**Série 2 : Temps d'arrêt et martingales.**

**Exercice 1**
**1.** Soit $(\xi_k)_{k\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de Bernoulli telle que

$$P(\xi_n = 1) = 1 - P(\xi_n = -1) = p,\ p \in [0,1].$$

Sous quelle condition $(X_n = \sum_{k=1}^n \xi_k)_{n\geq 1}$ est elle une surmartingale ? une sous-martingale ? une martingale ?
**2.** Soient $(Y_n)_{n\geq 0}$ des v.a.i.i.d. positives, et $X_n = \prod_{k=0}^n Y_k$. Sous quelle condition $(X_n)_{n\geq 0}$ est elle une surmartingale ? une sous-martingale ? une martingale ?
**3.** Considérons le processus suivant :

$$S_n = \sum_{k=1}^n Y_k - nr,$$

où les $(Y_k)_{k\geq 1}$ sont i.i.d. d'espérance finie. Montrer que le processus $(S_n)_{n\geq 0}$ est une martingale si et seulement si $r = E(Y_1)$.
**4.** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, P)$ un espace probabilisé filtré. On considère $Y$ intégrable et on définit le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ par $X_n = E(Y \mid \mathcal{F}_n)$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.

**Exercice 2** Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus et $A$ un sous-ensemble d'états.
**1.** Le temps d'atteinte de l'ensemble $A$ par le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ est défini par

$$T_A = \inf\{n \geq 0 \colon X_n \in A\}.$$

Soient $r \geq 1$ un entier et $T_A^{(r)}$ le premier instant où le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ atteint le sous-ensemble $A$ pour la r$^{\text{ième}}$ fois. Montrer que $T_A := T_A^{(1)}$ et $T_A^{(r)}$, pour $r \geq 2$, sont des temps d'arrêt pour le processus $(X_n)_{n\geq 0}$.
**2.** On note $T'_A$ le dernier temps de passage de $(X_n)_{n\geq 0}$ dans $A$. Soit $(Y_n)_{n\geq 0}$ le processus constitué de v.a.i.i.d. de Bernoulli vérifiant

$$P(Y_n = 1) = 1 - P(Y_n = -1) = p,\ \text{avec } 0 < p < 1.$$

On pose $X_n = Y_0 + \cdots + Y_n$ et on note $A$ l'ensemble des entiers négatifs ou nuls. Montrer que $T'_A$ n'est pas un temps d'arrêt pour $(X_n)_{n\geq 0}$.

**Exercice 3** Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, P)$ un espace probabilisé filtré et $S, T$ deux temps d'arrêt associés à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. On note $\mathcal{F}_S$ et $\mathcal{F}_T$ les tribus des événements antérieurs à $S$ et à $T$ respectivement. Montrer que
**1.** Si $S \equiv p$, $p \in \mathbb{N}$, alors $\mathcal{F}_S = \mathcal{F}_p$.
**2.** $S \wedge T$, $S \vee T$ et $S + T$ sont des temps d'arrêt.

**3.** Si $S \leq T$, alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.
**4.** $\mathcal{F}_{S\wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$.
**5.** $\{S < T\} \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$ et $\{S = T\} \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$.

**Exercice 4** **Théorème :** Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale (resp. sur-, sous-) et soit $S \leq T$ deux temps d'arrêt bornés. Alors,

$$E(X_T \mid \mathcal{F}_S) = X_S \quad (\text{resp. } \leq, \geq).$$

**1.** Montrer le théorème précédent.
**2.** Est-ce qu'est l'hypothèse que $S$ et $T$ sont des temps d'arrêt bornés est nécessaire ?

**Correction :** 1) La relation cruciale est d'observer que

$$\begin{aligned} X_T - X_S &= \sum_{k=S}^{T-1} X_{k+1} - X_k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{S\leq k<T\}}(X_{k+1} - X_k). \end{aligned}$$

Notez que cette somme est en fait finie (elle comporte un nombre non aléatoire de terms) car $T$ est borné.

A partir de cette relation on va calculer l'espérance conditionnelle. Pour cela on prend un ensemble $A \in \mathcal{F}_S$ et on doit calculer $\mathbb{E}[(X_T - X_S)\mathbf{1}_A]$ pour montrer que ça vaut 0. En utilisant la relation ci-dessus (et en justifiant le fait que l'on peut intervertir somme et espérance car la somme est finie) on obtient

$$\mathbb{E}[(X_T - X_S)\mathbf{1}_A] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{S\leq k<T\}\cap A}(X_{k+1} - X_k)].$$

On peut écrire l'ensemble $\{S \leq k < T\} \cap A$ comme $\big(\{S \leq k\} \cap A\big) \cap \{k < T\}$. Vu que $A \in \mathcal{F}_S$ on a $\{S \leq k\} \cap A \in \mathcal{F}_k$ et comme $T$ est un temps d'arrêt $\{k < T\} = \{T \leq k\}^c \in \mathcal{F}_k$. Donc $\{S \leq k < T\} \cap A \in \mathcal{F}_k$.

Du coup,

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{S\leq k<T\}\cap A}(X_{k+1} - X_k)] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{S\leq k<T\}\cap A}\mathbb{E}[(X_{k+1} - X_k)|\mathcal{F}_k]]$$

et comme $(X_n)_n$ est une martingale $\mathbb{E}[(X_{k+1} - X_k)|\mathcal{F}_k] = 0$. Au final $\mathbb{E}[(X_T - X_S)\mathbf{1}_A] = 0$ et on a donc montré que

$$\mathbb{E}[(X_T - X_S)|\mathcal{F}_S] = 0,$$

ce qui est le résultat demandé.

2) L'hypothèse que $S$ et $T$ soient bornés n'est pas nécessaire. Il existe plusieurs autres "jeux d'hypothèses" standards. On peut aussi supposer l'un ou l'autre ensemble d'hypothèses suivants

- **H1.** la martingale $(X_n)_n$ est bornée, i.e. il existe $K > 0$ tel que pour tout $n$ et presque tout $\omega$ $|X_n(\omega)| \leq K$, et $T$ est fini presque sûrement

**H2.** $T$ est intégrable et il existe un réel $K$ tel que pour tout $n$ et presque tout $\omega$ : $|X_{n+1}(\omega) - X_n(\omega)| \leq K$

En effet, sous H2, les hypothèses permettent de refaire les calculs précédents, en particulier d'intervertir espérance et somme. il faut pouvoir montrer que la série $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{S\leq k<T\}\cap A}|X_{k+1} - X_k|]$ converge pour appliquer Fubini. Or

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{S\leq k<T\}\cap A}|X_{k+1} - X_k|] \leq & K\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{k<T\}}] \\ = & K\mathbb{E}[\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{k<T\}}] \\ = & K\mathbb{E}[T] < +\infty.\end{aligned}$$

Sous H1, on observe que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $T \wedge N$ et $S \wedge N$ sont des temps d'arrêt bornés. En appliquant le résultat de la question 1, on a

$$\mathbb{E}[(X_{T\wedge N} - X_{S\wedge N})|\mathcal{F}_{T\wedge N}] = 0.$$

Soit $A \in \mathcal{F}_S$. Il faut maintenant observer que $A \cap \{S \leq N\} \in \mathcal{F}_{S\wedge N}$ (le vérifier !) et donc

$$\mathbb{E}[(X_{T\wedge N} - X_{S\wedge N})\mathbf{1}_{A\cap\{S\leq N\}}] = 0.$$

Le but est de passer à la limite dans l'expression ci-dessus quand $N \to \infty$ grâce au théorème de convergence dominée. Comme $T$ (et donc $S$) est fini presque sûrement on a presque sûrement

$$\lim_{N\to\infty} X_{T\wedge N} = X_T, \quad \lim_{N\to\infty} X_{S\wedge N} = X_S \quad \lim_{N\to\infty} \mathbf{1}_{A\cap\{S\leq N\}} = \mathbf{1}_A$$

Comme $|X_{T\wedge N}| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n| \leq K$ et $|X_{S\wedge N}| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n| \leq K$, la convergence dominée entraîne que

$$\mathbb{E}[(X_T - X_S)\mathbf{1}_A] = 0,$$

et donc le résultat voulu.

**Exercice 5** Soient $(\xi_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. d'espérance nulle et $X_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$. On se donne $\lambda > 0$ et on considère

$$P_n(\lambda) = P\Big(\max_{1\leq k\leq n} X_k \geq \lambda\Big).$$

**1.** On suppose que $\xi_1$ est de variance finie. Donner une majoration de $P_n(\lambda)$ en appliquant l'inégalité de Doob à $X_n^2$.
**2.** Améliorer la borne précédente en appliquant l'inégalité de Doob à $(X_n + c)^2$ et en optimisant sur $c$.
**3.** On suppose que les $(\xi_n)_{n\geq 1}$ suivent une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Majorer $P_n(\lambda)$ en appliquant l'inégalité de Doob à $e^{cX_n}$ et optimiser sur $c$.

**Correction :** 1) Remarquer que $(X_n)_n$ est une martingale. De plus elle est de carré intégrable car $\xi_1$ l'est (et donc chaque $\xi_i$ car ces variables sont iid). L'inégalité de

Markov, puis celle de Doob entraînent alors que

$$\begin{aligned}P_n(\lambda) \leq& \lambda^{-2}\mathbb{E}\big[\big(\max_{1\leq k\leq n} X_k\big)^2\big]\\ \leq& 4\lambda^{-2}\max_{1\leq k\leq n}\mathbb{E}\big[X_k^2\big]\end{aligned}$$

Il est alors facile de calculer

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[X_k^2\big] &= \sum_{i,i'=1}^{n}\mathbb{E}\big[\xi_i\xi_{i'}\big]\\ &= \sum_{i=1}^{k}\mathbb{E}\big[\xi_i^2\big] + \sum_{i\neq i'=1}^{n}\mathbb{E}\big[\xi_i\xi_{i'}\big]\\ &= \sum_{i=1}^{k}\mathbb{E}\big[\xi_i^2\big] + \sum_{i\neq i'=1}^{n}\mathbb{E}\big[\xi_i\big]\mathbb{E}[\xi_{i'}\big]\\ &= \sum_{i=1}^{k}\mathbb{E}\big[\xi_i^2\big] = k\mathbb{E}\big[\xi_1^2\big]\end{aligned}$$

Au final $P_n(\lambda) \leq 4\lambda^{-2}n\mathbb{E}\big[\xi_1^2\big]$.

2) On a, en répétant les calculs précédents vu que $(c + X_n)_n$ est toujours une martingale,

$$\begin{aligned}P_n(\lambda) =& P\Big(\max_{1\leq k\leq n} X_k \geq \lambda\Big)\\ =& P\Big(\max_{1\leq k\leq n} X_k + c \geq \lambda + c\Big)\\ \leq& 4(\lambda+c)^{-2}\mathbb{E}\big[\big(\max_{1\leq k\leq n} X_k + c\big)^2\big]\\ \leq& 4(\lambda+c)^{-2}\max_{1\leq k\leq n}\mathbb{E}\big[(X_k+c)^2\big]\\ =& 4(\lambda+c)^{-2}(n\mathbb{E}\big[\xi_1^2\big] + c^2)\end{aligned}$$

On peut alors optimiser en $c$ pour trouver que le minimum du membre de droite est atteint pour $c = \frac{n\mathbb{E}[\xi_1^2]}{\lambda}$, ce qui donne

$$P_n(\lambda) \leq 4\frac{n\mathbb{E}\big[\xi_1^2\big]}{\lambda^2 + n\mathbb{E}\big[\xi_1^2\big]}.$$

3) Tout d'abord on remarque que $e^{cX_n}$ est intégrable pour tout $c$. De plus, l'inégalité de Jensen montre que c'est une sous-martingale. Comme elle est positive on va encore pouvoir lui appliquer les inégalités maximales. Tout d'abord on remarque par croissance de $u \mapsto e^{cu}$ (si $c > 0$) que

$$P_n(\lambda) = P\Big(\max_{1\leq k\leq n} X_k \geq \lambda\Big) \leq P\Big(\max_{1\leq k\leq n} e^{cX_k} \geq e^{c\lambda}\Big)$$

En appliquant les inégalités maximales on en déduit

$$\begin{aligned} P_n(\lambda) \leq & e^{-c\lambda} \max_{1\leq k\leq n} \mathbb{E}\left(e^{cX_k}\right) \\ = & e^{-c\lambda+nc^2/2} \end{aligned}$$

On conclut en prenant $c = \lambda/n$ que $P_n(\lambda) \leq e^{-\frac{\lambda^2}{2n}}$.

**Exercice 6** On considère $X_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ avec $(\xi_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi $1/2(\delta_{-1} + \delta_1)$. On introduit $\mathcal{F}_n$ la fitration naturelle associée à $(\xi_n)_{n\geq 1}$. Soient $a < 0 < b$ des entiers, on définit $T_{a,b} = \inf\{n \geq 1 \colon X_n = a \text{ ou } X_n = b\}$.
**1.** Que peut-on dire de $(X_n)_{n\geq 1}$ et de $T_{a,b}$ ?
**2.** Montrer que $T_{a,b}$ est presque-sûrement fini (on pourra considérer, pour $p \in \mathbb{N}$, l'événement $A_p = \{\xi_{p(b-a)+1} = \cdots = \xi_{p(b-a)+(b-a)} = 1\}$).
**3.** Donner la loi de $X_{T_{a,b}}$.

**Correction :** 1) On peut vérifier aisément que $(X_n)_n$ est une martingale (pour la filtration engendrée par les $(\xi_n)_{n\geq 1}$ ) et que $T_{a,b}$ est un temps d'arrêt pour cette martingale.

2) L'argument pour montrer que $T_{a,b}$ est presque-sûrement fini est plus subtil. Observez tout d'abord que sur $\{T_{a,b}\} = +\infty$, on doit avoir pour tout $n$ : $a + 1 \leq X_n \leq b - 1$, ce qui implique $|X_n - X_k| < b - a$ pour tous $n, k$.

Or, l'évènement $A_p$ oblige $X_n$ à faire un saut de longueur $b-a$ entre les instants $p(b-a)$ et $p(b-a) + (b-a)$, c'est-à-dire si $A_p$ est réalisé on a

$$X_{p(b-a)+(b-a)} - X_{p(b-a)} = b - a \tag{0.1}$$

Donc sur $\{T_{a,b} = +\infty\}$, l'évènement $A_p$ ne peut pas être réalisé, et ce pour tout $p$.

On en déduit que pour tout $N$

$$\{T_{a,b} = +\infty\} \subset \bigcap_{p=1}^{N} A_p^c$$

Or, les $A_p$ étant indépendants : pour chaque $p$, notons $Y_p$ le vecteur aléatoire

$$Y_p = (\xi_{p(b-a)+1}, \ldots, \xi_{p(b-a)+(b-a)}).$$

Remarquez que chaque $Y_p$ implique des variables aléatoires $\xi_k$ toutes différentes de celles apparaissant dans les autres $Y_{p'}$ pour $p' \neq p$. Comme les $(\xi_n)_n$ sont indépendantes, la suite $(Y_p)_p$ est elle aussi une suite de vecteurs aléatoires indépendants. Comme chaque $A_p$ peut s'écrire comme une fonction mesurable de $Y_p$, les évènements $(A_p)_p$ sont donc bien indépendants. On en déduit que

$$\mathbb{P}(T_{a,b} = +\infty) \leq \prod_{p=1}^{N} \mathbb{P}(A_p^c) = (1 - \mathbb{P}(A_1))^N = (1 - 2^{-(b-a)})^N$$

Ceci étant vrai pour tout $N$, cela force $\mathbb{P}(T_{a,b} = +\infty) = 0$.

3) Vu que $T_{a,b}$ est fini ps, alors $X_{T_{a,b}}$ ne peut prendre que 2 valeurs qui sont $a$ ou $b$. Nous allons calculer la probabilité de chacune d'entre elles grâce au théorème d'arrêt (exo 4) pour les martingales. Comme $(X_n)_n$ est une martingale, le processus arrêté $(X_{n\wedge T_{a,b}})_n$ est également une martingale, qui est bornée car $|X_{n\wedge T_{a,b}}| \leq \max(-a, b)$. Les hypothèses H1 de l'exo 4 sont donc satisfaites et l'on obtient $\mathbb{E}[X_{n\wedge T_{a,b}}] = \mathbb{E}[X_0] = 0$. Comme $(X_{n\wedge T_{a,b}})_n$ est bornée et qu'elle converge vers $X_{T_{a,b}}$ quand $n \to \infty$, on peut appliquer la convergence dominée qui donne

$$0 = \mathbb{E}[X_{T_{a,b}}] = a\mathbb{P}(T_a < T_b) + b\mathbb{P}(T_b < T_a)$$

De plus $\mathbb{P}(T_a < T_b) + \mathbb{P}(T_b < T_a) = 1$. Ces 2 équations permettent de déterminer

$$\mathbb{P}(T_a < T_b) = \frac{b}{b-a}, \quad \mathbb{P}(T_b < T_a) = \frac{-a}{b-a}$$

La loi de $X_{T_{a,b}}$ est donc donnée par $\frac{b}{b-a}\delta_a + \frac{-a}{b-a}\delta_b$.