Aix-Marseille Université
Master Mathématiques & Applications 1ère année

Processus Stochastiques
Année 2019-2020

Série 5 : Chaînes de Markov (suite)

Exercice 1 On s'intéresse, dans une population de mouches, à un allèle, qui peut être a ou A. Chaque mouche porte deux allèles (un dans chaque chromosome de la paire concernée) et donc son génotype peut être aa, aA, ou bien AA.
On part de deux individus. Ils se reproduisent, et parmi leur progéniture on choisit deux individus de sexe opposé, qui se reproduisent, et ainsi de suite.
On précise que le génotype d'un enfant est déterminé en choisissant une lettre au hasard chez chacun des deux parents (comme pour les humains).
Les paires de génotypes à la n-ième génération définissent une chaîne de Markov qui peut prendre six états :

$$AA, AA \quad AA, Aa \quad AA, aa \quad Aa, Aa \quad Aa, aa \quad aa, aa.$$

Déterminer les probabilités de transition.

Exercice 2 Soit π une loi invariante d'une chaîne de Markov. Montrer que si x mène à y et $\pi(x) > 0$, alors $\pi(y) > 0$.

Exercice 3 **Chaîne "longueur des succès"**
On considère un émetteur qui émet des signaux binaires de façon indépendante, la valeur 1 sortant avec probabilité $p \in]0, 1[$.
A tout instant n, on note X_n la longueur de la suite de 1 avant l'instant n. Ainsi, si la suite de signaux émis est

$$00110101110\ldots,$$

la suite $(X_n)_{n>0}$ correspondante est

$$00120101230\ldots$$

1. Montrer que $(X_n)_{n>0}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$. Préciser sa matrice de transition.
2. Montrer que toute mesure invariante μ est de la forme $\mu_i = \alpha p^i$, pour un $\alpha > 0$. En déduire qu'il existe une unique probabilité invariante π.

Exercice 4 **Marche asymétrique sur $\mathbb{N}$**
Une puce se déplace sur $\mathbb{N}$. Elle saute à droite avec probabilité $p \in]0, 1[$, et à gauche avec probabilité $q = 1-p$. Bien sûr, quand elle est en 0, elle saute forcément à droite, contrainte et forcée.
1. Montrer que les positions successives de la puce définissent une chaîne de Markov (X_n) dont on précisera les probabilités de transition.
2. Donner l'ensemble des mesures invariantes pour cette chaîne. On distinguera

plusieurs cas selon les valeurs de p.
3. Préciser dans quels cas il existe une mesure de probabilité invariante, et vérifier qu'elle est unique. Donner son expression.

Exercice 5 Un lac de barrage a une capacité de 3 unités de volume. Soit X_n la quantité d'eau retenue au début de la n-ième journée, $n \in \mathbb{N}$.
Chaque jour, il arrive une certaine quantité d'eau, donnée par une variable aléatoire Y dont la distribution est :

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(Y = k)$	$0,2$	$0,5$	$0,2$	$0,1$

Puis le soir le barrage se vide d'une unité de volume (lorsqu'il n'est pas déjà vide).
1. Expliquer pourquoi le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov. Donner sa matrice de transition.
2. Calculer sa distribution stationnaire.

Exercice 6 **L'urne d'Ehrenfest**
On considère 2 urnes, dans lesquelles initialement on répartit aléatoirement N boules. On note X_0 le nombre initial de boules dans l'urne 1 (il y a donc initialement $N - X_0$ boules dans l'urne 2).
A chaque instant, on choisit au hasard (uniformément) une des N boules, et on la change d'urne.
On note X_n le nombre de boules dans l'urne 1, à l'instant n.
1. Expliquer pourquoi la suite (X_n) est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition.
2. Cette chaîne est-elle irréductible ? récurrente ? périodique ? Si oui quelle est sa période ?
3. Montrer que l'unique mesure de probabilité invariante est la mesure binomiale $\mathcal{B}(N, \frac{1}{2})$.
4. Soit $P_n = \frac{X_n}{N}$ la proportion de boules qui sont dans l'urne 1. Montrer que si l'on pose $\alpha = 1 - \frac{2}{N}$, et $\beta = 1 - \frac{4}{N}$, on a

$$\mathbb{E}(P_n) = \frac{1}{2} + \big(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\big)\alpha^n,$$

$$\mathbb{V}(P_n) = \frac{1}{4N} + \big(\mathbb{V}(P_0) - \frac{1}{4N}\big)\beta^n + \big(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\big)(\beta^n - \alpha^{2n}).$$

5. Soit $T_k = \inf\{n \geq 1 : X_n = k\}$, le temps de retour en k. Montrer que
- $\mathbb{E}_0[T_0] = 2^N$
- $\mathbb{E}_{N/2}[T_{N/2}] \underset{N\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi N}{2}}$.

Comparer ces deux résultats.

Exercice 7 Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur $E = \{e_0, e_1, e_2, \cdots\}$. Soit T_j le temps de première visite de l'état e_j. Montrer que

$$p_{i,j}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} P(T_j = k) p_{j,j}^{(n-k)}.$$

Exercice 8 Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Soit (M_n) la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, c'est à dire la chaine de Markov telle que $M_0 = 0$, et avec les probabilités de transition définies par

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \begin{cases} p_{x,x+1} = p, \\ p_{x,x-1} = 1 - p, \end{cases}$$

où $p \in]0, 1[$ est fixé.

1. Montrer que la chaîne est irréductible.

2. On suppose pour l'instant $p \neq \frac{1}{2}$. Utiliser la loi des grands nombres pour montrer que (M_n) est transitoire.

Dans la suite on suppose désormais que $p = \frac{1}{2}$.

3. Calculer pour $n \geq 0$, la probabilité $P^n(0, 0) = \mathbb{P}(M_n = 0)$.

(On rappelle la formule de Stirling $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$)

4. Montrer alors que (M_n) est récurrente.

5. (M_n) est-elle récurrente positive, ou récurrente nulle ?

Exercice 9 Processus de naissance et de mort

Soit (X_n) la chaîne sur $\mathbb{N}$, partant de x et avec les probabilités de transition suivantes :

$$\forall i \geq 0, \quad P(i, i + 1) = p_i, \ P(i, i - 1) = q_i = 1 - p_i,$$

avec $q_0 = 0$, et $p_i \in]0, 1[$ pour $i \geq 1$.

1. (X_n) est-elle irréductible ? périodique ? Si oui quelle est sa période ?

On cherche à déterminer sous quelle condition elle est récurrente.

2. Soit $T_a = \inf\{n : X_n = a\}$. Déterminer l'unique fonction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \phi(0) = 0, \\ \phi(1) = 1, \\ \phi(X_{n \wedge T_0}) \text{ est une martingale.} \end{cases}$$

3. Soit $M > x$ un entier fixé, et $T = T_0 \wedge T_M$. Montrer que $\mathbb{E}_x[\phi(X_T)] = \phi(x)$

4. En déduire que $\mathbb{P}_x(T_0 > T_M) = \frac{\phi(x)}{\phi(M)}$.

5. En remarquant que sous $\mathbb{P}_x$, on a l'inégalité $T_M \geq M - x$, montrer que

$$\mathbb{P}_x(T_0 = \infty) = \lim_{M \to \infty} \frac{\phi(x)}{\phi(M)}.$$

6. Conclure que (X_n) est récurrente si et seulement si

$$\sum_{n \geq 0} \prod_{j=1}^{n} \frac{q_j}{p_j} = \infty.$$

Examiner le cas où $p_j = p$ ne dépend plus de j.

On cherche désormais à déterminer sous quelle condition (X_n) est récurrente positive.

7. Soit π la mesure définie par $\pi(k) = \pi(0)\prod_1^k \frac{p_{j-1}}{q_j}$. Vérifier que π est une mesure réversible, soit

$$\forall x, y, \ \pi(x)P(x, y) = \pi(y)P(y, x).$$

8. Rappeler pourquoi une mesure réversible est invariante
9. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que (X_n) soit récurrente positive.

Exercice 10 Processus de naissance et de mort totale

Soit (Y_n) la chaîne définie sur $\mathbb{N}$ par les probabilités de transition suivantes.

$$\forall i \geq 0, \quad P(i, i+1) = p_i, \; P(i, 0) = q_i = 1 - p_i,$$

1. (Y_n) est-elle irréductible ? périodique ? Si oui quelle est sa période ?
2. Soit $T_0 = \inf\{n : X_n = 0\}$. Montrer que $\mathbb{P}_0(T_0 \geq n) = \prod_0^{n-1} p_j$. En déduire que (Y_n) est récurrente si et seulement si

$$\prod_{n \geq 0} p_n = 0. \qquad (1)$$

3. Montrer que (1) est équivalent à $\sum_{n \geq 0}(1 - p_n) = +\infty$
4. On suppose désormais la chaîne récurrente. Montrer que toute mesure invariante est de la forme

$$\mu_i = \mu_0 \prod_{j=0}^{i-1} p_j.$$

5. En déduire une condition nécéssaire et suffisante sur les p_j pour que (Y_n) soit récurrente positive.

Exercice 11 Chaîne de Markov arrêtée

Soit (X_n) une chaîne de Markov de matrice de transition P sur un ensemble dénombrable E. Soit $A \subset E$, et $T_A = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}$.
Montrer que $\tilde{X_n} = X_{n \wedge T_A}$ est encore une chaîne de Markov. Donner sa matrice de transition.