \leq C_{N,p} \| \, |\nabla u| \, \|_p$, avec $p^\star = (Np)/(N-p)$.
2. Soit $1 \leq p < N$. Montrer que $\|u\|_{p^\star} \leq C_{N,p} \| \, |\nabla u| \, \|_p$, pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ ($C_{N,p}$ et $p^\star$ sont donnés à la question précédente). En déduire que l'injection de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ est continue pour tout $q \in [p, p^\star]$.
3. Soit $p = N$. Montrer que l'injection de $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ est continue pour tout $q \in [N, \infty[$ (Pour $N = 1$, le cas $q = \infty$ est autorisé).
4. On suppose maintenant que Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne. Pour $1 \leq p < N$, Montrer que l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est continue pour tout $q \in [p, p^\star]$ ($p^\star = (Np)/(N-p)$). Montrer que l'injection de $W^{1,N}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est continue pour tout $q \in [N, \infty[$ (Pour $N = 1$, le cas $q = \infty$ est autorisé).

Exercice 13 (Noyau de l'opérateur "trace")

Soient $\Omega = \mathbb{R}_+^N$, $1 \leq 1 < \infty$ et $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ l'opérateur "trace" (vu en cours).

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\gamma = W_0^{1,p}(\Omega)$.
2. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Montrer que $\gamma u = u$ p.p. (pour la mesure de lebesgue $N-1$-dimensionnelle) sur .

Exercice 14 (Prolongement H^2)

Soient $N \geq 1$, $\Omega = \mathbb{R}_+^N$ et $p \in [1, \infty[$.

1. Montrer que $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{2,p}(\Omega)$ [On pourra s'inspirer de la démonstration faite en cours de la densité de $C^\infty(\overline{\Omega})$ dans $W^{1,p}(\Omega)$].
2. Montrer qu'il existe un opérateur P linéaire continu de $W^{2,p}(\Omega)$ dans $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ tel que $Pu = u$ p.p. dans Ω, pour tout $u \in W^{2,p}(\Omega)$ [On pourra chercher P sous la forme $Pu(x_1, y) = \alpha u(-x_1, y) + \beta u(-2x_1, y)$, pour $x_1 \in \mathbb{R}_-$ et $y \in \mathbb{R}^{N-1}$].
3. On prend maintenant $p = \infty$. A-t-on $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{2,\infty}(\Omega)$? Existe-t-il un opérateur P linéaire continu de $W^{2,\infty}(\Omega)$ dans $W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$ tel que $Pu = u$ p.p. dans Ω, pour tout $u \in W^{2,p}(\Omega)$? (justifier vos réponses…).

1.8 Suggestions pour les exercices

Exercice 1 (Exemple de dérivée)

1. Faire d'abord le cas $N = 1$, et une intégration par parties.
2. Pour montrer que la mesure de Dirac ne peut pas être associée à une fonction L^1, utiliser le résultat d'intégration suivant : si $g \in L^1(\mathbb{R})$, et si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensemble mesurables dont la mesure tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, alors $\int_{A_n} g \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 2 (Une fonction de dérivée nulle est constante) Considérer d'abord le cas $u \in L^1(]0,1[)$, et procéder par densité : la fonction u peut être approchée par convolution par des noyaux régularisants ρ_n qu'on prend à support dans $]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}[$. En prolongeant u par 0 en dehors de $[0,1]$, on pose $u_n = u * \rho_n$, et on a$u'_n = u * \rho'_n$. Montrer alors que $u'n(x) = -< Du, \rho_n(x-\cdot) >$ pour tout $x \in]\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}[$, et en conclure que $u'n(x) = 0$ pour tout $]\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}[$.
Terminer le raisonnement en utilisant le fait que $u_n 1_{]\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}[}$ tend vers u dans L^1.
Dans le cas $u \in L^1_{loc}(]0,1[)$ considérer $u_\varepsilon = u 1_{[\varepsilon,1-\varepsilon]}$ et refaire le raisonnement précédent de manière habile...

Exercice 3 (Espace de Sobolev en 1d)

1. (a) Introduire la fonction $F(x) = \int_0^x Du(t)\,dt$ (qui est dans L^p), calculer sa dérivée faible et montrer qu'elle est égale à Du. Pour cela appliquer Fubini en introduisant la fonction caratéristique $1_{[0,x]}$ et en notant que pour $x, t \in [0,1]$, $1_{[0,x]}(t) = 1_{[t,1]}(x)$
   Montrer alors que F est continue et conclure grâce à l'exercice 2.
   (b) Ecrire $u(x) = u(s) + \int_s^x Du(t)\,dt$, et intégrer par rapport à s et t.
   (c) Majorer $u(x) - u(y)$ par Hölder.
2. Encore Fubini...

Exercice 4 (Généralisation de l'exercice 2) Même méthode que l'exercice 4

Exercice 5 (Non généralisation de l'exercice 3) Montrer que la dérivée faible de u est égale à sa dérivée classique (presque partout). Pour cela, calculer $\displaystyle\int_{R_\varepsilon} \partial_i u(x)$, où R_ε est le domaine $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^2 \setminus [-\varepsilon,\varepsilon]^2$, et faire tendre ε vers 0.

Exercice 6 (Trois applications de Hahn-Banach)

1. Définir T sur la droite engendrée par x et prolonger T par Hahn Banach.
2. Sens $\Rightarrow$: Sens facile.
   Sens $\Leftarrow$: construire l'application linéaire T sur $\mathbb{R}x \oplus F$ par $T(x) = 1$ et $T(y) = 0$ pour tout $y \in F$; montrer que T est continue et conclure par Hahn Banach. La continuité de T est le point le plus technique : on peut par exemple dire que si $x \not{i}n\overline{F}$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(0,\varepsilon) \cap F = \emptyset$, et montrer ensuite que $T(z) \le \frac{1}{\varepsilon} z$ pour tout $z \in G$, ce qui montre la continuité d T sur G.
3. La linéarité et la continuité de J sont faciles. Il reste à montrer le caractère isométrique. Soit $x \in E$. Il est facile de voir que $|J(x)| \le \|x\|_E$. Pour montrer l'égalité, considérer l'application T de la première question.

Exercice 7 (Séparabilité de L^p)

1. Construire une famille dénombrable dense de $C_c(\mathbb{R})$ en considérant pour $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble A_n des fonctions qui sont nulles sur $[-n,n]^c$ et qui sont constantes par morceaux et à valeur rationnelles sur tous les intervalles de la forme $[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}[$. Vérifier que les ensembles A_n sont dénombrables, et montrer ensuite que $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est dense dans L^p.

2. Soit B l'ensemble des fonctions constantes sur les intervalles $[i, i+1[$, $i \in \mathbb{Z}$ et qui ne prenent que les valeurs 0 ou 1. Vérifier que B est une partie non dénombrable de L^∞ et que si A est une partie dense de $L^\infty(\mathbb{R})$ il existe une injection de A dans B.