Aix-Marseille Université — Processus Stochastiques
Master Mathématiques & Applications 1ère année — Année 2019-2020

Série 6 : Chaînes de Markov et révisions de martingales

Exercice 1

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a.r à v valeurs dans $[0,1]$. On suppose que $X_0 = a \in [0,1]$ et que :

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{X_n}{2} \,\middle|\, \mathcal{F}_n^X\right) = 1 - X_n, \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{1+X_n}{2} \,\middle|\, \mathcal{F}_n^X\right) = X_n.$$

1. Montrer que le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.
2. Montrer qu'elle converge $\mathbb{P}-p.s$ et dans $\mathbb{L}^p$ pour tout $p \geq 1$. On note Z sa limite.
3. Montrer que $\mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2] = \frac{1}{4}\mathbb{E}[X_n(1-X_n)]$.
4. En déterminant la limite du terme de gauche et du terme de droite, calculer $\mathbb{E}[Z(1-Z)]$. Quelle est la loi de Z ?

Exercice 2 Loi du 0-1 de Kolmogorov

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d.
On note $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k, k \leq n)$, $\mathcal{F}^n = \sigma(X_k, k \geq n)$ et $\mathcal{F}^\infty = \cap_{n\geq 1}\mathcal{F}^n$.
Soit $A \in \mathcal{F}^\infty$, on cherche à montrer que $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$.
1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_n] = \mathbb{P}(A)$.
2. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_n] = \mathbb{1}_A$.
3. Conclure.

Exercice 3

1. Dessiner le graphe de la chaîne de Markov sur $E = \{1,\ldots,7\}$ de matrice de transition

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \star & 0 & 0 & \star & \star & \star \\ \star & 0 & \star & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \star & \star & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \star & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \star & 0 & \star & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star \end{pmatrix}.$$

2. Donner la décomposition de E en classes d'équivalence.
3. Dire pour chaque classe si elle est fermée ou ouverte. Donner l'ensemble des états récurrents de la chaîne.

Exercice 4 Chaîne de naissance et de mort

On considère $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov homogène d'espace d'etat $E = \mathbb{N}$ et de matrice de transition $\mathbf{P}$ définie par

$$\mathbf{P}(x, x+1) = q_x, \quad \mathbf{P}(x,x) = r_x, \quad \mathbf{P}(x, x+1) = p_x,$$

avec $p_x + q_x + r_x = 1, q_0 = 0, q_x > 0$ si $x > 0$, et $p_x > 0$. Une telle chaîne est appelée chaîne de naissance et de mort. Le but est d'étudier sous quelle condition cette chaîne est récurrente. Pour $i \in E$, on pose $\tau_i = \inf\{n \geq 0 | X_n = i\}$. Etant donnés trois états a, x, et b tel que $a \leq x \leq b$, on pose $u(x) = \mathbb{P}_x(\tau_a < \tau_b)$ et $\gamma(x) = \frac{q_1 \dots q_x}{p_1 \dots p_x}$, avec $\gamma(0) = 1$.

1. Déterminer une relation entre $u(x+1) - u(x)$ et $u(x) - u(x-1)$ pour $a < x < b$. Calculer en fonction des $\gamma(y)$ pour $a \leq y < b$ la valeur de $u(a) - u(a+1)$ et en déduire que

$$u(x) = \frac{\sum_{y=x}^{b-1} \gamma(y)}{\sum_{y=a}^{b-1} \gamma(y)},$$

pour $a \leq x \leq b$. Traiter le cas particulier où $p_x = q_x$ pour tout $x > 0$.

2. Déterminer $\mathbb{P}_1(T_0 = +\infty)$ et montrer que la chaîne est récurrente si et seulement si $\sum_{y=0}^{+\infty} \gamma(y) = +\infty$.

3. Soit π la mesure définie par

$$\pi(x) = \pi(0) \prod_{j=1}^{x} \frac{p_{j-1}}{q_j}.$$

Vérifier que π est une mesure réversible pour la matrice $\mathbf{P}$

4. Rappeler pourquoi une mesure réversible est invariante

5. En déduire une condition nécéssaire et suffisante pour que (X_n) soit récurrente positive.

6. retrouver les résultats de l'exercice 5 de la feuille 5 grâce à ce qui précède.

Exercice 5 Critère de Foster

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov irréductible sur E. On suppose qu'il existe une fonction $\phi : E \to \mathbb{R}^+$, et un ensemble fini $F \subset E$, tels que

— $\mathbb{E}_x \phi(X_1) \leq \phi(x), \; x \notin F$,

— $\lim_{x \to \infty} \phi(x) = +\infty$.

On cherche à montrer que la chaîne est récurrente

1. Montrer que $Z_n = \phi(X_{n \wedge T_F})$ définit une surmartingale pour la filtration $\mathcal{F}_n^X$. Que peut-on dire lorsque $n \to \infty$?

2. Montrer que si on suppose (X_n) transitoire alors pour $x \in E$, $\mathbb{P}_x$-ps, $\lim_{n \to \infty} \phi(X_n) = +\infty$.

3. Conclure que (X_n) est récurrente.