Série 3 : Martingales, théorèmes de convergence

Exercice 1 Urne de Polya

Une urne contient initialement r_0 boules rouges et v_0 boules vertes. A chaque unité de temps on tire une boule au hasard dans l'urne, puis on la replace en ajoutant a boules de la même couleur et b boules de la couleur opposée. Soit $X_n = v_n/(r_n+v_n)$ la proportion de boules vertes après n tirages, où r_n et v_n représentent respectivement le nombre de boules rouges et le nombre de boules vertes après n tirages.

1. Pour quelles valeurs de a et b le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ est-il une martingale ?

Correction : Soit N_n le nombre de boules au temps n. Il est clair que $N_n = r_0 + v_0 + n(a+b)$. Au temps n, la probabilité de tirer une boule verte vaut X_n et de tirer une rouge $1 - X_n$. Soit $(U_n)_n$ une suite de variables aléatoires iid uniformes sur $[0,1]$. On modélise le "tirage de la boule au hasard au temps n" par la variable aléatoire U_{n+1} : si $U_{n+1} \leq X_n$ alors on considère que l'on a tiré une boule verte et $(v_{n+1}, r_{n+1}) = (v_n + a, r_n + b)$, sinon si $U_{n+1} > X_n$ alors on considère que l'on a tiré une boule rouge et $(v_{n+1}, r_{n+1}) = (v_n + b, r_n + a)$. Ceci peut se traduire par

$$X_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{N_{n+1}} = \frac{v_n + a}{N_{n+1}} \mathbf{1}_{\{U_{n+1}\leq X_n\}} + \frac{v_n + b}{N_{n+1}} \mathbf{1}_{\{U_{n+1}>X_n\}}$$
$$= \frac{X_n N_n + a}{N_{n+1}} \mathbf{1}_{\{U_{n+1}\leq X_n\}} + \frac{X_n N_n + b}{N_{n+1}} \mathbf{1}_{\{U_{n+1}>X_n\}}. \tag{0.1}$$

Soit $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les variables $U_1, \ldots, U_n$. Notons que X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable et intégrable car $X_n \in [0,1]$. On calcule alors

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \frac{X_n N_n + a}{N_{n+1}} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{U_{n+1}\leq X_n\}}|\mathcal{F}_n] + \frac{X_n N_n + b}{N_{n+1}} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{U_{n+1}>X_n\}}|\mathcal{F}_n].$$

Comme U_{n+1} est indépendante de $\mathcal{F}_n$, on peut calculer ces espérances conditionnelles, ce qui donne

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \frac{X_n N_n + a}{N_{n+1}} X_n + \frac{X_n N_n + b}{N_{n+1}} (1 - X_n)$$
$$= \frac{X_n N_n + (a-b) X_n + b}{N_{n+1}}$$

Cette dernière expression vaut X_n (et donc $(X_n)_n$ est une martingale) pour tout n si et seulement si $b = 0$.

On considère maintenant le modèle d'urne de Polya défini ci-dessus avec $b = 0$.

2. Dans le cas $r_0 = v_0 = a = 1$, montrer que la distribution de la proportion de boules vertes X_n est uniforme sur $\{1/(n+2), 2/(n+2), \cdots, (n+1)/(n+2)\}$.

Correction : On démontre la propriété par récurrence. On le vérifie aisément pour

$n = 1$. Si c'est vrai au rang n alors la première chose que l'on puisse dire est que $X_{n+1} \in \{1/(n+3), 2/(n+3), \cdots, (n+2)/(n+3)\}$ vu que l'on rajoute une boule à chaque unité de temps.

Nous allons maintenant utiliser à nouveau la relation (0.1) obtenue en Q1 (avec $b = 0$ et $a = r_0 = v_0 = 1$)

$$X_{n+1} = \frac{X_n(2+n)+1}{n+3}\mathbf{1}_{\{U_{n+1}\leq X_n\}} + \frac{X_n(2+n)}{n+3}\mathbf{1}_{\{U_{n+1}>X_n\}}.$$

pour calculer les probabilités $\mathbb{P}(X_{n+1} = \frac{k}{n+3})$ pour $k \in \{1, 2, \cdots, n+2\}$.

- pour $k \in \{2, \cdots, n+2\}$: sur l'évènement $X_{n+1} = \frac{k}{n+3}$ on a nécessairement $X_n = \frac{k-1}{n+2}$ ou $X_n = \frac{k}{n+2}$. D'où

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{n+1} = \frac{k}{n+3}) \\
&\quad= \mathbb{P}(\{X_{n+1} = \frac{k}{n+3}\} \cap \{X_n = \frac{k-1}{n+2}\}) + \mathbb{P}(\{X_{n+1} = \frac{k}{n+3}\} \cap \{X_n = \frac{k}{n+2}\}) \\
&\quad= \mathbb{P}(\{U_{n+1} \leq X_n\} \cap \{X_n = \frac{k-1}{n+2}\}) + \mathbb{P}(\{U_{n+1} > X_n\} \cap \{X_n = \frac{k}{n+2}\}) \\
&\quad= \mathbb{P}(\{U_{n+1} \leq \frac{k-1}{n+2}\} \cap \{X_n = \frac{k-1}{n+2}\}) + \mathbb{P}(\{U_{n+1} > \frac{k}{n+2}\} \cap \{X_n = \frac{k}{n+2}\})
\end{aligned}$$

Comme U_{n+1} et X_n sont indépendantes, on en déduit

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{n+1} = \frac{k}{n+3}) \\
&\quad= \mathbb{P}(U_{n+1} \leq \frac{k-1}{n+2})\mathbb{P}(X_n = \frac{k-1}{n+2}) + \mathbb{P}(U_{n+1} > \frac{k}{n+2})\mathbb{P}(X_n = \frac{k}{n+2}) \\
&\quad= \frac{k-1}{n+2} \times \frac{1}{n+1} + \frac{n+2-k}{n+2} \times \frac{1}{n+1} \\
&\quad= \frac{1}{n+2}.
\end{aligned}$$

- pour $k = 1$: si $X_{n+1} = \frac{1}{n+3}$ on a nécessairement $X_n = \frac{1}{n+2}$ et donc $U_{n+1} > X_n$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = \frac{1}{n+3}) &= \mathbb{P}(\{U_{n+1} > X_n\} \cap \{X_n = \frac{1}{n+2}\}) \\
&= \mathbb{P}(U_{n+1} > \frac{1}{n+2})\mathbb{P}(X_n = \frac{1}{n+2}) \\
&= \frac{n+1}{n+2} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2}.
\end{aligned}$$

Ceci conclut la récurrence.

3. Toujours dans le cas $r_0 = v_0 = a = 1$. Montrer que X_n est une martingale et qu'elle converge p.-s. et dans L^2 vers une variable aléatoire X_∞. Quelle est la loi de X_∞ ?

Correction : On a déjà vu que $(X_n)_n$ est une martingale car $b = 0$. Aussi $X_n \in [0, 1]$

donc elle est bornée, et donc dans tous les espaces L^p pour $p > 1$. D'après le théorème de convergence des martingales, elle converge presque sûrement et dans L^p vers une variable X_∞. Elle converge donc aussi en loi. D'après la Q2, la loi de X_n est uniforme $\{1/(n+2), 2/(n+2), \cdots, (n+1)/(n+2)\}$. Donc pour toute fonction f continue bornée sur $\mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \frac{1}{n+2} \sum_{k=1}^{n+1} f(\frac{k}{n+2})$$

et cette somme converge vers $\int_0^1 f(u)\, du$. Donc X_∞ suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 2 Décomposition de Doob Un processus adapté $(A_n)_{n\geq 0}$ est un *processus prévisible croissant* si $A_0 = 0$, $A_n \leq A_{n+1}$ et A_{n+1} est $\mathcal{F}_n$-mesurable pour tout $n \geq 0$.

Le but de cet exercice est de montrer qu'une sous-martingale $(X_n)_{n\geq 0}$ se décompose de manière unique en une martingale $(M_n)_{n\geq 0}$ et un processus croissant prévisible $(A_n)_{n\geq 0}$.

On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$, $A_0 = 0$

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \big(\mathbb{E}(X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) - X_{k-1}\big), \quad M_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(X_k - \mathbb{E}(X_k \mid \mathcal{F}_{k-1})\big).$$

1. Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.

Correction : $(M_n)_n$ est clairement $\mathcal{F}_n$-mesurable et intégrable (car X_n l'est). Puis

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] =& X_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(X_k - \mathbb{E}(X_k \mid \mathcal{F}_{k-1})\big) + \mathbb{E}\Big[X_{n+1} - \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)|\mathcal{F}_n\Big] \\ =& M_n + 0\end{aligned}$$

donc $(M_n)_n$ est bien une martingale.

2. Montrer que $(A_n)_{n\geq 0}$ est un processus prévisible croissant.

Correction : on vérifie facilement que A_{n+1} est $\mathcal{F}_n$-mesurable. On a aussi

$$A_{n+1} - A_n = \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) - X_n \geq 0$$

car $(X_n)_n$ est une sous-martingale.

3. Montrer que si $X_n = M'_n + A'_n$, où M'_n est une martingale et A'_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable et vérifie $A'_0 = 0$ et $A'_{n+1} \geq A'_n$ pour tout $n \geq 0$, alors $\Delta A'_n = \Delta A_n$, où $\Delta A_n = A_n - A_{n-1}$.

Correction : on vérifie que $X_n = M_n + A_n$:

$$\begin{aligned}M_n + A_n =& X_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(X_k - \mathbb{E}(X_k \mid \mathcal{F}_{k-1})\big) + \sum_{k=1}^{n} \big(\mathbb{E}(X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) - X_{k-1}\big) \\ =& X_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(X_k - X_{k-1}\big) \\ =& X_n.\end{aligned}$$

Donc si $X_n = M'_n + A'_n$ alors $M_n + A_n = M'_n + A'_n$. En prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_{n-1}$ on en déduit

$$M_{n-1} + A_n = M'_{n-1} + A'_n.$$

Puis en soustrayant la relation $M_{n-1} + A_{n-1} = M'_{n-1} + A'_{n-1}$, on obtient

$$\Delta A_n = \Delta A'_n$$

.

4. En déduire que $A_n = A'_n$ et $M_n = M'_n$. Conclure.
Correction : comme $A_0 = A'_0$ et pour tout n $\Delta A_n = \Delta A'_n$, on en déduit que

pour tout n $A_n = A'_n$. Et donc $M_n = M'_n$. La décomposition de X en une somme "martingale+processus croissant prévisible" est donc unique.
5. Un cas particulier se présente si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale telle que $X_0 = 0$ et $E(X_n^2) < \infty$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que $(X_n^2)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale. Le processus prévisible coissant associé à $(X_n^2)_{n\geq 0}$ est appelé *le crochet* de X_n et est noté $(\langle X \rangle_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 3 Décomposition de Doob - convergence

On se met dans le contexte de l'exercice précédent.
1. Montrer l'équivalence :

$$\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}(X_n^+) < \infty \Leftrightarrow \sup_{n\geq 0} \mathbb{E}(|M_n|) < \infty \text{ et } A_\infty \in L^1.$$

Correction : le sens $\Leftarrow$ de l'équivalence est direct. En effet, comme $(A_n)_n$ est

croissant, il converge ps vers une limite A_∞ et on a

$$|X_n| \leq |M_n| + A_n \leq |M_n| + A_\infty.$$

Or $X_n^+ \leq |X_n|$.

Pour montrer la réciproque, on observe que $M_n = X_n - A_n \leq X_n$ (car $A_n \geq 0$), donc $M_n^+ \leq X_n^+$. Donc $\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}(M_n^+) \leq \sup_{n\geq 0} \mathbb{E}(X_n^+) < \infty$. Et vu que M_n est une martingale on a $\mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(M_n^+) - \mathbb{E}(M_n^-)$, ce qui implique

$$\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}(M_n^-) \leq \sup_{n\geq 0} \mathbb{E}(M_n^+) - \mathbb{E}(X_0) < \infty.$$

Finalement, $A_n = X_n - M_n \leq X_n^+ + |M_n|$ implique que $\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}(A_n) < +\infty$. Le théorème de convergence monotone indique alors que $A_\infty \in L^1$.
2. Montrer que si $\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}(X_n^+) < \infty$, alors la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge p.s..
Correction : cela résulte du théorème de convergence des sous-martingales. A no-

ter que cet exercice montre que si on sait prouver ce théorème pour les martingales, il est vrai pour les sous-martingales.
3. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale de carré intégrable et soit $(\langle X \rangle_n)_{n\geq 0}$ le crochet de X_n. Montrer que si $\mathbb{E}(\langle X \rangle_\infty) < \infty$, alors $(X_n)_{n\geq 0}$ converge p.s. et dans L^2.
Correction : Ecrivons la décomposition de Doob de la sous-martingale X_n^2, i.e.

$X_n^2 = M_n + \langle X\rangle_n$. En prenant l'espérance on obtient $\mathbb{E}(X_n^2) = \mathbb{E}(\langle X\rangle_n) \leq \mathbb{E}(\langle X\rangle_\infty)$. Donc la martingale $(X_n)_n$ est bornée dans L^2 et on applique le théorème de convergence des martingales.

Exercice 4 On a une population de taille fixée $N \in \mathbb{N}^*$ qui se renouvelle entièrement à chaque génération et dont chaque individu est de type a ou A. Chaque individu de la génération $n+1$ choisit son (seul) parent de la génération n de façon uniforme et indépendante des autres individus et hérite du type du parent choisi.

On note X_n le nombre d'individus de type a dans la génération n et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$. On a alors que la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $\mathcal{F}_n$ est une variable binomiale de paramètres $(N, X_n/N)$. On suppose que p.s. $X_0 = k \in \{0, \dots, N\}$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale et discuter la convergence de X_n vers une variable X_∞ lorsque $n \to \infty$.

Correction : On a clairement X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable et X_n intégrable car $X_n \in [0, N]$. Comme la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant X_n est une loi binomiale $\mathcal{B}(N, X_n/N)$ (à vérifier !) on en déduit que $\mathbb{E}[X_{n+1}\mathcal{F}_n] = N \times X_n/N = X_n$, donc $(X_n)_n$ est une martingale. Comme elle est bornée, elle converge ps et dans L^p (pour tout $p > 1$) vers une limite X_∞.

2. Montrer que $M_n = (N/(N-1))^n X_n(N - X_n)$ est une martingale.

Correction : On a clairement que M_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable et M_n intégrable car $X_n \in [0, N^2(N/(N-1))^n]$. On calcule à nouveau l'espérance conditionnelle de M_{n+1} sachant $\mathcal{F}_n$ en utilisant le fait que la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant X_n est une loi binomiale $\mathcal{B}(N, X_n/N)$. En particulier si X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(N, p)$ on a $\mathbb{E}[X(N - X)] = N^2p - Np(1-p) - N^2p^2$. D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] =& (N/(N-1))^{n+1}\big(NX_n - X_n(1 - \frac{X_n}{N}) - X_n^2)\big) \\ =& (N/(N-1))^n X_n\big(N - X_n\big) \\ =& M_n\end{aligned}$$

On a donc bien une martingale.

3. Calculer $E(X_\infty)$ et $E(X_\infty(N - X_\infty))$.

Correction : Comme $(X_n)_n$ est une martingale et converge dans L^p on a

$$\mathbb{E}[X_\infty] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0] = k$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_\infty(N - X_\infty)] &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n(N - X_n)] \\ &= \lim_{n\to\infty} (N/(N-1))^{-n}\mathbb{E}[M_n] \\ &= \lim_{n\to\infty} (N/(N-1))^{-n}\mathbb{E}[M_0] = 0.\end{aligned}$$

4. Calculer le loi de X_∞ et commenter.

Correction : Comme $\mathbb{E}[X_\infty(N - X_\infty)] = 0$ et que $X_\infty(N - X_\infty) \geq 0$, on en déduit que $X_\infty(N-X_\infty)=0$ presque sûrement et donc que $X_\infty \in \{0,N\}$. C'est donc une loi de Bernoulli. Pour retrouver son paramètre, on utilise la fait que l'on connait son espérance $\mathbb{E}[X_\infty]=k$, ce qui nous dit que la loi de X_∞ vaut

$$(1-\frac{k}{N})\delta_0+\frac{k}{N}\delta_N.$$

On a donc convergence vers une population entièrement du même type, le type étant choisi à l'aide du boi de Bernoulli de paramètre $\frac{k}{N}$.

Exercice 5 [Processus de Galton Watson] On se donne des v.a.i.i.d. $(\xi_{n,i})_{n,i\geq 1}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ de distribution $p_k=P(\xi_{n,i}=k)$, d'espérance $\mu>0$ et de variance σ^2. On note $\mathcal{F}_n=\sigma(\xi_{i,m}\mid i\geq 1, m\leq n)$ la filtration associée à ξ (ne dépendant pas de i). On définit alors le processus $(Z_n)_{n\geq 0}$ par $Z_0=1$ et pour tout $n\geq 0$

$$Z_{n+1}=\begin{cases}\xi_{1,n+1}+\cdots+\xi_{Z_n,n+1} & \text{si } Z_n>0\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Ce processus modélise le nombre d'individus d'une population ayant initialement $Z_0=1$ individu et dans laquelle à la génération n chaque individu i donne naissance à un nombre aléatoire $\xi_{n,i}$ d'enfants, indépendamment et avec la même loi que tous les autres individus.

1. Montrer que $X_n=Z_n/\mu^n$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$.

Correction : La mesurabilité de Z_n est claire. De plus comme Z_n est positive on peut calculer

$$\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]=\mu Z_n,$$

ce qui donne (par récurrence) l'intégrabilité de Z_n et le fait que $(X_n)_n$ est une martingale.

2. Montrer que si $\mu<1$, alors $P(Z_n=0)\to 1$ lorsque $n\to\infty$ (on pourra calculer $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(Z_n)$). En déduire que $\lim_{n\to\infty}X_n=0$ presque sûrement.

Correction : Comme $(X_n)_n$ est une martingale on a $\mathbb{E}[X_n]=\mathbb{E}[X_0]=1$. D'où (par Markov) $\mathbb{P}(Z_n\geq 1)\leq \mathbb{E}[Z_n]=\mu^n\to 0$ quand $n\to\infty$ car $\mu<1$. Comme $(Z_n)_n$ est à valeurs entières et converge presque sûrement vers 0, alors $(Z_n)_n$ est presque sûrement stationnaire, c'est-à-dire qu'elle ne peut valoir que 0 à partir d'un certain rang (aléatoire) : $\exists\mathcal{N}\subset\Omega$ tel que $\mathbb{P}(\mathcal{N})=0$ et pour tout $\omega\in\Omega/\mathcal{N}$, $\exists N_\omega$ tel que pour tout $n\geq N_\omega$, $Z_n(\omega)=0$. Or si $Z_n(\omega)=0$ alors $X_n(\omega)=0$, ce qui montre que la martingale $X_n)_n$ converge aussi ps vers 0.

3. On suppose que $\mu>1$. Soit $\varphi(s)=E(s^{\xi_{i,n}})$ la fonction génératrice de la distribution d'enfants.

a) Montrer que φ est strictement croissante et strictement convexe sur $[0,1]$.

Correction : Comme $\mu=\mathbb{E}[\xi]>1$ alors il existe un $k\geq 2$ tel que $\mathbb{P}(\xi=k)>0$ (raisonner par l'absurde pour le voir). En différentiant φ pour $s\in]0,1[$ on obtient

$$\varphi'(s)=\mathbb{E}[\xi s^{\xi-1}]\geq \mathbb{E}[\xi s^{\xi-1}\mathbf{1}_{\xi=k}]=ks^{k-1}\mathbb{P}(\xi=k)>0,$$

donc φ est strictement croissante. En dérivant 2 fois on a

$$\varphi''(s)=\mathbb{E}[\xi(\xi-1)s^{\xi-2}]\geq\mathbb{E}[\xi(\xi-1)s^{\xi-2}\mathbf{1}_{\xi=k}]=k(k-1)s^{k-2}\mathbb{P}(\xi=k)>0,$$

donc φ est strictement convexe.

b) Soit $\theta_m = \mathbb{P}(Z_m = 0)$. Montrer que $\mathbb{P}(Z_m = 0 \mid Z_1 = k) = \theta_{m-1}^k$ et en déduire que $\theta_m = \varphi(\theta_{m-1})$.

Correction : L'idée est la suivante et repose sur le fait que les variables $(\xi_{n,i})_{n,i\geq 1}$

sont iid : si l'on prend un des k individus de la génération 1 alors sa "descendance" à l'instant m a la même loi Z_{m-1}, on la note $Z_{m-1}^{(i)}$ où $i \in \{1,\ldots,k\}$ est l'un des k ancêtres possibles (éventuellement faire un dessin pour bien comprendre ce qu'il se passe). Les $(Z_{m-1}^{(i)})_{i\in\{1,\ldots,k\}}$ sont indépendantes. On doit alors avoir une décomposition en loi du type

$$Z_m = \sum_{i\in\{1,\ldots,k\}} Z_{m-1}^{(i)}.$$

Si l'on arrive à prouver une telle décomposition alors le résultat suit trivialement : en effet si $Z_m = 0$ cela est équivalent au fait que chaque $Z_{m-1}^{(i)}$ vaille 0, d'où (par indépendance)

$$\mathbb{P}(Z_m = 0|Z_1 = k) = \prod_{i\in\{1,\ldots,k\}} \mathbb{P}(Z_{m-1}^{(i)} = 0) = \mathbb{P}(Z_{m-1} = 0)^k.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\theta_m =& \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(Z_m = 0|Z_1 = k)\mathbb{P}(Z_1 = k)\\ =& \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(Z_{m-1} = 0)^k \mathbb{P}(\xi_{11} = k)\\ =& \varphi(\mathbb{P}(Z_{m-1} = 0)).\end{aligned}$$

Nous allons donc donner une preuve de la décomposition voulue (en fait l'argument donné plus haut est déjà une preuve probabiliste mais l'argument qui suit sera plus analytique). Soit G_n la fonction génératrice de Z_n. On a

$$\mathbb{E}[s^{Z_n+1} \mid Z_n] = \mathbb{E}[s^{\xi_{1,n+1}+\cdots+\xi_{Z_n,n+1}} \mid Z_n] = \varphi(s)^{Z_n}$$

Donc, en prenant l'espérance, $G_{n+1}(s) = G_n(\varphi(s))$ et une récurrence donne immédiatement pour tout $n \geq 1$, $G_n(s) = \varphi^{\circ n}(s)$ (où le symbole $^{\circ n}$ signifie que l'on compose n fois la fonction avec elle-même).

Aussi, ce même argument fournit

$$\mathbb{E}[s^{Z_n} \mid Z_1] = \mathbb{E}[\varphi(s)^{Z_{n-1}} \mid Z_1]$$

et donc par récurrence $\mathbb{E}[s^{Z_n} \mid Z_1] = (\varphi(s)^{\circ n-1})^{Z_1}$. C'est exactement la preuve voulue de notre décomposition car la fonction génératrice caractérise la loi et notre relation dit que la loi de Z_n conditionnellement à Z_1 et donnée par une somme de Z_1 variables indépendantes de loi Z_{n-1}.

c) Montrer que φ admet un unique point fixe ρ sur $[0, 1)$.

Correction : Comme $\varphi(0) = \mathbb{P}(\xi = 0) \geq 0$, $\varphi(1) = 1$ et $\varphi'(1) = \mu > 1$, il est facile de voir qu'il y a un unique point fixe sur $[0,1[$ (à vérifier ! utiliser le TVI pour l'existence et la stricte convexité pour l'unicité).

d) Montrer que $\theta_m \uparrow \rho$ lorsque $m \to \infty$. En déduire que $P(Z_n > 0\, \forall n) = 1-\rho > 0$.

Correction : La convergence de θ_m vers ρ découle des techniques d'analyse de Licence à partir de la relation de récurrence $\theta_m = \varphi(\theta_{m-1})$ (je vous laisse les retrouver). De plus, si $Z_n = 0$ pour un certain n alors $Z_k = 0$ pour tout $k \geq n$. On en déduit que

$$\mathbb{P}(Z_k > 0,\ \forall k \leq n) = \mathbb{P}(Z_n > 0) = 1 - \mathbb{P}(Z_n = 0) \to 1 - \rho > 0$$

quand $n \to \infty$.

4. Galton et Watson ont introduit leur modèle afin de décrire la survie de noms de famille. Au XVIIIème siècle, ces noms n'étaient transmis que par les enfants de sexe masculin. On suppose que chaque famille a trois enfants, dont le sexe est déterminé par une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Le nombre de descendants masculins est donc décrit par un processus de Galton-Watson de loi binomiale $p_0 = p_3 = 1/8$ et $p_1 = p_2 = 3/8$. Déterminer la probabilité de survie du nom de famille.

Correction : là il suffit de calculer le μ et le ρ.

5. Déterminer le processus croissant $\langle X \rangle_n$ de X_n. Calculer $\lim_{n\to\infty} \langle X \rangle_n$ et en déduire que X_n converge dans L^2 vers une v.a. X d'espérance 1.

Correction : On a

$$\begin{aligned}
\Delta A_n =& \mathbb{E}(X_n^2 \mid \mathcal{F}_n) - X_{n-1}^2 \\
=& \mu^{-2n} \mathbb{E}\Big[(\xi_{1,n} + \cdots + \xi_{Z_{n-1},n})^2 \mid \mathcal{F}_n\Big] - \mu^{-2(n-1)} Z_{n-1}^2 \\
=& \mu^{-2n} \Big(Z_{n-1}\sigma^2 + Z_{n-1}^2 \mu^2\Big) - \mu^{-2(n-1)} Z_{n-1}^2 \\
=& \mu^{-2n} Z_{n-1} \sigma^2
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{E}[Z_n] = \mu^n$ on obtient

$$\mathbb{E}[A_n] = \sigma^2 \sum_{k=1}^{n} \mu^{-n-1},$$

lequel converge pour $\mu > 1$. D'après l'exo sur la décomposition de Doob, la martingale $(X_n)_n$ converge alors ps et dans L^2 vers une variable aléatoire X, avec espérance $\mathbb{E}[X] = \lim_n \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0] = 1$.