Université Aix-Marseille | **Master 1**
1er semestre 2019/2020 | **Probabilités**

Contrôle Continu 1 (2h)

Aucun document autorisé

Exercice 1. Loi de Poisson. Soit N une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ ($\lambda > 0$), c'est-à-dire

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(N = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Soit $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ (avec $p \in]0,1[$) et indépendante de N. Soit

$$X = \sum_{k=1}^{N} \epsilon_k \quad \text{et} \quad Y = \sum_{k=1}^{n} (1 - \epsilon_k)$$

1. Déterminer la loi de X, puis de Y.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2. Loi Gamma. *Rappel :* la loi $\gamma(p,\theta)$ ($p,\theta > 0$) est une loi de probabilité à densité sur $\mathbb{R}_+$ donnée par

$$\mathbf{1}_{x>0} \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} e^{-\theta x} x^{p-1},$$

où Γ est la fonction Gamma usuelle $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx$. Cette fonction vérifie les propriétés suivantes pour tout $p > 0$: $p\Gamma(p) = \Gamma(p+1)$, $\Gamma(p) = (p-1)!$ si $p \in \mathbb{N}$ et $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois $\gamma(p,\theta)$ et $\gamma(q,\theta)$ (même paramètre θ).

1. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et la variance $\mathrm{Var}(X)$ d'une loi $\gamma(p,\theta)$.
2. Montrer que $X + Y$ suit une loi $\gamma(p+q,\theta)$.
3. Trouver la densité de la loi jointe du couple $X + Y$ et $\frac{X}{X+Y}$ et en déduire l'indépendance de ces variables aléatoires.

   Indication : Penser à faire le changement de variables suivant : $x + y = u$, $x/(x+y) = v$.
4. En déduire la loi de $\frac{X}{X+Y}$.

Exercice 3. Fonction caractéristique de la loi gaussienne. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Gauss $\mathscr{N}(0,\sigma^2)$ ($\sigma > 0$) et $\phi(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$ sa fonction caractéristique.

1. Justifier que ϕ est une fonction à valeurs réelles.
2. Justifier que ϕ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que ϕ vérifie l'équation différentielle $\phi'(t) = -t\sigma^2\phi(t)$.
4. En déduire la valeur de $\phi(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.