Université Aix-Marseille | **Master 1**
1er semestre 2019/2020 | **Probabilités**

Contrôle Continu 2 2h

Aucun document autorisé

Exercice 1. Loi des grands nombres. Le but de cet exercice est de donner une preuve de la loi des grands nombres lorsque l'on dispose d'une suite i.i.d. $(X_n)_n$ de variables aléatoires de carrés intégrables. On veut donc montrer que $S_n/n \to \mathbb{E}[X_1]$ presque sûrement, où l'on a posé $S_n := X_1 + \cdots + X_n$.

1. Le but de cette question est de prouver le lemme suivant qui sera utile par la suite : si $(Y_n)_n$ est une suite de variables aléatoires (non nécessairement i.i.d.) telle que $\forall \epsilon > 0$
$$\sum_n \mathbb{P}(|Y_n| > \epsilon) < +\infty,$$
alors $(Y_n)_n$ converge presque sûrement vers 0.
   (a) Pour $\epsilon > 0$, on pose
   $$C_\epsilon := \{\omega \in \Omega; \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |Y_n(\omega)| \leq \epsilon\}.$$
   Montrer que $\mathbb{P}(C_\epsilon = 1)$. (Pensez à écrire C_ϵ sous forme d'un $\limsup$).
   (b) Montrer que $\mathbb{P}\big(\bigcap_{\epsilon>0} C_\epsilon\big) = 0$ et conclure. (Attention aux intersections non dénombrables)
2. Expliquer pourquoi l'on peut se ramener au cas $\mathbb{E}[X_1] = 0$. C'est ce que nous supposerons par la suite.
3. Montrer que la série suivante converge pour tout $\epsilon > 0$
$$\sum_{m\geq 1} \mathbb{P}\big(|S_{m^2}/m^2| > \epsilon\big) < \infty$$
et en déduire que $S_{m^2}/m^2 \to 0$ presque sûrement quand $m \to \infty$.
4. pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on note $i_n = [\sqrt{n}]$.
   (a) Montrer que
   $$\Big|\frac{S_n}{n}\Big| \leq \Big|\frac{S_{i_n^2}}{i_n^2}\Big| + \frac{1}{n}\Big|\sum_{k=i_n^2+1}^{n} X_k\Big|$$
   (b) Montrer que la série suivante converge pour tout $\epsilon > 0$
   $$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\Big(\frac{1}{n}\Big|\sum_{k=i_n^2+1}^{n} X_k\Big| > \epsilon\Big) < \infty$$
5. Conclure

Exercice 2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que la suite

$$u_n = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}) dx_1 \dots dx_n$$

converge vers une limite que l'on déterminera. (Pensez à introduire une suite de v.a. i.i.d. de loi uniforme).

Exercice 3. Soit $(X_k)_k$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Quelle est la loi de Y_n ?
2. Montrer que la suite $\left(\frac{Y_n - \lambda n}{\sqrt{n}}\right)_n$ converge en loi vers une loi normale centrée dont on déterminera la variance.

Exercice 4.

1. Soit $(Y_n)_n$ et $(Z_n)_n$ deux suites de variables aléatoires telles que $(Y_n)_n$ converge en loi vers Y et $(Z_n)_n$ converge presque sûrement vers une constante $c \in \mathbb{R}$. Montrer que $(Y_n Z_n)_n$ converge en loi vers cY. (Peut être admis pour faire la suite)
2. Soit $(X_n)_n$ une suite i.i.d.de variables aléatoires centrées et de carrés intégrables. Montrer que

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\left(\sum_{k=1}^n X_k^2\right)^{1/2}} \to \mathcal{N}(0,1)$$

en loi quand $n \to \infty$.