Université Aix-Marseille | **Master 1**
1er semestre 2018/2019 | **Probabilités**

Contrôle Continu 2 2h

Aucun document autorisé

Exercice 1. Calculs de lois.

1. Soient $X_1, \dots, X_n$ une famille de v.a. réelles indépendantes et $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables. Montrer que la famille de v.a. $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ sont indépendantes.
2. Soient X, Y deux v.a. réelles indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre 1. Quelle est la loi de $X + Y$?
3. Soit X une v.a. réelle de loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$.
   (a) Montrer que les v.a. $|X|$ et $\text{sign}(X)$ sont indépendantes.
   (b) Quelle est la loi de $|X|$? de $\text{sign}(X)$?

Exercice 2. TCL.

1. Soient $X_1, \dots, X_n$ une suite de v.a. i.i.d. suivant la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ sur $\{0,1\}$. Montrer que $X_1 + \cdots + X_n \sim \mathscr{B}(n,p)$ (loi binômiale).
2. Soit $p \in]0,1[$. On cherche à déterminer la limite $n \to \infty$ de la suite
$$\sum_{k=0}^{[np]} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$
   (a) Exprimer cette quantité comme la probabilité qu'une loi binômiale $\mathscr{B}(n,p)$ appartienne à un certain ensemble que l'on déterminera.
   (b) A l'aide de la question 1 et du TCL, conclure quant à la limite. On fera attention à bien vérifier les hypothèses.

Exercice 3. Loi faible des grands nombres. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires centrées et identiquement distribuées, possédant des moments d'ordre 2 et telles que leur covariance vérifie

$$\forall n, k \geq 0, \quad \text{Cov}(X_n, X_k) = \mathbb{E}[X_n X_k] = f(n-k)$$

pour une fonction paire $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$.

1. On rappelle le lemme de Césaro généralisé : si $(u_n)_n$ est une suite réelle tendant vers 0 quand $n \to \infty$ et si $(\lambda_n)_n$ est une suite de réels strictement positifs telle que $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \lambda_k = +\infty$ alors
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k u_k}{\sum_{k=1}^n \lambda_k} = 0.$$
   (a) Prouver le lemme de Césaro généralisé.

(b) En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} kf(k) = 0.$$

2. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
   (a) Montrer que $\mathbb{E}[(S_n)^2] = nf(0) + 2\sum_{k=1}^{n}(n-k)f(k)$
   (b) En déduire que $\mathrm{Var}(S_n/n)$ to 0 quand $n \to \infty$
   (c) En déduire la convergence en probabilité $S_n/n \to 0$ quand $n \to \infty$.
3. Sous les mêmes hypothèses mais sans supposer les $(X_n)_n$ centrées, montrer que $S_n/n \to \mathbb{E}[X_1]$ en probabilité.