## Série 4 : Chaînes de Markov, premières propriétés

**Exercice 1** Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov homogène sur $E = \{e_0, e_1, \cdots, e_n, \cdots\}$ de matrice de transition $P = (p_{i,j})_{i,j\in E}$ et de loi initiale $\pi = (\pi_i)_{i\in E}$.
**1.** Montrer que les trois propriétés de Markov suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = e_{i_{n+1}} \mid X_n = e_{i_n}, X_{n-1} = e_{i_{n-1}}, \cdots, X_0 = e_{i_0}) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = e_{i_{n+1}} \mid X_n = e_{i_n}) \\ &= p_{i_n,i_{n+1}}\end{aligned} \tag{0.1}$$

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_{n+m} = e_{i_{n+m}}, \cdots, X_{n+1} = e_{i_{n+1}} \mid X_n = e_{i_n}, X_{n-1} = e_{i_{n-1}}, \cdots, X_0 = e_{i_0}) \\ &\quad= \mathbb{P}(X_{n+m} = e_{i_{n+m}}, \cdots, X_{n+1} = e_{i_{n+1}} \mid X_n = e_{i_n}) \\ &\quad= p_{i_n,i_{n+1}} \times \cdots \times p_{i_{n+m-1},i_{n+m}};\end{aligned} \tag{0.2}$$

$$\mathbb{P}(X_n = e_{i_n}, \cdots, X_1 = e_{i_1}, \cdots, X_0 = e_{i_0}) = \pi_{i_0} p_{i_0,i_1} \cdots p_{i_{n-1},i_n}. \tag{0.3}$$

**2.** Vérifier que

$$(0.2) = \mathbb{P}(X_m = e_{i_{n+m}}, \cdots, X_1 = e_{i_{n+1}} \mid X_0 = e_{i_n}).$$

**Exercice 2** Soit $\alpha$, $\beta \in [0,1]$ et $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov ayant deux états dont la matrice de transition est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}.$$

**1.** Montrer que si $\alpha + \beta > 0$, alors pour tout $n \geq 1$,

$$P^n = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + \frac{(1-(\alpha+\beta))^n}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix}$$

**2.** Calculer $\lim_{n\to\infty} P^n$.

**Exercice 3** Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov homogène sur $E = \{e_0, e_1, \cdots, e_n, \cdots\}$ de matrice de transition $P = (p_{i,j})_{i,j\in E}$
**1.** Montrer que pour tout $n \geq 0$ et tout $n$-uplet $(A_0, \cdots, A_{n-1})$ de sous-ensembles de $E$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = e_j \mid X_n = e_i,\ X_{n-1} \in A_{n-1}, \cdots,\ X_0 \in A_0) = p_{i,j}.$$

**2.** Montrer par un contre-exemple que l'égalité

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = e_j \mid X_n \in A_n,\ X_{n-1} \in A_{n-1}, \cdots,\ X_0 \in A_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = e_j \mid X_n \in A_n)$$

n'est pas toujours vérifiée.

**Exercice 4** Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$ deux chaînes de Markov indépendantes, définies sur un même espace de probabilité, ayant toutes deux le même espace d'états $E$, la même loi initiale $\pi$ et la même matrice de transition $P$.
**1.** Montrer que le processus $(Z_n)_{n\geq 0}$ défini par $Z_n = (X_n, Y_n)$ est une chaîne de Markov d'espace d'états $E \times E$.
**2.** Trouver la matrice de transition de $(Z_n)_{n\geq 0}$ ainsi que sa loi initiale.

**Exercice 5** Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition $P$, de loi initiale $\pi$. Soient $d \geq 1$, $r \geq 0$ et pour tout $n \geq 0$,

$$Y_n = X_{nd+r}.$$

Montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov. Trouver sa loi initiale et sa matrice de transition.

**Exercice 6** Soit $(\epsilon_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. À partir de $(\epsilon_n)_{n\geq 0}$, on construit $(X_n)_{n\geq 0}$ comme suit :

$$X_n = X_{n-1} + bX_{n-2} + \epsilon_n, \qquad n \geq 2,$$

$b$ étant un réel quelconque, $X_0$ et $X_1$ deux variables aléatoires à préciser.
**1.** Supposons $b = 0$.

a) Si $X_0 = 0$, montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ définit une chaîne de Markov.

b) Plus généralement, soient $Y_0$ une variable aléatoire discrète indépendante de la suite $(\epsilon_n)_{n\geq 0}$ et $G$ une fonction mesurable à valeurs entières. Si

$$Y_n = G(Y_{n-1}, \epsilon_n), \qquad n \geq 1,$$

montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov.

**2.** Supposons $b \neq 0$.

a) si $X_0 = X_1 = 0$, montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ n'est pas une chaîne de Markov.

b) Construire à partir de la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov.

**Exercice 7** On dispose de deux boîtes et de $2d$ boules, parmi lesquelles $d$ noires et $d$ rouges.
Au départ, on place $d$ boules au hasard dans la boîte 1 et les $d$ boules restantes dans la boîte 2.
A chaque instant, on tire au hasard une boule de chaque boîte et on les inverse. Soit $X_n$ le nombre de boules noires dans la boîte 1 après $n$ tirages.
Trouver la matrice de transition de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$.

**Exercice 8** Soit $P$ la matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & \times \\ 1/3 & 1/3 & \times \\ \times & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

**1.** Compléter les valeurs de $Q$.
**2.** Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$. Trouver une fonction $F$ telle que $X_n = F(X_{n-1}, U_n)$ définisse une chaîne de Markov de matrice de transition $P$.

**Exercice 9** Les valeurs propres d'une matrice stochastique $P$ ont des propriétés intéressantes. Elles nous donnent également une information sur l'évolution dans le temps de la chaîne de Markov définie par $P$. Soit la matrice stochastique

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

**1.** Dessiner le graphe de transition correspondant.
**2.** Calculer les valeurs propres de $P$, et vérifier qu'il y a une seule valeur propre égale à 1, tandis que les autres sont de module strictement inférieur à 1.
**3.** Déterminer les vecteurs propres à gauche associés aux trois valeurs propres. Lesquels de ces trois vecteurs définissent des distributions de probabilité ?
**4.** Déterminer également les vecteurs propres à droite de $P$, et vérifier que $P = SQS^{-1}$ où : $S$ a comme colonnes les vecteurs propres à droite de $P$, $S^{-1}$ a comme lignes les vecteurs propres gauche de $P$, $Q$ est une matrice diagonale comprenant les valeurs propres de $P$. N'oubliez pas de normaliser ces vecteurs propres de manière à ce que le produit scalaire des vecteurs propres (à droite et à gauche) correspondant à chaque valeur propre soit égal à 1.
**5.** Utiliser la relation ci-dessus pour calculer $P^2$ et $P^3$.