Aix-Marseille Université | Processus Stochastiques
Master Mathématiques & Applications 1ère année | Année 2019-2020

---

**Série 1 : Espérance conditionnelle et loi conditionnelle**

---

**Exercice 1** Soient $X$ et $Y$ deux v.a.r indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p$. Soit $Z = \mathbb{1}_{\{X+Y=0\}}$, et $\mathcal{F} = \sigma(Z)$.
**1.** Calculer $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ et $\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]$.
**2.** Ces deux variables sont-elles encore indépendantes ?

**Exercice 2** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On considère deux v.a.r $X$ et $Y$ sur $\Omega$, telles que X soit indépendante de $\mathcal{G}$, et $Y$ soit $\mathcal{G}$-mesurable.
**1.** Montrer que $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$.
**2.** Montrer que $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] = Y$.
**3.** Montrer plus généralement que

$$\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = Y\mathbb{E}[X].$$

**Exercice 3** Soient $X$ et $Y$ deux v.a.r.
Montrer que $Y$ est $\sigma(X)$-mesurable si et seulement si il existe une fonction $f$ mesurable sur $\mathbb{R}$ telle que $Y = f(X)$.

**Exercice 4** On considère l'espace probabilisé $([-1,1], \mathcal{B}([-1,1]), \mathrm{d}x/2)$. On désigne par $\mathcal{G}$ la tribu des boréliens symétriques par rapport à 0. Soit f une fonction borélienne sur $[-1,1]$, intégrable.
**1.** Caractériser les fonctions $\mathcal{G}$-mesurables.
**2.** Déterminer $\mathbb{E}[f|\mathcal{G}]$

**Exercice 5** Soient $X$ et $Y$ deux variables indépendantes, toutes deux de loi de Poisson de paramètre respectivement $a$ et $b$. On note $Z = X + Y$.
**1.** Déterminer la loi de $X$ sachant $Z$.
**2.** Calculer $U = \mathbb{E}[X|Z]$.
**3.** Vérifier que $\mathbb{E}[U] = \mathbb{E}[X]$.

**Exercice 6** Soient $X_1$ et $X_2$ deux variables indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1. On note $U = X_1 + X_2$.
**1.** Déterminer la loi de $X_1$ sachant $U$.
**2.** Calculer $V = \mathbb{E}[X_1|U]$.
**3.** Vérifier que $\mathbb{E}[V] = \mathbb{E}[X_1]$.