Université Aix-Marseille — **Master 1**
1er semestre 2018/2019 — **Probabilités**

Contrôle Continu 1 2h

Aucun document autorisé

Exercice 1. Lois de Poisson. On rappelle que X suit une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ ($\lambda > 0$) ssi

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Montrer que si X_1, X_2 sont des variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathscr{P}(\lambda_1)$ et $\mathscr{P}(\lambda_2)$ alors $X_1 + X_2$ suit une loi $\mathscr{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Exercice 2. Loi Gamma. *Rappel :* la loi $\gamma(p,\theta)$ ($p,\theta > 0$) est une loi de probabilité à densité sur $\mathbb{R}_+$ donnée par

$$\mathbf{1}_{x>0}\frac{\theta^p}{\Gamma(p)}e^{-\theta x}x^{p-1},$$

où Γ est la fonction Gamma usuelle $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx$. Cette fonction vérifie les propriétés suivantes pour tout $p > 0$: $p\Gamma(p) = \Gamma(p+1)$, $\Gamma(p) = (p-1)!$ si $p \in \mathbb{N}$ et $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

On rappelle également la formule de changement de variables dans $\mathbb{R}^2$. Si $\psi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \psi(U) \subset \mathbb{R}^2$ est un C^1-difféomorphisme alors pour toute fonction continue $f : \psi(U) \to \mathbb{R}$

$$\int_U f(\psi(x,y))\,|J\psi(x,y)|\,dx\,dy = \int_{\psi(U)} f(x,y)\,dx\,dy$$

où $J\psi$ est la matrice jacobienne des dérivées partielles de ψ. $\square$

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois $\gamma(p,\theta)$ et $\gamma(q,\theta)$ (même paramètre θ).

1. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et la variance $\mathrm{Var}(X)$ d'une loi $\gamma(p,\theta)$.
2. Montrer que $X+Y$ suit une loi $\gamma(p+q,\theta)$.
3. Trouver la densité de la loi jointe du couple $X+Y$ et $\frac{X}{X+Y}$ et en déduire l'indépendance de ces variables aléatoires.
   Indication : Penser à faire le changement de variables suivant : $x + y = u$, $x/(x+y) = v$.
4. En déduire la loi de $\frac{X}{X+Y}$?

Exercice 3. Convergence presque sûre. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires centrées indépendantes et identiquement distribuées, possédant des moments d'ordre 4. On pose

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

1. Montrer que $\mathbb{E}[X_i X_j^3] = \mathbb{E}[X_i^2 X_j X_k] = 0$ si i,j,k sont 3 indices distincts appartenant à $\{1,\dots,n\}$.

2. Montrer que $\mathbb{E}[X_i^2 X_j^2] < +\infty$ si i, j sont 2 indices distincts appartenant à $\{1, \ldots, n\}$.
3. En déduire que $\mathbb{E}[(S_n)^4] \leq Cn^2$ pour une certaine constante $C > 0$.
4. Soit $\epsilon > 0$ et $A_{n,\epsilon} := \{|S_n| > \epsilon n\}$. Montrer que
$$\mathbb{P}\big(\limsup_n A_{n,\epsilon}\big) = 0.$$
5. En déduire
$$\mathbb{P}\big(\bigcup_{\epsilon > 0} \limsup_n A_{n,\epsilon}\big) = 0.$$
6. En déduire que, presque sûrement, la suite $(\frac{S_n}{n})_n$ converge vers 0.