Cours de probabilités
à Saint-Louis, Sénégal

Rhodes Rémi

Table des matières

Chapitre 1

Chaînes de Markov

Dans tout ce chapitre, E désigne un ensemble dénombrable, et donc possiblement fini. E est muni de la tribu $\mathcal{E}$ de tous ses sous-ensembles.

1.1 Généralités

Définition 1.1. *On appelle matrice de transition sur E une famille $(P(x,y))_{x,y\in E}$ de réels telle que, pour tout $x, y \in E$:*

1. $P(x,y) \geq 0$,
2. $\sum_{y\in E} P(x,y) = 1$.

Ainsi, pour tout $x \in E$, $P(x,\cdot)$ est une probabilité sur E.

Définition 1.2. *Un processus aléatoire à valeurs dans $(E,\mathcal{E})$ est un quintuplet*

$$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}, (X_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$$

où $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé, $(\mathcal{F}_n)_n$ est une filtration sur $(E,\mathcal{E})$, et X_n est une variable aléatoire $\mathcal{F}_n$-adaptée à valeurs dans $(E,\mathcal{E})$ pour tout $n \geq 0$.

Définition 1.3. *Soit μ une mesure de probabilité sur E et P une matrice de transition sur E. On appelle chaîne de Markov (homogène) de loi initiale μ et de matrice de transition P, un processus aléatoire $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}, (X_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ à valeurs dans E tel que :*

1. $\mathbb{P}(X_0 \in A) = \mu(A)$ *pour tout* $A \subset E$,

2. $\mathbb{P}(X_{n+1} \in A|\mathcal{F}_n) = P(X_n, A)$ *p.s., pour tout* $A \subset E$ *et* $n \geq 0$*.*

En particulier, la relation 2) implique que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in A|\mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} \in A|X_n).$$

D'autre part, comme l'espace E est dénombrable, la relation 2) de la définition précédente peut être remplacée par

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y|X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0) = P(x_n, y)$$

pour tout $n \geq 0$ et $y, x_0, \ldots, x_n \in E$.

Exercice 1.1. *Soit* $(U_n)_n$ *une suite de v.a. à valeurs dans un espace mesuré* $(G; \mathcal{G})$ *indépendantes et identiquement distribuées,* X_0 *une v.a. à valeurs dans* E *et* g *une application mesurable de* $E \times G$ *dans* E*. On pose, pour tout* $n \geq 0$

$$X_{n+1} = g(X_n, U_{n+1}).$$

Montrer que $(X_n)_n$ *est une chaîne de Markov de loi initiale* $\mathbb{P}_{X_0}$ *et de matrice de transition*

$$P(x, y) = \mathbb{P}(g(x, U_1) = y).$$

Théorème 1.4. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}, (X_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ *une chaîne de Markov à valeurs dans* $(E, \mathcal{E})$ *de loi initiale* μ *et de matrice de transition* P*. On a*

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \mu(x_0)P(x_0, x_1)\ldots P(x_{n-1}, x_n) \tag{1.1}$$

pour tous $n \geq 0$ *et* $x_0, \ldots, x_n \in E$*.*

Réciproquement, si un processus aléatoire $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}, (X_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ *à valeurs dans* $(E, \mathcal{E})$ *vérife* (1.1) *pour une loi de probabilité* μ *et une matrice de transition* P *alors c'est une chaîne de Markov de probabilité initiale* μ *et matrice de transition* P*.*

Preuve : On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) =& \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{\{X_0=x_0, X_1=x_1, \ldots, X_n=x_n\}}\big]\\ =& \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{\{X_0=x_0, X_1=x_1, \ldots, X_{n-1}=x_{n-1}\}}\mathbb{E}[X_n = x_n|\mathcal{F}_n]\big]\\ =& \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{\{X_0=x_0, X_1=x_1, \ldots, X_{n-1}=x_{n-1}\}}\big]P(x_{n-1}, x_n)\end{aligned}$$

et le résultat suit. $\square$

En conséquence, pour toute fonction $f : E^{n+1} \to \mathbb{R}$ positive ou bornée, on a :

$$\mathbb{E}[f(X_0, \ldots, X_n)] = \sum_{x_0,\ldots,x_n \in E} f(x_0, \ldots, x_n)\mu(x_0)P(x_0, x_1)\ldots P(x_{n-1}, x_n).$$

Dans ce qui suit, étant données deux matrices positives P, Q sur E, on note PQ la matrice produit définie par

$$PQ(x, y) = \sum_{z \in E} P(x, z)Q(z, y).$$

Si f est une fonction positive ou bornée et si P est une matrice de transition , on définit la fonction Pf par

$$Pf(x) = \sum_{y \in E} P(x, y)f(y).$$

Similairement, si ν est une mesure positive sur E et P une matrice de transition, on définit la mesure νP sur E par

$$\nu P(y) = \sum_{x \in E} \nu(x)P(x, y).$$

Une conséquence facile du théorème 1.4 est :

Corollaire 1.5. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}, (X_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ *une chaîne de Markov à valeurs dans* $(E, \mathcal{E})$ *de loi initiale* μ *et de matrice de transition* P*. Pour tout* $n \geq 0$*, la loi de* X_n *est* μP^n*, i.e pour tout* $y \in E$

$$\mathbb{P}(X_n = y) = \mu P^n(y).$$

1.2 Existence

Théorème 1.6. *Pour toute loi de probabilité* μ *et matrice de transition* P *sur* E*, il existe une chaîne de Markov*

$$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}, (X_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$$

à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ *de loi initiale* μ *et de matrice de transition* P*.*

Preuve : en exercice. Utiliser le théorème de Kolmogorov ainsi que le théorème 1.4.

1.3 Propriétés de Markov faible et forte

Dans ce qui suit, à chaque fois que l'on considèrera une chaîne de Markov $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}, (X_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$, on supposera que pour tout n, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$.

Théorème 1.7. (Propriété de Markov faible) *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}, (X_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ *une chaîne de Markov à valeurs dans* $(E, \mathcal{E})$ *de loi initiale* μ *et de matrice de transition* P*. Pour tous* $k, n \geq 0$*, pour tous* $B \subset E^k$ *et* $A \subset E^{n+1}$*, on a :*

$$\mathbb{P}\big((X_{n+1}, \ldots, X_{n+k}) \in B | (X_0, \ldots, X_n) \in A, X_n = i\big) = \mathbb{P}\big((X_1, \ldots, X_k) \in B | X_0 = i\big).$$

Preuve : D'après le théorème 1.4, pour tous éléments $y_1, \ldots, y_k, x_0, \ldots, x_n \in E$, on a

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y_1, \ldots, X_{n+k} = y_k | X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) = P(x_n, y_1)P(y_1, y_2)\ldots P(y_{k-1}, y_k).$$

Ceci se traduit par

$$\mathbb{P}\big(X_{n+1} = y_1, \ldots, X_{n+k} = y_k | X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n\big) = P(x_n, y_1)P(y_1, y_2)\ldots P(y_{k-1}, y_k).$$

Or, le théorème 1.4 donne encore

$$P(i, y_1)P(y_1, y_2)\ldots P(y_{k-1}, y_k) = \mathbb{P}\big(X_1 = y_1, \ldots, X_k = y_k | X_0 = x_n\big).$$

Le résultat suit. □

Théorème 1.8. (Propriété de Markov forte) *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}, (X_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ *une chaîne de Markov à valeurs dans* $(E, \mathcal{E})$ *de loi initiale* μ *et de matrice de transition* P*, et* τ *un temps d'arrêt. Pour tout* $k \geq 1$*,* $B \subset E^k$*, on a p.s. :*

$$\mathbb{P}\big((X_{\tau+1}, \ldots, X_{\tau+k}) \in B, \tau < +\infty | \mathcal{F}_\tau\big) = \mathbb{1}_{\{\tau<+\infty\}}\mathbb{P}\big((X_1, \ldots, X_k) \in B | X_0 = X_\tau\big).$$

Preuve : Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons

$$\mathbb{1}_{\{\tau=n\}}\mathbb{P}\big((X_{\tau+1}, \ldots, X_{\tau+k}) \in B, \tau < +\infty | \mathcal{F}_\tau\big).$$

Soit $A \in \mathcal{F}_\tau$, on a $A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$. Donc, en utilisant la propriété de Markov faible,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{\tau=n\}}\mathbb{P}\big((X_{\tau+1}, \ldots, X_{\tau+k}) \in B, \tau < +\infty | \mathcal{F}_\tau\big)\big] \\
&\qquad = \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} \mathbb{1}_{\{(X_{\tau+1}, \ldots, X_{\tau+k}) \in B\}}\big] \\
&\qquad = \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{\tau=n\}}\mathbb{P}\big((X_{n+1}, \ldots, X_{n+k}) \in B | \mathcal{F}_n\big)\big] \\
&\qquad = \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{\tau=n\}}\mathbb{P}\big((X_1, \ldots, X_k) \in B | X_0 = X_n\big)\big] \\
&\qquad = \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{\tau=n\}}\mathbb{P}\big((X_1, \ldots, X_k) \in B | X_0 = X_\tau\big)\big]
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathbb{1}_{\{\tau=n\}}\mathbb{P}\big((X_{\tau+1},\ldots,X_{\tau+k})\in B,\tau<+\infty|\mathcal{F}_\tau\big)=\mathbb{1}_{\{\tau=n\}}\mathbb{P}\big((X_1,\ldots,X_k)\in B|X_0=X_\tau\big),$$

d'où le résultat. □

1.4 Etats récurrents et transitoires

Soit $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0},(X_n)_{n\geq 0},\mathbb{P})$ une chaîne de Markov à valeurs dans $(E,\mathcal{E})$ de loi initiale μ et de matrice de transition P. Dans le cas où la loi initiale μ est donnée par δ_x (masse de Dirac au point x) on note $\mathbb{P}_x$ la loi de la chaîne $(X_n)_n$ ayant δ_x pour loi initiale.

On définit le temps d'arrêt T_x

$$T_x=\inf\{n\geq 1; X_n=x\}.$$

Définition 1.9. *L'état $x\in E$ est dit récurrent si $P_x(T_x<+\infty)=1$ et transitoire dans le cas contraire, i.e. si $P_x(T_x<+\infty)<1$.*

On définit le nombre de retours à l'état x :

$$N_x=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{1}_{\{X_n=x\}}.$$

Proposition 1.10. *1. Si x est récurrent alors*

$$\mathbb{P}_x(N_x=+\infty)=1.$$

2. Si x est transitoire alors $\mathbb{P}_x(N_x<+\infty)=1$ et

$$\forall k\geq 0,\quad \mathbb{P}_x(N_x=k)=(1-\pi_x)\pi_x^k$$

où $\pi_x=\mathbb{P}_x(T_x<+\infty)$.

Preuve : On définit par récurrence

$$T_x^k=\inf\{n>T_x^{k-1}; X_n=x\}=\inf\{n>0; X_{n+T_x^{k-1}}=x\}$$

le k-ième temps de passage au point x. On a

$$\mathbb{P}_x(N_x\geq k)=\mathbb{P}_x(T_x^k<+\infty)=\mathbb{P}_x(T_x^k<+\infty|T_x^{k-1}<+\infty)\mathbb{P}_x(T_x^{k-1}<+\infty).$$

D'après la propriété de Markov forte, on a $\mathbb{P}_x(T_x^k < +\infty | T_x^{k-1} < +\infty) = \mathbb{P}_x(T_x < +\infty)$, et donc

$$\mathbb{P}_x(N_x \geq k) = \pi_x \mathbb{P}_x(T_x^{k-1} < +\infty)$$

et par récurrence on montre

$$\mathbb{P}_x(N_x \geq k) = \pi_x^k.$$

Les 2 résultats voulus s'obtiennent à partir de cette relation. □

Corollaire 1.11. *L'état x est récurrent si et seulement si*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P^n(x,x) = +\infty.$$

Preuve : On a

$$\mathbb{E}_x(N_x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\{X_n=x\}}] = \sum_{n=1}^{+\infty} P^n(x,x).$$

D'autre part, la proposition précédente montre que :

$$x \text{ est récurrent } \iff \mathbb{E}_x(N_x) = +\infty.$$

Définition 1.12. *On dit que l'état y est accessible à partir de x (noté $x \to y$) s'il existe $n \geq 0$ tel que $P^n(x,y) > 0$. On dit que les états x et y communiquent (noté $x \leftrightarrow y$) si $x \to y$ et $y \to x$.*

La relation $x \leftrightarrow y$ est une relation d'équivalence sur les éléments de E. On peut donc partitionner E suivant les classes d'équivalence de cette relation.

Théorème 1.13. *Soit $C \subset E$ une classe d'équivalence pour la relation $\leftrightarrow$. Alors, ou bien tous les états de C sont transitoires, ou bien tous les éléments de C sont récurrents.*

Preuve : Il est clair que, ou bien tous les états de C sont récurrents ou bien il existe $x \in C$ transitoire. Soit $y \in C$. On va montrer que y est transitoire. Comme $x \leftrightarrow y$, il existe $r, n > 0$ tels que $P^n(x,y) > 0$ et $P^r(y,x) > 0$. On a alors pour $k \geq 0$

$$P^{n+k+r}(x,x) \geq P^n(x,y)P^k(y,y)P^r(y,x),$$

d'où l'on tire facilement

$$\sum_{k \geq 0} P^k(y,y) < +\infty.$$

□

Définition 1.14. *Une chaîne de Markov* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}, (X_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ *est dite irréductible si* E *est constitué d'une seule classe d'équivalence. Elle est dite récurrente irréductible si elle est irréductible et si tous les états sont récurrents.*

Proposition 1.15. *Si* E *est fini, toute chaîne de Markov* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}, (X_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ *irréductible est récurrente irréductible.*

Preuve : Comme E est fini, il y a forcément un état qui, avec probabilité non nulle, est visité une infinité de fois par la chaîne . Cet état est récurrent. □

1.5 Stationnarité, réversibilité

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}, (X_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ une chaîne de Markov à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ de loi initiale μ et de matrice de transition P.

Définition 1.16.

1. *Une chaîne de Markov est dite stationnaire si, pour tous* $k, n \in \mathbb{N}$*, la loi de* $(X_0, \ldots, X_n)$ *est égale à la loi du vecteur* $(X_k, \ldots, X_{n+k})$*.*
2. *Une chaîne de Markov est dite réversible si, pour tout entier* $T \geq 1$*, la loi du vecteur* $(X_0, \ldots, X_T)$ *est identique à la loi du vecteur retourné* $(X_T, X_{T-1}, \ldots, X_0)$*.*

Définition 1.17.

1. *On dit qu'une mesure positive* λ *sur* E *est invariante si* $\lambda = \lambda P$*.*
2. *On dit qu'une mesure positive* λ *sur* E *est réversible si, pour tous* $x, y \in E$

$$\lambda(x)P(x, y) = \lambda(y)P(y, x).$$

Proposition 1.18. *Toute mesure réversible est stationnaire.*

Proposition 1.19. *Si* λ *est une probabilité invariante, la chaîne* $(X_n)_n$ *de loi initiale* λ *est stationnaire.*

Proposition 1.20. *Si* λ *est une probabilité réversible, la chaîne* $(X_n)_n$ *de loi initiale* λ *est réversible.*

Exercice 1.2. *Prouver les trois propositions précédentes.*

1.6 Chaînes récurrentes irréductibles

Dans toute cette section, on considère une chaîne de Markov $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}, (X_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ récurrente irréductible. On va s'intéresser à l'existence de mesures invariantes, dont l'intérêt est principalement l'obtention de théorèmes ergodiques.

Théorème 1.21. *La chaîne $(X_n)_n$ admet une mesure invariante μ, unique à une constante multiplicative près. De plus, pour tout $y \in E$, on a*

$$0 < \mu(y) < +\infty.$$

Enfin, pour $x \in E$, la mesure invariante μ_x telle que $\mu_x(x) = 1$ est donnée par

$$\mu_x(y) = \mathbb{E}_x\Big[\sum_{k=0}^{T_x-1} \mathbb{I}_{\{X_k=y\}}\Big].$$

Preuve : On fixe $x \in E$. On pose

$$\mu'_x(y) = \mathbb{E}_x\Big[\sum_{k=1}^{T_x} \mathbb{I}_{\{X_k=y\}}\Big].$$

On a $\mu_x(x) = \mu'_x(x) = 1$ et

$$\mu_x(E) = \mathbb{E}_x[T_x] = \mu'_x(E).$$

De plus, pour f positive sur E,

$$\mu_x(f) = \sum_{y\in E} \mu_x(y) f(y) = \sum_{y\in E} \mathbb{E}_x\Big[\sum_{k=0}^{T_x-1} \mathbb{I}_{\{X_k=y\}} f(y)\Big] = \mathbb{E}_x\Big[\sum_{k=0}^{T_x-1} f(X_k)\Big].$$

Or, comme $X_{T_x} = x = X_0$ $\mathbb{P}_x$ p.s.,

$$\mu_x(f) = \mathbb{E}_x\Big[\sum_{k=0}^{T_x-1} f(X_k)\Big] = \mathbb{E}_x\Big[\sum_{k=1}^{T_x} f(X_k)\Big] = \mu'_x(f).$$

Donc $\mu_x = \mu'_x$.

Montrons maintenant que μ_x est invariante. On a :

$$\begin{aligned}(\mu_x P)(f) = \mu_x(Pf) &= \mathbb{E}_x\Big[\sum_{k=0}^{T_x-1} Pf(X_k)\Big] = \mathbb{E}_x\Big[\sum_{k=0}^{T_x-1} \mathbb{E}_{X_k}[f(X_1)]\Big] \\ &= \sum_{k\geq 0} \mathbb{E}_x\big[\mathbb{I}_{\{k<T_x\}} \mathbb{E}_{X_k}[f(X_1)]\big].\end{aligned}$$

Comme $\{k < T_x\} \in \mathcal{F}_k$, d'après la propriété de Markov,

$$(\mu_x P)(f) = \sum_{k\geq 0} \mathbb{E}_x\big[\mathbb{1}_{\{k<T_x\}} f(X_{k+1})\big] = \mathbb{E}_x\big[\sum_{k=1}^{T_x} f(X_k)\big] = \mu'_x(f) = \mu_x(f).$$

On a donc montré l'invariance de μ_x.

Soit μ une mesure invariante. En utilisant la relation $\mu P^n = \mu$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et l'irréductibilité, on en déduit facilement :

1) si $\exists y \in E$, $\mu(y) = 0$ alors $\forall y \in E$, $\mu(y) = 0$.

2) si $\exists y \in E$, $\mu(y) < +\infty$ alors $\forall y \in E$, $\mu(y) < +\infty$.

Ceci montre que, pour tout $y \in E$, on a

$$0 < \mu(y) < +\infty.$$

Il reste à montrer l'unicité. Soit λ une autre mesure invariante vérifiant

$$0 < \lambda(y) < +\infty$$

pour tout $y \in E$, et $\lambda(x) = 1$. On a

$$\begin{aligned}
\lambda(y) = \lambda P(y) &= P(x,y) + \sum_{z_1\neq x} \lambda(z_1) P(z_1,y)\\
&= P(x,y) + \sum_{z_1\neq x}\sum_{z_2} \lambda(z_2) P(z_1,y) P(z_2,z_1)\\
&= P(x,y) + \sum_{z_1\neq x} P(x,z_1)P(z_1,y) + \sum_{z_1\neq x}\sum_{z_2\neq x} \lambda(z_2) P(z_1,y) P(z_2,z_1)\\
&= \dots\\
&\geq \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{z_1,\dots,z_n\neq x} P(x,z_n)P(z_n,z_{n-1})\dots P(z_1,y)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}_x\big[\mathbb{1}_{\{X_{n+1}=y\}} \mathbb{1}_{n+1\leq T_x}\big]\\
&= \mathbb{E}_x\big[\sum_{n=0}^{T_x-1} \mathbb{1}_{\{X_{n+1}=y\}}\big] = \mu_x(y)
\end{aligned}$$

Ainsi $\lambda - \mu_x$ est aussi une mesure (positive) invariante qui vérifie $(\lambda - \mu_x)(x) = 0$. Vu la propriété 1) ci-dessus, $\lambda - \mu_x = 0$. □

Définition 1.22. *Soit $x \in E$. On pose $\pi(x) = \mathbb{E}_x[T_x]$. Si $\pi(x) < +\infty$, l'état x est dit récurrent positif. Sinon, il est dit récurrent nul.*

Dans la cas d'une chaîne récurrente irréductible, on est donc en présence de la dichotomie suivante :

Théorème 1.23. *1) ou bien il existe un état récurrent positif, alors tous les états sont récurrents positifs et les mesures invariantes sont de masse finie,*

2) ou bien il existe un état récurrent nul, alors tous les états sont récurrents nuls et les mesures invariantes sont de masse infinie.

1.7 Théorèmes ergodiques

Dans toute cette section, on considère une chaîne de Markov $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}, (X_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ récurrente irréductible.

Théorème 1.24. *Soit μ une mesure invariante pour la chaîne $(X_n)_n$. Soient $f, g \in L^1(\mu)$ avec $\mu(g) \neq 0$. Alors*

$$p.s., \quad \frac{\sum_{k=0}^n f(X_k)}{\sum_{k=0}^n g(X_k)} \to \frac{\mu(f)}{\mu(g)} \quad \textit{lorsque } n \to \infty.$$

Preuve : Soit $x \in E$, $f \in L^1(\mu)$ et T_x^k le k-ième temps de retour de la chaîne en x. Soit λ la loi initiale de la chaîne. On pose

$$Z_0 = \sum_{k=0}^{T_x^1 - 1} f(X_k)$$

et

$$Z_p = \sum_{k=T_x^p}^{T_x^{p+1}-1} f(X_k).$$

On a déjà vu que $\mathbb{E}_x[Z_0] = \mu(f)$ et par la propriété de Markov,

$$\mathbb{E}_\lambda[Z_p] = \mathbb{E}_\lambda[\mathbb{E}[Z_p | \mathcal{F}_{T_x^p}]] = \mathbb{E}_x[Z_0] = \mu(f).$$

Il résulte de la propriété de Markov forte que, sous $\mathbb{P}_\lambda$, les variables $Z_0, Z_1, \ldots, Z_p, \ldots$ sont indépendantes, identiquement distribuées et d'espérance $\mu(f)$. D'après la loi forte des grands nombres,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{T_x^n} f(X_k) = \frac{1}{n}(Z_0 = \cdots + Z_{n-1}) + \frac{1}{n} f(x) \to \mu(f)$$

quand $n \to \infty$ $\mathbb{P}_\lambda$ ps. A $m \in \mathbb{N}$, on associe l'unique entier $\nu(m)$ tel que $T_x^{\nu(m)} \leq m < T_x^{\nu(m)+1}$. On a $\nu(m) \to \infty$ quand $m \to \infty$ et

$$\nu(m) \leq \sum_{k=0}^{m} \mathbb{1}\{X_k = x\} < \nu(m) + \mathbb{1}\{X_0 = x\} \leq \nu(m) + 1.$$

Si on suppose $f \geq 0$ on a

$$\frac{\nu(m)}{\nu(m)+1} \frac{\sum_{k=0}^{T_x^{\nu(m)}} f(X_k)}{\nu(m)} \leq \frac{\sum_{k=0}^{m} f(X_k)}{\sum_{k=0}^{m} \mathbb{1}\{X_k = x\}} \leq \frac{\nu(m)+1}{\nu(m)} \frac{\sum_{k=0}^{T_x^{\nu(m)+1}} f(X_k)}{\nu(m)+1}.$$

En passant à la limite en $m \to \infty$, on en déduit

$$\frac{\sum_{k=0}^{m} f(X_k)}{\sum_{k=0}^{m} \mathbb{1}\{X_k = x\}} \to \mu(f)$$

quand $m \to \infty$ $\mathbb{P}_\lambda$ ps. En écrivant $f = f^+ - f^-$, on en déduit que la convergence précédente a lieu si $f \in L^1(\mu)$.

Si $f, g \in L^1(\mu)$ avec $\mu(g) \neq 0$, on a

$$\frac{\sum_{k=0}^{m} f(X_k)}{\sum_{k=0}^{m} \mathbb{1}\{X_k = x\}} \to \mu(f), \quad \frac{\sum_{k=0}^{m} g(X_k)}{\sum_{k=0}^{m} \mathbb{1}\{X_k = x\}} \to \mu(g)$$

et on en déduit le théorème en faisant le quotient. □

Si $\mu(E) < +\infty$, on peut choisir $g = 1$ dans le théorème précédent et on obient :

Corollaire 1.25. *Supposons la chaîne $(X_n)_n$ irréductible récurrente positive. Soit μ son unique probabilité invariante. Pour tout $f \in L^1(\mu)$, on a*

$$p.s., \quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f(X_k) \to \mu(f) \quad \textit{lorsque } n \to \infty.$$

Corollaire 1.26. *Supposons la chaîne $(X_n)_n$ irréductible récurrente positive. Soit μ son unique probabilité invariante. Pour tout $x \in E$, on a*

$$p.s., \quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k = x\}} \to \mu(x) \quad \textit{lorsque } n \to \infty.$$

Proposition 1.27. *Supposons la chaîne $(X_n)_n$ irréductible récurrente nulle. Pour tout $x \in E$, on a*

$$p.s., \quad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} 1\!\!1_{\{X_k=x\}} \to 0 \quad \textit{lorsque } n \to \infty.$$

Preuve : On choisit μ mesure invariante telle que $\mu(x) = 1$. Pour $F \subset E$ fini, on a (th **??**) ps

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} 1\!\!1_{\{X_k=x\}}}{n+1} \leq \frac{\sum_{k=0}^{n} 1\!\!1_{\{X_k=x\}}}{\sum_{k=0}^{n} 1\!\!1_F(X_k)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\mu(x)}{\mu(F)} = \frac{1}{\mu(F)}.$$

Donc on a ps

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} 1\!\!1_{\{X_k=x\}}}{n+1} \leq \frac{1}{\mu(F)}.$$

Il suffit donc de prendre F arbitrairement grand. □

1.8 Condition de Doeblin

Définition 1.28. *On dit qu'une probabilité de transition P vérifie la condition de Doeblin s'il existe une mesure de probabilité ν sur E et $\alpha > 0$ avec*

$$P(x, B) \geq \alpha\nu(B)$$

pour tout $B \in \mathcal{E}$ et $x \in E$.

La constante α est alors nécessairement ≤ 1. On suppose qu'elle est strictement plus petite que 1 pour éliminer le cas trivial $\nu = P$ et on pose $\beta = 1 - \alpha$. Il existe alors une matrice de transition Q telle que

$$P(x, \cdot) = \alpha\nu(\cdot) + \beta Q(x, \cdot).$$

Soit $M_b(E)$ l' espace des mesures bornées sur E et $B(E)$ l'espace des fonctions mesurables et bornées sur E. On munit l'espace $M_b(E)$ de la norme duale

$$\|\mu\| = \sup\{|\mu(f)|; f \in B(E), \|f\|_\infty \leq 1\}.$$

L'espace $M_b(E)$ est alors un espace de Banach réel et une matrice de transition définit un opérateur positif de norme 1 sur $M_b(E)$ de la manière suivante :

$$\mu \in M_b(E) \mapsto \mu P \in M_b(E).$$

Théorème 1.29. *Soit P une probabilité de transition vérifiant la condition de Doeblin pour $0 < \alpha < 1$. Il existe une unique probabilité invariante λ. De plus, pour toute mesure de probabilité μ sur E, on a :*

$$\|\mu P^n - \lambda\| \leq 2\beta^n,$$

et λ est donnée par

$$\lambda = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \beta^n \nu Q^n.$$

Preuve : Une probabilité λ est invariante si et seulement si $\lambda = \lambda P$, ce qui est encore équivalent à $\lambda = \alpha\nu + \beta\lambda Q$ ou

$$\lambda(I - \beta Q) = \alpha\nu.$$

Comme Q est un opérateur de norme 1, $(I - \beta Q)$ est inversible dand $M_b(E)$ et d'inverse

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \beta^n Q^n.$$

Ceci fournit l'existence et l'unicité de λ, ainsi que la relation

$$\lambda = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \beta^n \nu Q^n.$$

Il reste à prouver la décroissance exponentielle. Pour cela, montrons par récurrence la formule

$$P^n(x, \cdot) = \alpha\nu \sum_{k=0}^{n-1} \beta^k Q^k + \beta^n Q^n(x, \cdot) \tag{1.2}$$

Bien sûr , la formule ci-dessus est vraie pour $n = 1$. Supposons qu'elle est vraie au rang n et montrons qu'elle l'est alors au rang $n + 1$:

$$\begin{aligned}
P^{n+1}(x, z) =& PP^n(x, z) = \sum_{y \in E} P(x, y)P^n(y, z) = \sum_{y \in E} P(x, y)\Big(\alpha\nu \sum_{k=0}^{n-1} \beta^k Q^k(z) + \beta^n Q^n(y, z)\Big) \\
&= \sum_{y \in E} \big(\alpha\nu(y) + \beta Q(x, y)\big)\Big(\alpha\nu \sum_{k=0}^{n-1} \beta^k Q^k(z) + \beta^n Q^n(y, z)\Big) \\
&= \alpha^2\nu \sum_{k=0}^{n-1} \beta^k Q^k(z) + \alpha\beta\nu \sum_{k=0}^{n-1} \beta^k Q^k(z) + \alpha\beta^n \nu Q^n(z) + \beta^{n+1} Q^{n+1}(x, z) \\
&= \alpha\nu \sum_{k=0}^{n} \beta^k Q^k(z) + \beta^{n+1} Q^{n+1}(x, z).
\end{aligned}$$

Ceci prouve la formule (1.2). Donc

$$\begin{aligned}\lambda - \mu P^n =& \alpha\nu \sum_{k=n}^{+\infty} \beta^k Q^k - \beta^n \mu Q^n(x,\cdot) = \alpha\nu\beta^n \big(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta^k Q^k\big) S^n - \beta^n \mu Q^n(x,\cdot) \\ =& \beta^n(\lambda - \mu) Q^n(\cdot)\end{aligned}$$

et le résultat suit. □

Corollaire 1.30. *Soit P une probabilité de transition et $k \geq 1$ tel que P^k satisfait la condition de Doeblin. Il existe alors une unique probabilité invariante λ. De plus, il existe des constantes $C < \infty$ et $0 < \beta < 1$ telles que, pour toute mesure de probabilité μ :*

$$\|\mu P^n - \lambda\| \leq C\beta^n.$$

Preuve : en exercice. □

Exercice 1.3. *Soit $(A_n, B_n, C_n)_n$ suite de variables aléatoires toutes indépendantes entre elles et telles que :*

1. *les variables aléatoires $(A_n)_n$ prennent les valeurs 1 et 0 avec les probabilités α et $1-\alpha$ (avec $0 < \alpha < 1$),*
2. *les variables aléatoires $(B_n)_n$ sont à valeurs dans un espace F de loi μ,*
3. *les variables aléatoires $(C_n)_n$ sont à valeurs dans un espace E de loi ν.*

On se donne de plus une fonction f mesurable de $E \times F$ dans E et on considère la suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires à valeurs dans E vérifiant

$$X_{n+1} = \begin{cases} C_{n+1} & \text{si } A_{n+1} = 1 \\ f(X_n, B_{n+1}) & \text{si } A_{n+1} = 0 \end{cases}.$$

On note Q la matrice de transition de la chaîne Z définie par $Z_{n+1} = f(Z_n, B_{n+1})$. Montrer que $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov de matrice de transition

$$P = \alpha\nu + (1-\alpha)Q,$$

et en déduire que $(X_n)_n$ satisfait la condition de Doeblin.

Exercice 1.4. *Montrer que les 2 assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *il existe k tel que P^k satisfait la condition de Doeblin.*
2. *il existe k et il existe $y \in E$ tels que $\inf_{x\in E} P^k(x,y) > 0$.*

Proposition 1.31. *Si P est irréductible et apériodique et si E est fini, alors il existe k tel que P^k satisfait la condition de Doeblin.*

Preuve : utiliser l'exercice 1.4. □

Théorème 1.32. *Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov de matrice de transition P irréductible et telle que P^k satisfait la condition de Doeblin, pour un $k \geq 1$. Soit λ l'unique probabilité invariante de la chaîne et $f : E \to \mathbb{R}$ telle que*

$$\int_E f^2 \, d\lambda < +\infty, \quad \textit{et} \quad \int_E f \, d\lambda = 0.$$

Alors, quand $n \to \infty$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} f(X_k) \quad \textit{converge en loi vers } \sigma_f Z$$

où $Z \simeq N(0,1)$, $\sigma_f^2 = \mathrm{Var}_\lambda(Qf)$ et

$$Qf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P^n f(x).$$

Chapitre 2

Rappels de calcul stochastique

Ce chapitre ne constitue qu'un rappel sur les propriétés du mouvement brownien et sur les propriétés principales des Equations Différentielles Stochastiques (EDS).

2.1 Mouvement brownien

Définition 2.1. *Un processus stochastique réel* $\{B_t : t \geq 0\}$*, défini sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, est appelé* **mouvement brownien** *(standard) issu de* 0 *si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *Le processus* B *est à accroissements indépendants, c'est-à-dire que pour toute famille finie d'instants* $0 < t_1 < \cdots < t_n$*, les variables aléatoires* $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ *sont indépendantes.*
2. *Pour chaque* t *la v.a.r* B_t *suit la loi* $\mathcal{N}(0, t)$*.*
3. *Pour presque tout* $\omega \in \Omega$*, les trajectoires* $t \to B_t(\omega)$ *sont continues .*

De manière équivalente, on peut définir un mouvement brownien de la façon suivante :

Proposition 2.2. *Un processus* $\{B_t : t \geq 0\}$*, dont les trajectoires sont p.s. continues, est un mouvement brownien (issu de* 0*) ssi c'est un processus gaussien centré de covariance* $\inf(s, t)$*. De plus les accroissements* $B_t - B_s, s < t$*, d'un mouvement brownien suivent la loi* $\mathcal{N}(0, t - s)$*.*

Proposition 2.3. *Si* $\{B_t : t \geq 0\}$ *est un mouvement brownien alors :*

1. *les accroisseements de B sont stationnaires, c'est-à-dire que pour toute famille finie d'instants $0 < t_1 < \cdots < t_n$ et pour tout $s > 0$, les vecteurs aléatoires*

$$(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) \text{ et } (B_{t_1+s} - B_s, B_{t_2+s} - B_{t_1+s}, \ldots, B_{t_n+s} - B_{t_{n-1}+s})$$

ont même loi.

2. *Pour tout $0 < s < t$, la v.a. $B_t - B_s$ suit une loi normale $N(0, t-s)$.*

Définition 2.4. *Soit $B = \{B_t; t \geq 0\}$ un processus stochastique d dimensionel. On dit que B est un mouvement brownien si ses composantes $B^1, \ldots, B^d$ sont des mouvements browniens indépendants.*

Exercice 2.1. *Prouver les 2 propositions précédentes.*

Exercice 2.2. *Montrer que les processus suivants sont des $(\mathcal{F}_t)$-martingales :*

$$(B_t)_{t\geq 0}, \quad (B_t^2 - t)_{t\geq 0}, \quad \Big(\exp\big(\lambda B_t - \lambda^2 t/2\big) \Big)_{t\geq 0}$$

où λ est un réel quelconque.

Exercice 2.3. *Si $\{B_t : t \geq 0\}$ est un mouvement brownien et $0 < t_1 < \cdots < t_n$, montrer que le vecteur $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$ admet pour densité*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{t_1(t_2 - t_1) \cdots (t_n - t_{n-1})}} \times e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{t_1} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} + \cdots + \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{t_n - t_{n-1}}\right)}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2.4. *Dans cet exercice, $B = (B_t)_{t\geq 0}$ désigne un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$. Soit U une matrice carrée réelle de taille $d \times d$ orthogonale (i.e. $U^t U = I_d$). Montrer que $W_t = UB_t$ définit un mouvement brownien.*

Exercice 2.5. *Montrer le résultat suivant (loi des grands nombres pour un mouvement brownien standard) :*

$$p.s., \quad \lim_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = 0.$$

Exercice 2.6. *Soit $A = \{\limsup_n \frac{B_n}{\sqrt{n}} \geq x\}$, où $x > 0$ est fixé.*

1. *Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, l'événement A est indépendant de $\mathcal{F}_m$. En déduire que $\mathbb{P}(A)$ vaut 0 ou 1.*

2. *Montrer que $\mathbb{P}(A) = 1$. En déduire que*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty \text{ et } \liminf_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty, \quad \mathbb{P}\text{ p.s..}$$

2.2 Propriété de Markov forte

Soit $\{B_t : t \geq 0\}$ est un mouvement brownien et $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle complétée, c'est-à-dire

$$\forall t \geq 0, \quad \mathcal{F}_t^B = \sigma(X_s; 0 \leq s \leq t) \vee \sigma(\mathcal{N})$$

où $\mathcal{N}$ désigne l'ensemble des sous-ensembles négligeables de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. C'est la plus petite filtration complète qui rende B adapté.

Définition 2.5. *Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration. Un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une variable aléatoire $\tau : \Omega \to [0, +\infty]$ telle que pour tout $t \geq 0$*

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Si τ est p.s. fini, on définit la tribu

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}; \forall t \geq 0,\ A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

Exercice 2.7. *Si ς et τ sont deux $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ temps d'arrêt p.s. finis tels que $\varsigma \leq \tau$, montrer que l'on a :*

$$\mathcal{F}_\varsigma \subset \mathcal{F}_\tau.$$

Théorème 2.6. (Propriété de Markov forte) *Si τ est un temps d'arrêt p.s. fini alors le processus*

$$\{B_{t+\tau} - B_\tau; t \geq 0\}$$

est un mouvement brownien indépendant de la tribu $\mathcal{F}_\tau^B$.

Exercice 2.8. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note $T_a = \inf\{t > 0; B_t = a\}$ le premier temps d'atteinte de a par le mouvement brownien B, avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$.*

1. *Montrer que $T_a < \infty$ presque sûrement.*
2. *Soit $a > 0$. En appliquant soigneusement le théorême d'arrêt de Doob, montrer que la transformée de Laplace de T_a est donnée par :*

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathbb{E}\left[e^{-\lambda T_a}\right] = e^{-a\sqrt{2\lambda}}.$$

3. *En calculant la transformée de Laplace de la loi sur $\mathbb{R}_+^*$ de densité $f(x) = \frac{a}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{-a^2/(2x)} \mathbb{1}_{\{x>0\}}$, montrer que T_a admet f pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Quelle est la densité de T_a si $a < 0$?*

Exercice 2.9. *Soit a un réel strictement positif fixé.*

1. *Pour tout $t \geq 0$, on note $M_t = \sup_{0 \leq s \leq t} B_s$. En utilisant la propriété de Markov forte du mouvement brownien, montrer que pour tout $t \geq 0$,*

$$\mathbb{P}(M_t \geq a) \; = \; \mathbb{P}(T_a \leq t) \; = \; 2\mathbb{P}(B_t \geq a) \; = \; \mathbb{P}(|B_t| \geq a)$$

2. *La propriété précédente est appelée « principe de réflexion ». Justifier ce nom.*
3. *En utilisant le principe de réflexion, déterminer la densité de T_a.*
4. *Les processus $M = (M_t)_{t \geq 0}$ et $|B| = (|B_t|)_{t \geq 0}$ ont-ils même loi ?*
5. *Montrer que T_a a même loi que $\left(\frac{a}{M_1}\right)^2$ et que $\left(\frac{a}{B_1}\right)^2$. Retrouver une nouvelle fois la densité de T_a.*

2.3 L'intégrale stochastique d'Itô

On suppose à partir de maintenant que l'on dispose d'un espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{F}; \mathrm{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$, sur lequel est défini un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien $\{B_t, t \geq 0\}$. On suppose de plus que $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensembles de P-mesure nulle. Définissons alors une première classe d'intégrands.

Définition 2.7. *Un processus stochastique $\varphi_t(\omega)$ défini sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ (resp sur $[0,T] \times \Omega$) est dit progressivement mesurable si $\forall t \in \mathbb{R}_+$ (resp $t \in [0,T]$) l'application :*

$$(s, \omega) \mapsto \varphi_s(\omega)$$

de $[0,t] \times \Omega$ dans $\mathbb{R}$ est $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ mesurable.

On notera par la suite $\Lambda^2(\mathbb{R}_+)$ (resp. $\Lambda^2([0,T])$) le sous-espace de $L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathbb{P} \otimes \, dt\,)$ (resp. $L^2(\Omega \times [0,T], \mathbb{P} \otimes dt)$) constitué des classes de processus progressivement mesurables. Muni du produit scalaire

$$(\varphi, \psi) = \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}_+} \varphi_t \psi_t \, dt\right] \qquad (\text{resp } = \mathbb{E}\left[\int_0^T \varphi_t \psi_t \, dt\right]),$$

c'est un espace de Hilbert. Pour finir, on définit

$$\Lambda^2 = \bigcap_{T>0} \Lambda^2([0,T]).$$

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des classes de processus de la forme :

$$\varphi_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} X_i(\omega)\mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t) \ , t \geq 0$$

avec $n \in \mathbb{N}$, $0 < t_1 < \ldots, < t_n$. pour $0 \leq i \leq n-1$, X_i est une v.a. $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable et de carré intégrable. Alors φ est progressivement mesurable.

Soit $\varphi \in \mathcal{E}$. On définit le processus stochastique

$$\begin{aligned} B(\varphi)_t &= \int_0^t \varphi_s \, dB_s \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} X_i(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i}). \ , t \geq 0 \end{aligned}$$

Théorème 2.8. (Construction de l'intégrale d'Itô) *Pour tout $\varphi \in \Lambda^2$, il existe une suite $(\varphi_n)_n \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $t > 0$*

$$\varphi_n \mathbb{1}_{[0,t]} \to \varphi \mathbb{1}_{[0,t]}$$

dans $\Lambda^2([0,T])$. La limite

$$B(\varphi)_t = \lim_{n\to\infty} B(\varphi_n \mathbb{1}_{[0,t]})$$

existe dans l'espace $L^2(\Omega)$ et ne dépend pas de la suite $(\varphi_n)_n \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$ choisie. Le processus ainsi défini

$$B(\varphi)_t = \int_0^t \varphi_s \, dB_s \ , t \geq 0$$

admet une version continue (et l'on ne considèrera que cette version-là par la suite), et vérifie

$$\mathbb{E}(B(\varphi)_t) = 0 \quad \textit{et} \quad \mathbb{E}\left[B(\varphi)_t^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \varphi_s^2 \, ds\right], \ \forall t \geq 0.$$

Plus généralement, si $0 < s < t$ et $\varphi, \psi \in \Lambda^2$ alors

$$\mathbb{E}\left[\big(B(\varphi)_t - B(\varphi)_s\big)\big(B(\psi)_t - B(\psi)_s\big)|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^t \varphi_r\psi_r \, dr|\mathcal{F}_s\right].$$

Si de plus $\varphi \in \Lambda^2(\mathbb{R}_+)$, alors

$$B(\varphi)_t \to B(\varphi)_\infty = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi_s \, dBs$$

$\mathbb{P}$ p.s. et dans $L^2(\Omega)$ lorsque $t \to \infty$.

2.4 La formule d'Itô

Considérons tout d'abord $x \in C^1(\mathbb{R}_+)$, et $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$. Alors la formule de dérivation des fonctions composées donne

$$\Phi(x(t)) = \Phi(x(0)) + \int_0^t \Phi'(x(s))\, dx(s).$$

Notre objectif dans cette section va être d'obtenir une formule analogue si l'on remplace x par un mouvement brownien, ou plus généralement des processus d'Itô.

Théorème 2.9. Première formule d'Itô *Soit* $\Phi \in C^2(\mathbb{R})$. *Alors*

$$\Phi(B_t) = \Phi(0) + \int_0^t \Phi'(s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \Phi''(B_s)\, ds.$$

Nous généralisons maintenant la formule d'Itô ci-dessus en remplaçant le mouvement brownien par une classe plus générale de processus.

Définition 2.10. *Un processus* $\{X_t; t \geq 0\}$ *est appelé* **processus d'Itô** *s'il est de la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \psi_s\, ds + \int_0^t \varphi_s\, dB_s \tag{2.1}$$

où X_0 *est une variable aléatoire* $\mathcal{F}_0$*-mesurable,* ψ *et* φ *sont des processus progressivement mesurables qui vérifient*

$$\forall t \geq 0, \mathbb{P}\text{ p.s.}, \quad \int_0^t |\psi_s|\, ds < \infty \quad \text{et} \quad \varphi \in \Lambda^2.$$

Il en résulte qu'un processus d'Itô est presque sûrement continu et progressivement mesurable.

Théorème 2.11. Deuxième formule d'Itô *Soit* $\{X_t; t \geq 0\}$ *un processus d'Itô de la forme* (2.1) *et* $\Phi \in C^2(\mathbb{R})$. *Alors* $\mathbb{P}$ *p.s., pour tout* $t \geq 0$ *:*

$$\Phi(X_t) = \Phi(X_0) + \int_0^t \Phi'(X_s)\psi_s\, ds + \int \Phi'(X_s)\varphi_s\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \Phi''(X_s)\varphi_s^2\, ds, t \geq 0.$$

L'expression ci-dessus peut être réécrite sous la forme plus concise suivante :

$$d\Phi(X_t) = \Phi'(X_t)\, dX_t + \frac{1}{2}\Phi''(X_t)\varphi_t^2\, dt.$$

Théorème 2.12. (Formule d'Iô avec dépendance en t**)** *Soit* $\{X_t; t \geq 0\}$ *un processus d'Itô et* $\Phi \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. *Alors* $\mathbb{P}$ *p.s.*

$$\begin{aligned}\Phi(t, X_t) &= \Phi(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s, X_s)\, ds + \int_0^t \frac{\partial \Phi}{\partial x}(s, X_s)\psi_s\, ds + \int_0^t \frac{\partial \Phi}{\partial x}(s, X_s)\varphi_s\, dB_s \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(s, X_s)\varphi_s^2\, ds.\end{aligned}$$

Exercice 2.10. Le processus d'Ornstein-Ulhenbeck

On considère le processus X *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *solution de l'EDS linéaire à coefficients constants :*

$$dX_t = -\alpha X_t\, dt + \beta dB_t, X_0 = \xi \tag{2.2}$$

où α *et* β *sont des constantes,* B *est un* $\mathcal{F}_t$*-mouvement brownien et* ξ *est une variable* $\mathcal{F}_0$*-mesurable. On suppose que* $\alpha > 0$.

1) Montrer que la solution de (2.2) est donnée par

$$X_t = e^{-t\alpha}\xi + \int_0^t e^{-(t-s)\alpha}\beta\, dB_s, t \geq 0$$

2) En déduire que si ξ *est une variable gaussienne, alors* X *est un processus gaussien d'espérance et de fonction de covariance données par*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_t] &= e^{-t\alpha}\mathbb{E}[\xi] \\ \mathrm{Cov}(X_s, X_t) &= e^{-\alpha(t+s)}\mathrm{Var}(\xi) + \beta^2 \textstyle\int_0^{t\wedge s} e^{-\alpha(t+s-2u)}\, du\end{aligned}$$

3) Si $\mathbb{E}[\xi] = 0$ *et* $\mathrm{Var} = \frac{\beta^2}{2\alpha}$ *alors le processus* X *est centré et de covariance stationnaire, ie*

$$\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \frac{\beta^2}{2\alpha}e^{-\alpha|t-s|}, \forall s, t \geq 0.$$

En particulier, $\forall t \in \mathbb{R}_+, X_t \sim \mathcal{N}(0, \beta^2/2\alpha)$.

4) Si ξ *est une variable gaussienne, alors quand* $t \to \infty$, *l'espérance et la fonction de covariance du processus* $\{X_{t+\delta}; \delta \geq 0\}$ *tendent vers celle du cas stationnaire :*

$$\mathbb{E}[X_t] \to 0, \;\; \mathrm{Cov}(X_s, X_t) \to \frac{\beta^2}{2\alpha}e^{-\delta\alpha}.$$

Exercice 2.11. Mouvement brownien avec dérive :

Soit B un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien, et $X_t = B_t + \mu t$, où $\mu \in \mathbb{R}$. Pour $a > 0$, on définit $T = \inf\{t \geq 0; X_t \geq a\}$.

1) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le processus

$$Z_t = e^{\lambda X_t - \left(\frac{\lambda^2}{2} + \mu\lambda\right)t}$$

est une martingale.

2) Montrer que $\mathbb{E}\left[Z_{t\wedge T}\right] = 1$ pour tout $t \geq 0$. En déduire que si $\lambda > (-2\mu)^+$,

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{T<\infty\}} e^{-\left(\frac{\lambda^2}{2} + \mu\lambda\right)T}\right] = e^{-\lambda a}.$$

3) Montrer que

$$\mathrm{P}\left(T < \infty\right) = 1 \wedge e^{2\mu a}.$$

2.5 Extension aux dimensions supérieures

Soit $\{B_t, t \geq 0\}$ un mouvement brownien de dimension k et $\{\varphi_t, t \geq 0\}$ un processus à valeurs dans l'ensemble des matrices $d \times k$. Supposons que pour tous $1 \leq i \leq d$ et $1 \leq j \leq k$, on a $\varphi^{ij} \in \Lambda^2$. On peut alors définir

$$B(\varphi)^i_t = \sum_{j=1}^{k} \int_0^t \varphi^{ij}_s \, dB^j_s, 1 \leq i \leq d, t \geq 0,$$

et $B(\varphi)_t$ est alors le vecteur d-dimensionnel dont les composantes sont égales à $B(\varphi)^i_t$. Nous avons alors

Proposition 2.13. *Soit $\varphi, \psi \in (\Lambda^2)^{d\times k}$. Alors $\forall s, 0 \leq s < t$,*

i) $B(\varphi)_t = \int_0^t \varphi_s \, dB_s$ est une L^2-martingale continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{F}_t$-adaptée.

ii) $\mathbb{E}\left[(B(\varphi)_t - B(\varphi)_s)(B(\psi)_t - B(\psi)_s)^* | \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^t \varphi_r \psi_r^* \, dr | \mathcal{F}_s\right]$

iii) $\mathbb{E}\left[\langle B(\varphi)_t - B(\varphi)_t, B(\psi)_t - B(\psi)_s\rangle \, | \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^t Tr(\varphi_r \psi_r^*) \, dr | \mathcal{F}_s\right]$

On va maintenant généraliser la formule d'Itô au cas vectoriel.

Définition 2.14. *Un processus stochastique $\{X_t; t \geq 0\}$ est un processus d'Itô d-dimensionnel s'il est de la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \psi_s \, ds + \int_0^t \varphi_s \, dB_s, \tag{2.3}$$

où X_0 est un vecteur aléatoire d-dimensionnel $\mathcal{F}_0$-mesurable, ψ est un processus d-dimensionnel progressivement mesurable satisfaisant

$$\forall t \geq 0, \ \mathbb{P} \ p.s., \quad \int_0^t |\psi_s| \, ds < \infty,$$

et $\varphi \in \Lambda^2$ est un processus progressivement mesurable à valeurs dans les matrices $d \times k$.

On notera $C_b^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions continues qui sont une fois continûment différentiable par rapport à la première variable et qui le sont deux fois par rapport à la deuxième variable, possédant des dérivées bornées.

Théorème 2.15. (Formule d'Itô vectorielle) *Soit $\{X_t; t \geq 0\}$ un processus d'Itô d-dimensionnel de la forme (2.3), et $\Phi \in C_b^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$. Alors $\mathbb{P}$ p.s.*

$$\begin{aligned} \Phi(t, X_t) &= \Phi(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s, X_s) \, ds + \int_0^t \langle \nabla_x \Phi(s, X_s), \psi_s \rangle \, ds \\ &\quad + \int_0^t \langle \nabla_x \Phi(s, X_s), \varphi_s \, dB_s \rangle + \frac{1}{2} \int_0^t Tr[\partial^2_{xx} \Phi(s, X_s) \varphi_s \varphi_s^*] \, ds. \end{aligned}$$

2.6 Les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy

On s'intéresse maintenant au contrôle des intégrales stochastiques à l'aide des variations quadratiques.

Théorème 2.16. *Soit $\{B_t, t \geq 0\}$ un mouvement brownien d-dimensionnel. Pour chaque $p > 0$ et $T > 0$, il existe une constante $c_p \geq 1$ telle que $\forall \varphi \in \Lambda^2$*

$$\frac{1}{c_p} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |\varphi_t|^2 \, dt \right)^{p/2} \right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{t \leq T} \left| \int_0^t \varphi_s \, dB_s \right|^p \right] \leq c_p \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |\varphi_t|^2 \, dt \right)^{p/2} \right].$$

Corollaire 2.17. *Soit $\varphi \in \Lambda^2$ tel que $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty |\varphi_t|^2 \, dt \right)^{1/2} \right] < \infty$. Alors le processus $\left\{ \int_0^t \varphi_s \, dB_s, t \geq 0 \right\}$ est une martingale uniformément intégrable.*

2.7 Théorème de représentation des martingales

Nous avons vu que le mouvement brownien ainsi que les intégrales stochastiques d'éléments de Λ^2 sont des martingales adaptées à la filtration brownienne. Dans cette section, nous nous intéressons à la question : la réciproque est-elle vraie ?

Théorème 2.18. (Théorème de représentation des martingales de Paul Lévy) *Soit* $\{M_t, t \geq 0\}$ *une martingale continue d-dimensionnelle telle que* $M_0 = 0$ $\mathbb{P}$ *p.s. et* $\{M_t M_t^* - t\mathrm{I}; t \geq 0\}$ *est une martingale à valeurs dans les matrices* $d \times d$*. Alors* $\{M_t, t \geq 0\}$ *est un* $\mathcal{F}_t$*-mouvement brownien.*

Nous supposerons maintenant que $\{B_t, t \geq 0\}$ est un mouvement brownien d-dimensionnel et que la filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ est la filtration naturelle de $\{B_t, t \geq 0\}$ ie $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$ (aux ensembles de $\mathbb{P}$ mesure nulle près).

Théorème 2.19. *Soit* $\{M_t, t \geq 0\}$ *une martingale telle que* $M_0 = 0$ $\mathbb{P}$ *p.s. et*

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbb{E}\left[|M_t|^2\right] < \infty.$$

Alors il existe un unique $\varphi \in \Lambda^2$ *tel que*

$$\mathbb{P}\ p.s., \forall t \geq 0, \quad M_t = \int_0^t \varphi_s \, dB_s.$$

Preuve : L'unicité de φ résulte du fait que si φ, φ' satisfont le théorème alors

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |\varphi_t - \varphi'_t|^2 \, dt\right] = 0, T > 0.$$

Pour prouver l'existence de φ il suffit de montrer que pour tout $T > 0$, il existe $\varphi \in \Lambda^2([0, T])$ tel que

$$M_T = \int_0^T \varphi_s \, dB_s.$$

Ceci résulte du fait que l'ensemble

$$\mathcal{H} = \left\{c + \int_0^T \varphi_t \, dB_t; c \in \mathbb{R}, \varphi \in \Lambda^2([0, T])\right\}$$

coïncide avec $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$. Il est facile de voir que $\mathcal{H} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$. Il suffit alors de montrer que $\mathcal{H}$ est à la fois dense et fermé dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$.

a) $\mathcal{H}$ est fermé : Soit $\{c_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ et $\{\varphi^n, n \in \mathbb{N}\} \subset \Lambda^2([0,T])$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\xi_n = c_n + \int_0^T \varphi_s^n \, dB_s.$$

On suppose que $\xi_n \to \xi$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$. Alors $\mathbb{E}[\xi_n] \to \mathbb{E}[\xi]$ et ainsi $c_n \to c$. D'autre part :

$$Var(\xi_n - \xi_m) = \mathbb{E}\left[\int_0^T |\varphi_s^n - \varphi_s^m|^2 \, ds\right] \to 0,$$

lorsque $m, n \to \infty$. Ainsi la suite $\{\varphi^n, n \in \mathbb{N}\}$ est une suite de Cauchy dans $\Lambda^2([0,T])$ et il existe $\varphi \in \Lambda^2([0,T])$ tel que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |\varphi_s^n - \varphi_s|^2 \, ds\right] \to 0.$$

Par suite

$$\xi = c + \int_0^T \langle \varphi_t, dB_t \rangle .$$

b) $\mathcal{H}$ est dense dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$: Soit $\varphi \in L^2([0,T], \mathbb{R}^d)$, on pose

$$X_t = \int_0^t \varphi_s \, dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t |\varphi_s|^2 \, ds,$$

$$\varepsilon_t = \exp(X_t).$$

En appliquant la formule d'Itô au processus X_t et à la fonction $\Phi(x) = \exp(x)$ on obtient

$$\begin{aligned} \varepsilon_T &= 1 + \int_0^T \exp(X_s)\big(-\frac{1}{2}|\varphi_s|^2\big) \, ds + \int_0^T \exp(X_s)\varphi_s \, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^T Tr(\varphi_s \varphi_s^*) \exp(X_s) \, ds \\ &= 1 + \int_0^T \exp(X_s)\varphi_s \, dB_s. \end{aligned}$$

De plus on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int_0^T |\varepsilon_t \varphi_t|^2 \, dt\right] &= \int_0^T |\varphi_t|^2 \mathbb{E}\left[|\varepsilon_t|^2\right] \, dt \\ &= \int_0^T |\varphi_t|^2 \exp\left(\int_0^t |\varphi_s|^2 \, ds\right) \, dt \\ &< +\infty \text{ car } \varphi \in L^2([0,T], \mathbb{R}^d) \end{aligned}$$

et donc $\varepsilon_T \in \mathcal{H}$.

Pour $\varphi \in L^2([0,T];\mathbb{R}^d)$, nous notons maintenant $\varepsilon(\varphi)_T$ la fonction ε_T définie précédemment pour rendre explicite la dépendance par rapport à la fonction φ choisie. Nous allons montrer que pour $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$,

$$\mathbb{E}\left[Z\varepsilon(\varphi)_T\right] = 0\,,\ \forall\varphi \in L^2([0,T],\mathbb{R}^d) \Rightarrow Z = 0.$$

Ceci terminera la preuve. Or

$$\mathbb{E}\left[Z\varepsilon(\varphi)_T\right] = c_\rho \mathbb{E}\left[Z \exp\left(\int_0^T \varphi_s\, dB_s\right)\right].$$

En choisissant $\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{]t_{i-1};t_i]}(t)$ où $\forall i, \lambda_i \in \mathbb{R}^d$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leq T$, nous avons :

$$\mathbb{E}\left[Z \exp\left(\langle\lambda_1, B_{t_1}\rangle + \langle\lambda_2, B_{t_2} - B_{t_1}\rangle + \cdots + \left\langle\lambda_n, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}\right\rangle\right)\right] = 0,$$

et quitte à changer les notations, on a $\forall \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}^d$, $\forall 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq T$,

$$\mathbb{E}\left[Z \exp\left(i\left\langle\mu_1, B_{t_1}\right\rangle + i\left\langle\mu_2, B_{t_2}\right\rangle + \cdots + i\left\langle\mu_n, B_{t_n}\right\rangle\right)\right] = 0.$$

Pour simplifier les notations, posons $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} B_{t_1} \\ \vdots \\ B_{t_n} \end{pmatrix}$.

Nous avons $\mathbb{E}\left[Ze^{i<\mu,Y>}\right] = 0, \forall\mu \in (\mathbb{R}^d)^n$. Nous allons montrer que $\mathbb{E}\left[Z|Y\right] = 0$. Il suffit pour cela de montrer que pour toute fonction $f \in C_0((\mathbb{R}^d)^n)$, $\mathbb{E}\left[f(Y)Z\right] = 0$ et, par densité, il suffit de le montrer pour les fonctions f étant des transformées de Fourier de fonctions de $L^1((\mathbb{R}^d)^n)$. Soit donc

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^{dn}} e^{i<x,t>} g(t)\, dt$$

on a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[f(Y)Z\right] &= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^{dn}} Ze^{i<Y,t>} g(t)\, dt\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^{dn}} g(t)\mathbb{E}\left[Ze^{i<Y,t>}\right]\, dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall 0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq T$

$$\mathbb{E}\left[Z | B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}\right] = 0.$$

Le résultat suit. □

Corollaire 2.20. *Soit $T > 0$ et $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$. Alors il existe un unique $\varphi \in \Lambda^2([0,T])$ tel que*

$$\xi = \mathbb{E}\left[\xi\right] + \int_0^T \varphi_s \, dB_s.$$

Exercice 2.12. *Soit $T > 0$ et $\xi \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ où $p > 1$. Montrer qu' il existe un unique φ tel que*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |\varphi_t|^2 \, dt\right)^{p/2}\right] < +\infty, \quad \text{et} \quad \xi = \mathbb{E}\left[\xi\right] + \int_0^T \varphi_s \, dB_s.$$

Chapitre 3

Equations différentielles stochastiques

3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'étudier les équations différentielles stochastiques de la forme :

$$X_t = x + \int_0^t f(s, X_s)\, ds + \int_0^t g(s, X_s)\, dB_s \tag{3.1}$$

où $\{B_t; t \geq 0\}$ est un mouvement brownien k-dimensionnel. Le coefficient $f(t, X_t)$ de dt est appelé *dérive* et le coefficient $g(t, X_t)$ de dB_t est appelé *terme de diffusion*.

Nous appellerons solution sur $[0, T]$ tout processus d-dimensionnel $\{X_t; t \geq 0\} \in \Lambda^2([0, T])$ qui satisfait

$$\mathbb{P} \text{ p.s.,} \quad \int_0^T |f(s, X_s)|\, ds < \infty \quad \text{et} \quad \int_0^t \mathbb{E}[|g(s, X_s)|^2]\, ds < +\infty$$

ainsi que l'équation (3.1) $\mathbb{P}$ p.s.

Remarque 3.1. *Il est important de noter que, généralement, on utilise une définition plus faible de solution en imposant seulement sur g*

$$\mathbb{P} \text{ p.s.,} \quad \int_0^T |g(s, X_s)|^2\, ds < +\infty.$$

Toutefois, la définition donnée ci-dessus sera suffisante pour ce cours.

Les fonctions f, g sont supposées vérifier les conditions de Lipschitz suivantes (ces hypothèses ne sont pas minimales). Il existe deux constantes M, K telles que $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$

$$|f(t,x)| + |g(t,x)| \leq M(1+|x|) \tag{3.2}$$

$$|f(t,x) - f(t,y)| + |g(t,x) - g(t,y)| \leq K|x-y|. \tag{3.3}$$

3.2 Estimations préliminaires

Lemme 3.2. (Lemme de Gronwall) *Soit f une application localement intégrable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, a et b deux applications croissantes et non négatives telles que $\forall 0 \leq t \leq T$*

$$f(t) \leq a(t) + b(t) \int_0^t f(s)\, ds.$$

Alors on a $\forall t \in [0; T]$,

$$f(t) \leq a(t) e^{b(t)t}.$$

Proposition 3.3. *Supposons que le couple de fonctions (f, g) vérifie la condition (3.2), que $U \in \Lambda^2([0,T])$ et que le processus X vérifie*

$$X_t = U_0 + \int_0^t f(s, U_s)\, ds + \int_0^t g(s, U_s)\, dB_s.$$

Alors $X \in \Lambda^2([0,T])$ il existe une constante $C = C(T, M)$ telle que pour $0 \leq t \leq T$ on ait

$$\mathbb{E}\big[\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^2\big] \leq C(1 + \mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} |U_t|^2]).$$

Preuve : Appliquons la formule d'Itô au processus X et à la fonction $\Phi(x) = |x|^2$, puis en utilisant l'inégalité $ab \leq a^2/2 + b^2/2$, on a :

$$\begin{aligned}
|X_s|^2 &= |U_0|^2 + 2\int_0^s \langle X_u, f(u, U_u)\rangle\, du + 2\int_0^s \langle X_u, g(u, U_u)\, dB_u\rangle + \int_0^s Tr(gg^*)(u, U_u)\, du \\
&\leq |U_0|^2 + 2M\int_0^s |X_u|(1+|U_u|)\, du + 2\sup_{t\in[0,s]} \Big|\int_0^t \langle X_u, g(u, U_u)\, dB_u\rangle\Big| + M^2 \int_0^s (1+|U_u|)^2\, du \\
&\leq (1 + MT + 2M^2T) \sup_{t\in[0,T]} |U_t|^2 + (M + 2M^2)T + (2M)T \sup_{t\in[0,s]} |X_t|^2 \\
&\quad + 2\sup_{t\in[0,s]} \Big|\int_0^t \langle X_u, g(u, U_u)\, dB_u\rangle\Big|
\end{aligned}$$

En prenant l'espérance et en utilisant les inégalités de Burkholder-Davies-Gundy, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,s]}\Big|\int_0^t \langle X_u, g(u,U_u)\,dB_u\rangle\Big|\Big] \\
&\le C\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^s |X_u|^2|g(u,U_u)|^2\,du\Big)^{1/2}\Big] \\
&\le CM\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^s |X_u|^2(1+|U_u|)^2\,du\Big)^{1/2}\Big] \\
&\le CM\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^s |X_u|^2(2+2|U_u|^2)\,du\Big)^{1/2}\Big] \\
&\le CM\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^s 2|X_u|^4+1+|U_u|^4\,du\Big)^{1/2}\Big] \\
&\le CM\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^s 2|X_u|^4\,du\Big)^{1/2}\Big]+CMT^{1/2}+CM\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^s |U_u|^4\,du\Big)^{1/2}\Big] \\
&\le CMT^{1/2}+C(2T)^{1/2}\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,s]}|X_u|^2\Big]+C(2T)^{1/2}\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,s]}|U_u|^2\Big],
\end{aligned}$$

où la constante C est celle provenant des inégalités BDG. En rassemblant les inégalités précédentes, on en déduit l'existence d'une constante C (dépendant de M et T) telle que

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{[0,t]}|X_u|^2\Big]\le C+C\mathbb{E}\Big[\sup_{[0,t]}|X_u|^2\Big]+C\mathbb{E}\Big[\sup_{[0,T]}|U_u|^2\Big].$$

Le lemme de Gronwall permet de conclure. □

3.3 Existence et unicité de la solution

On définit l'espace S_T des processus progressivement mesurables X sur $[0,T]$ vérifiant

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{[0,T]}|X_t|^2\Big]<+\infty.$$

Théorème 3.4. *Sous les hypothèses 3.2 et 3.3, pour toute condition initiale $\mathcal{F}_0$-mesurable $X_0\in L^2(\Omega)$, il existe une unique solution $\{X_t; t\ge 0\}\in S_T$ de l'EDS (3.1).*

Preuve :

1) Considèrons l'application Φ de S_T dans lui-même (vu Prop 3.3) définie par

$$\forall U \in (\Lambda^2)^d, \Phi(U)_t = x + \int_0^t f(s, U_s)\, ds + \int_0^t g(s, U_s)\, dB_s.$$

Une solution de l'équation 3.1 est un point fixe de Φ. L'existence et l'unicité d'un point fixe vont résulter du fait que pour tout $T > 0$, Φ est strictement contractante sur S_T muni de la norme

$$\|X\|_\beta = \left(\mathbb{E}\big[\sup_{t\in[0,T]} e^{\beta t}|X_t|^2\big]\right)^{1/2}$$

pour β choisi convenablement.

Soit $U, U' \in S_T$. On note, on pose $\overline{U} = U - U', \overline{f}_t = f(t, U_t) - f(t, U'_t), \overline{g}_t = g(t, U_t) - g(t, U'_t), \overline{\Phi}_t = \Phi(U)_t - \Phi(U')_t$. Il résulte de la formule d'Itô vectorielle appliquée au processus d'Itô $\overline{\Phi}$ et à la fonction $\Gamma(t, x) = e^{\beta t}|x|^2$ que pour chaque $\beta \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}
e^{\beta t}|\overline{\Phi}_t|^2 &= \int_0^t \beta e^{\beta s}|\overline{\Phi}_s|^2\, ds + 2\int_0^t e^{\beta s}\left\langle \overline{\Phi}_s, \overline{f}_s\right\rangle\, ds + 2\int_0^t e^{\beta s}\left\langle \overline{\Phi}_s, \overline{g}_s\, dB_s\right\rangle \\
&\quad + \int_0^t e^{\beta s} Tr(\overline{g}_s \overline{g}_s^*)\, ds \\
&\leq \int_0^t \beta e^{\beta s}|\overline{\Phi}_s|^2\, ds + 2\int_0^t e^{\beta s} K|\overline{\Phi}_s||\bar{U}_s|\, ds + 2\sup_{[0,t]}\Big|\int_0^s e^{\beta r}\left\langle \overline{\Phi}_r, \overline{g}_r\, dB_r\right\rangle\Big| \\
&\quad + \int_0^t e^{\beta s} K^2 |\bar{U}_s|^2\, ds \\
&\leq (T\beta + KT)\sup_{[0,t]} e^{\beta s}|\overline{\Phi}_s|^2 + (TK + TK^2)\sup_{[0,t]} e^{\beta s}|\overline{U}_s|^2 + 2\sup_{[0,t]}\Big|\int_0^s e^{\beta r}\left\langle \overline{\Phi}_r, \overline{g}_r\, dB_r\right\rangle\Big|
\end{aligned}$$

En prenant l'espérance, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[\sup_{[0,t]} e^{\beta s}|\overline{\Phi}_s|^2\big] \leq &(T\beta + KT)\mathbb{E}\big[\sup_{[0,t]} e^{\beta s}|\overline{\Phi}_s|^2\big] + (TK + TK^2)\mathbb{E}\big[\sup_{[0,t]} e^{\beta s}|\overline{U}_s|^2\big] \\
&+ \mathbb{E}\Big[2\sup_{[0,t]}\Big|\int_0^s e^{\beta r}\left\langle \overline{\Phi}_r, \overline{g}_r\, dB_r\right\rangle\Big|\Big]
\end{aligned}$$

D'après les inégalités de Burkholder-Davies-Gundy, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[\sup_{[0,t]} \big| \int_0^s e^{\beta r} \left\langle \overline{\Phi}_r, \overline{g}_r \, dB_r \right\rangle \big|\big] &\leq C\mathbb{E}\big[\big(\int_0^t e^{2\beta r} |\overline{\Phi}_r|^2 |\overline{g}_r|^2 \, dr\big)^{1/2}\big] \\
&\leq C\mathbb{E}\big[\big(\int_0^t e^{2\beta r} |\overline{\Phi}_r|^2 K^2 |\overline{U}_r|^2 \, dr\big)^{1/2}\big] \\
&\leq Ct^{1/2} K \mathbb{E}\big[\sup_{[0,t]} e^{\beta s/2} |\overline{\Phi}_s| \sup_{[0,t]} e^{\beta s/2} |\overline{U}_s|\big] \\
&\leq Ct^{1/2} K/2 \mathbb{E}\big[\sup_{[0,t]} e^{\beta s} |\overline{\Phi}_s|^2\big] + Ct^{1/2} K/2 \mathbb{E}\big[\sup_{[0,t]} e^{\beta s} |\overline{U}_s|^2\big]
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[\sup_{[0,t]} e^{\beta s} |\overline{\Phi}_s|^2\big] \leq & (T\beta + KT + CT^{1/2} K/2) \mathbb{E}\big[\sup_{[0,t]} e^{\beta s} |\overline{\Phi}_s|^2\big] \\
& + (TK + TK^2 + CT^{1/2} K/2) \mathbb{E}\big[\sup_{[0,t]} e^{\beta s} |\overline{U}_s|^2\big],
\end{aligned}$$

ce qui est équivalent à

$$\mathbb{E}\big[\sup_{[0,t]} e^{\beta s} |\overline{\Phi}_s|^2\big] \leq \frac{TK + TK^2 + CT^{1/2} K/2}{1 - (T\beta + KT + CT^{1/2} K/2)} \mathbb{E}\big[\sup_{[0,t]} e^{\beta s} |\overline{U}_s|^2\big].$$

Fixons $T > 0$ quelconque. Il est clair que l'on peut choisir $\beta \in \mathbb{R}$ tel que le terme $\frac{TK+TK^2+CT^{1/2}K/2}{1-(T\beta+KT+CT^{1/2}K/2)}$ soit strictement compris entre 0 et 1. Ceci assure alors que Φ est une contraction. L'existence et l'unicité résultent alors du théorème du point fixe. $\square$

En fait, en choisissant un autre espace, on peut montrer l'existence et l'unicité avec de moindres calculs. On peut notamment se passer des inégalités de Burkholder-Davies-Gundy. Néanmoins, la convergence que l'on a obtenue permet d'obtenir des estimations fortes sur le processus (en particulier, on contrôle son $\sup$).

A l'aide de temps d'arrêts, on peut étendre l'existence et l'unicité des solutions pour des coefficients f, g satisfaisant seulement des hypothèses de Lipschitz locales

$$\begin{cases} \forall r > 0, \exists K_r > 0, \forall x, y \in B(0; r), \forall t \geq 0, \\ |f(t,x) - f(t,y)| + \|g(t,x) - g(t,y)\| \leq C_r |x - y| \end{cases}$$

On a montré que si X et X', définis sur le même espace de probabilité (i.e. par rapport au même mouvement brownien), sont solutions de la même EDS alors ils ont mêmes trajectoires. Ceci est appelé unicité trajectorielle. En utilisant ce résultat sur l'espace canonique des trajectoires, on peux montrer le résultat suivant d'unicité en loi des solutions des EDS :

Théorème 3.5. *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ *et* $(\Omega', \mathcal{F}', \mathrm{P}')$ *deux espaces de probabilité sur lesquels sont définis deux mouvements browniens* B_t *et* B'_t *et deux variables aléatoires de même loi* H *et* H'*. Supposons que les hypothèses du théorème 3.4 soient vérifées pour chacune des deux conditions initiales. Alors la solution* X *sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ *et la solution* X' *sur* $(\Omega', \mathcal{F}', \mathrm{P}')$ *de l'EDS* (3.1) *ont même loi trajectorielle.*

Exercice 3.1. (Processus d'Ornstein-Uhlenbeck) *On considère l'EDS suivante en dimension un.*

$$\begin{cases} dX_t = \sigma dB_t - cX_t dt \\ X_0 = H & \textit{indépendant de } (B_t)_t \end{cases} \tag{3.4}$$

Montrer que l'on a

$$X_t = He^{-ct} + \sigma e^{-ct} \int_0^t e^{cs}\, dB_s.$$

L'Èquation (3.4) porte le nom d'équation de Langevin et X *est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck.*

Exercice 3.2. (Processus de Black et Scholes) *On considère l'EDS suivante :*

$$\begin{cases} dX_t = X_t(\sigma dB_t + cdt) \\ X_0 = H & \textit{(indépendant de } (B_t)_t\textit{)} \end{cases} . \tag{3.5}$$

Montrer que

$$X_t = He^{\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + ct}.$$

3.4 Dépendance par rapport aux conditions initiales

Définissons maintenant pour $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, $\{X_s^{x,t}, s \geq 0\}$ comme étant la solution de l'EDS suivante qui part du point x au temps t :

$$X_s^{x,t} = x + \int_t^{t \vee s} f(r, X_r^{x,t})\, dr + \int_t^{t \vee s} g(r, X_r^{x,t})\, dB_r.$$

En modifiant légèrement la preuve du théorème 3.4, on peut montrer le résultat suivant de dépendance par rapport au conditions initiales :

Proposition 3.6. *Supposons que* f *et* g *vérifient les conditions (3.2) et (3.3). Pour chaque* $T > 0$ *et pour* $p \geq 2$*, il existe une constante* $c(p, T, K)$ *telle que*

$$\mathbb{E}\left[|X_s^{x,t} - X_{s'}^{x',t'}|^p\right] \leq c(p, T, K)(1 + |x|^p + |x'|^p)(|t - t'|^{p/2} + |s - s'|^{p/2} + |x - x'|^p)$$

On en déduit que, pour chaque (t,x), les trajectoires du processus $X^{t,x}$ sont continues (en fait hölderiennes pour un exposant de Hölder convenablement choisi). On peut le démontrer à l'aide du critère suivant :

Théorème 3.7. *Soit $\left\{Z_v; v\in[0;a]^k\right\}$ un processus à valeurs dans un espace de Banach pour lequel il existe trois constantes strictement positives γ, c, ε telle que*

$$\mathbb{E}\left[|Z_v - Z_u|^\gamma\right] \leq c|v-u|^{k+\varepsilon},\ \ u,v\in[0;a]^k.$$

Alors il existe un processus $\left\{\tilde{Z}_v; v\in[0;a]^k\right\}$ tel que

i) $\tilde{Z}$ est une modification de Z

ii) $\mathbb{E}\left[\left(\sup_{v\neq u}\frac{|\tilde{Z}_u-\tilde{Z}_v|}{|u-v|^\alpha}\right)^\gamma\right] < \infty$,

pour tout $\alpha\in\left[0;\frac{\varepsilon}{\gamma}\right[$, ce qui implique en particulier que les trajectoires de $\tilde{Z}$ sont α-hölderiennes.

Mais le critère précédent nous donne un résultat plus fort : il permet également de montrer que toute solution de l'EDS (3.1) admet une modification qui soit continue (et même hölderienne) par rapport au conditions initiales, c'est-à-dire telle que, presque sûrement, l'application

$$(t,x,s)\mapsto X_s^{x,t}$$

soit continue. On choisira toujours par la suite une telle modification pour la solution d'une EDS.

3.5 Propriété de Markov des solutions

Nous supposons, dans cette section, que les coefficients f, g ne dépendent pas de t. Pour une condition initiale $\mathcal{F}_t$-mesurable $H\in L^2(\Omega)$ On note $X^{H,t}$ la solution de l'équation

$$\forall s\geq t,\quad X_s^{x,t} = H + \int_0^s f(X_r^{x,t})\,dr + \int_0^s g(X_r^{x,t})\,dB_r$$

et $X^{x,t} = H$ si $s<t$.

Proposition 3.8. *On a $\mathbb{P}$ presque sûrement*

$$X_u^{x,t} = X_u^{X_s^{x,t},s}$$

pour tout $0\leq t\leq s\leq u$.

Preuve : Remarquons que

$$\forall u \geq t, \quad X_u^{x,t} = x + \int_t^u f(X_r^{x,t})\, dr + \int_t^u g(X_r^{x,s})\, dB_r.$$

En particulier, on a :

$$\forall u \geq s \geq t, \quad X_u^{x,t} = X_s^{x,t} + \int_s^u f(X_r^{x,t})\, dr + \int_s^u g(X_r^{x,s})\, dB_r.$$

D'autre part, le processus $X^{X_s^{x,t},s}$ est solution de l'EDS

$$\forall u \geq s \geq t, \quad X_u^{X_s^{x,t},s} = X_s^{x,t} + \int_s^u f(X_r^{X_s^{x,t},s})\, dr + \int_s^u g(X_r^{X_s^{x,t},s})\, dB_r.$$

Comme les processus $X^{X_s^{x,t},s}$ et $X^{x,t}$ sont solutions de la même EDS, on en déduit que, presque sûrement, ces 2 processus sont égaux. □

Notons $B_b(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions boréliennes bornées sur $\mathbb{R}^d$. Notons P_t l'opérateur défini sur $B_b(\mathbb{R}^d)$ par

$$P_t f(x) = \mathbb{E}[f(X_t^{x,0})].$$

Proposition 3.9. *Pour toute $f \in B_b(\mathbb{R}^d)$, on a $\mathbb{P}$ ps*

$$\mathbb{E}\left[f(X_{t+u}^{x,0})|\mathcal{F}_u\right] = P_t f(X_u^{x,0}).$$

On dit que X est un processus de Markov.

Preuve :

Pour la preuve, nous utiliserons le lemme suivant

Lemme 3.10. *Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Si $g : \mathbb{R}^k \times \Omega \to \mathbb{R}$ est mesurable et*

$$\mathbb{E}\left[g(x,\omega)|\mathcal{B}\right] = h(x,\omega),$$

alors pour toute variable aléatoire H $\mathcal{B}$-mesurable, on a

$$\mathbb{E}\left[g(H,\omega)|\mathcal{B}\right] = h(H,\omega).$$

Utilisons le lemme avec

$$g(x,\omega) = f(X^{x,u}_{t+u}(\omega)).$$

et avec

$$h(x,\omega) = \mathbb{E}\left[f(X^{x,u}_{t+u}(\omega))|\mathcal{F}_u\right].$$

On obtient alors d'après le lemme et la proposition 3.8

$$h(X^{x,0}_u,\omega) = \mathbb{E}\left[f(X^{x,0}_{t+u})|\mathcal{F}_u\right].$$

Mais $X^{x,u}_{t+u}$ est $\sigma(B_r - B_u, r \geq u)$-mesurable, donc est indépendant de $\mathcal{F}_u$. Par suite

$$h(x,\omega) = \mathbb{E}\left[f(X^{x,u}_{t+u})|\mathcal{F}_u\right] = \mathbb{E}\left[f(X^{x,u}_{t+u})\right].$$

Remarquons alors (vu le théorème 3.5) que $(X^{x,u}_{r+u})_{r\geq 0}$ et $(X^{x,0}_r)_{r\geq 0}$ ont même loi et donc que

$$h(x,\omega) = \mathbb{E}\left[f(X^{x,0}_t)\right].$$

Finalement on obtient

$$\mathbb{E}\left[f(X^{x,0}_{t+u})|\mathcal{F}_u\right] = P_t f(X^{x,0}_u)$$

ce qui donne le résultat. □

Preuve du lemme : Vu le théorème de la classe monotone, il suffit de montrer le résultat pour les fonctions H étagées. Supposons que H puisse s'écrire $H = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbb{1}_{A_k}$ pour des ensembles $(A_k)_k$ disjoints. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[g(H,\omega)|\mathcal{B}\right] =& \mathbb{E}\left[g\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbb{1}_{A_k},\omega\right)|\mathcal{B}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k} g\left(\lambda_k,\omega\right)|\mathcal{B}\right] \\
=& \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k} \mathbb{E}\left[g\left(\lambda_k,\omega\right)|\mathcal{B}\right] = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k} h(\lambda_k,\omega) \\
=& h\left(\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k}\lambda_k,\omega\right) \\
=& h(H,\omega)
\end{aligned}$$

□

En fait, on peut démontrer :

Proposition 3.11. *La famille d'opérateurs $(P_t)_{t\geq 0}$ définit un semi-groupe conjointement continu de contractions sur C_0 (espace des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini), c'est-à-dire :*

1. $\|P_t f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$
2. $P_{t+s}f = P_t(P_s f)$
3. $P_0 f = f$
4. $(t, f) \mapsto P_t f$ *est continu de* $\mathbb{R}_+ \times C_0 \to C_0$.

3.6 La formule de Feynman-Kac

Nous allons maintenant expliquer le lien entre les EDS du type

$$\begin{cases} dX_t &= f(X_t)dt + g(X_t)dB_t \\ X_0 &= x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

et les équations aux dérivées partielles (EDP).

Soit $\varphi \in C_b^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 1 fois dérivable par rapport à la première variable, 2 fois dérivables par rapport à la deuxième variable, ces dérivées étant continues et bornées. On définit l'opérateur A sur $C_b^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$

$$A\varphi(t,x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}(t,x) + \sum_{i=1}^{d} f_i(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(t,x)$$

où la matrice $d \times d$ $a(x)$ est donnée par

$$a(x) = g(x)g^*(x) \quad \left(a_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{d} g_{ik}(x)g_{jk}(x)\right)$$

et est donc semi-définie positive.

On va maintenant donner une introduction à une formule due originellement à Feynman et Kac, qui donne une expression probabiliste des solutions de certaines EDP paraboliques linéaires. Fixons un certain temps $T > 0$. Soit $c, h : [0; T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ des applications continues qui sont telles qu'il existe une constante $L > 0$ telles que

$$|c(t,x)| + |h(t,x)| + |\Phi(x)| \leq L(1 + |x|)^2, \;\; (t,x) \in [0;T] \times \mathbb{R}^d$$

Considérons alors l'EDP parabolique suivante pour $0 \leq t \leq T$, $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + (Au)(t,x) + c(t,x)u(t,x) + h(t,x) = 0 \\ u(T,x) = \Phi(x) \end{cases} . \tag{3.6}$$

On définit, pour $0 \leq s, t \leq T$, $X_s^{x,t}$ comme la solution de l'EDS partant de x à l'instant t :

$$X_s^{x,t} = x + \int_t^{t \vee s} f(X_r^{x,t})\, dr + \int_t^{t \vee s} g(X_r^{x,t})\, dB_r.$$

Proposition 3.12. *Soit $u \in C^{1,2}([0;T] \times \mathbb{R}^d)$ une solution de (3.6) qui satisfait aussi la condition*

$$|g(x)\partial_x u(t,x)| \leq L'(1 + |x|), \ (t,x) \in [0;T] \times \mathbb{R}^d$$

pour une constante $L' > 0$. Alors $u(t,x)$ satisfait la formule de Feynman-Kac, c'est-à-dire que $u(t,x)$ est donnée par

$$u(t,x) = \mathbb{E}\left[\Phi(X_T^{x,t}) e^{\int_t^T c(s, X_s^{x,t})\, ds} + \int_t^T h(s, X_s^{x,t}) e^{\int_s^t c(r, X_r^{x,t})\, dr}\, ds\right]. \tag{3.7}$$

Remarque : les hypothèses sont loin d'être optimales mais ont été choisies pour pouvoir n'utiliser que les résultats présents dans ce cours.

Preuve : Appliquons une première fois la formule d'Itô à la fonction $u(s,x)$ et au processus d'Itô $X_s^{x,t}$, on obtient

$$\begin{aligned} du(s, X_s^{x,t}) =& \frac{\partial u}{\partial s}(s, X_s^{x,t}) ds + \left\langle \partial_x u(s, X_s^{x,t}), f(X_s^{x,t}) \right\rangle ds + \left\langle \partial_x u(s, X_s^{x,t}), g(X_s^{x,t}) dB_s \right\rangle + Au(s, X_s^{x,t}) ds \\ =& \left(\frac{\partial u}{\partial s} + Au\right)(s, X_s^{x,t}) ds + \left\langle \nabla_x u(s, X_s^{x,t}), g(s, X_s^{x,t}) dB_s \right\rangle \end{aligned}$$

Puis utilisons la formule d'Itô d'intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} d\left(u(s, X_s^{x,t}) e^{\int_t^s c(r, X_r^{x,t})\, dr}\right) &= u(s, X_s^{x,t}) d\left(e^{\int_t^s c(r, X_r^{x,t})\, dr}\right) + e^{\int_t^s c(r, X_r^{x,t})\, dr} du(s, X_s^{x,t}) \\ &= u(s, X_s^{x,t}) c(s, X_s^{x,t}) e^{\int_t^s c(r, X_r^{x,t})\, dr} ds \\ &\quad + e^{\int_t^s c(r, X_r^{x,t})\, dr} \left(\frac{\partial u}{\partial s} + Lu\right)(s, X_s^{x,t}) ds \\ &\quad + e^{\int_t^s c(r, X_r^{x,t})\, dr} \left\langle \partial_x u(s, X_s^{x,t}), g(s, X_s^{x,t}) dB_s \right\rangle \end{aligned}$$

En utilisant (3.6), on obtient :

$$d\left(u(s, X_s^{x,t}) e^{\int_t^s c(r, X_r^{x,t})\, dr}\right) = -h(s, X_s^{x,t}) e^{\int_t^s c(r, X_r^{x,t})\, dr} + e^{\int_t^s c(r, X_r^{x,t})\, dr} \left\langle \partial_x u(s, X_s^{x,t}), g(s, X_s^{x,t}) dB_s \right\rangle,$$

soit en appliquant ceci entre t et T,

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \Phi(X_T^{x,t}) e^{\int_t^T c(r,X_r^{x,t})\,dr} + \int_t^T h(s,X_s^{x,t}) e^{\int_t^s c(r,X_r^{x,t})\,dr}\,ds \\ &\quad - \int_t^T e^{\int_t^s c(r,X_r^{x,t})\,dr} \left\langle \partial_x u(s,X_s^{x,t}), g(s,X_s^{x,t}) dB_s \right\rangle \end{aligned}$$

Or, vu les hypothèses faites sur $g\partial_x u(t,x)$ et $c(t,x)$, l'intégrale stochastique du membre de droite est une martingale de carré intégrable donc on peut prendre l'espérance de cette intégrale et celle-ci est nulle. En utilisant de même les hypothèses de domination faites sur les autres fonctions, on montre que les espérances des termes restants sont bien définies et finalement on obtient

$$u(t,x) = \mathbb{E}\left[\Phi(X_T^{x,t}) e^{\int_t^T c(r,X_r^{x,t})\,dr} + \int_t^T h(s,X_s^{x,t}) e^{\int_t^s c(r,X_r^{x,t})\,dr}\,ds\right],$$

ce qui est bien le résultat voulu. $\square$

Chapitre 4

Corrections de quelques exercices

Exercice 2.10

1) Si X est solution de (2.2) alors on a

$$X_t = X_0 + \int_0^t \psi_s \, ds + \int_0^t \varphi_s \, dB_s$$

avec $X_0 = \xi, \psi_s = -\alpha X_t$ et $\varphi_s = \beta$. Donc X est un processus d'Itô et en appliquant le théorème 2.12 à X et $\Phi(t,x) = e^{t\alpha}x$, on a :

$$e^{t\alpha}X_t = \xi + \int_0^t \alpha e^{s\alpha} X_s \, ds + \int_0^t e^{s\alpha}(-\alpha X_s) \, ds + \int_0^t \beta e^{s\alpha} \, dB_s.$$

En multipliant les deux termes de cette égalité par $e^{-t\alpha}$, on obtient bien

$$X_t = e^{-t\alpha}\xi + \int_0^t \beta e^{-(t-s)\alpha} \, dB_s.$$

Réciproquement on applique le même raisonnement au processus d'Itô $Y_t = e^{t\alpha}X_t$ et la fonction $\Phi(t,x) = e^{-t\alpha}x$. On trouve bien que

$$X_t = e^{-t\alpha}\xi + \int_0^t \beta e^{-(t-s)\alpha} \, dB_s$$

est solution de (2.2).

2) Si ξ est gaussienne, comme $\int_0^t \beta e^{-(t-s)\alpha}\, dB_s$ est un processus gaussien indépendant de $\mathcal{F}_0$, X est un processus gaussien. De plus on a

$$\mathbb{E}[X_t] = e^{-t\alpha}\mathbb{E}[\xi]$$

et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_s, X_t) &= \mathbb{E}\left[(e^{-t\alpha}\xi + \int_0^t \beta e^{-(t-u)\alpha}\, dB_u)(e^{-s\alpha}\xi + \int_0^s \beta e^{-(s-u)\alpha}\, dB_u)\right] - \mathbb{E}[X_t]\,\mathbb{E}[X_s] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^t \beta e^{-(t-u)\alpha}\, dB_u \int_0^s \beta e^{-(s-u)\alpha}\, dB_u\right] + e^{-(t+s)\alpha}\mathrm{Var}(\xi) \\
&= e^{-(t+s)\alpha}\mathbb{E}\left[B(\beta e^{u\alpha}\mathbb{1}_{[0,t]}(u))B(\beta e^{u\alpha}\mathbb{1}_{[0,s]}(u))\right] + e^{-(t+s)\alpha}\mathrm{Var}(\xi) \\
&= e^{-(t+s)\alpha}\int_0^\infty \beta e^{u\alpha}\mathbb{1}_{[0,t]}(u)\beta e^{u\alpha}\mathbb{1}_{[0,s]}(u)\, du + e^{-(t+s)\alpha}\mathrm{Var}(\xi) \\
&= e^{-(t+s)\alpha}\int_0^{t\wedge s} \beta^2 e^{2\alpha u}\, du + e^{-(t+s)\alpha}\mathrm{Var}(\xi)
\end{aligned}$$

3) Si $\mathbb{E}(\xi) = 0$ et $\mathrm{Var}(\xi) = \frac{\beta^2}{2\alpha}$ alors X est centré et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_s, X_t) &= e^{-(t+s)\alpha}\frac{\beta^2}{2\alpha} + \beta^2 e^{-(t+s)\alpha}\int_0^{t\wedge s} e^{2\alpha u}\, du \\
&= \frac{\beta^2}{2\alpha}e^{-(t+s-2t\wedge s)\alpha} \\
&= \frac{\beta^2}{2\alpha}e^{-|t-s|\alpha}
\end{aligned}$$

4) Si ξ est gaussienne on a

$$\mathbb{E}[X_{t+\delta}] = e^{-(t+\delta)\alpha} \to 0 \text{ quand } t \to \infty$$

et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_{t+\delta}, X_{t+\gamma}) &= e^{-(2t+\delta+\gamma)\alpha}\mathrm{Var}(\xi) + \frac{\beta^2}{2\alpha}e^{-(2t+\delta+\gamma)\alpha}\left(e^{2\alpha t+2\alpha(delta\wedge\gamma)} - 1\right) \\
&= e^{-(2t+\delta+\gamma)\alpha}\mathrm{Var}(\xi) + \frac{\beta^2}{2\alpha}e^{-|\delta-\gamma|\alpha} - \frac{\beta^2}{2\alpha}e^{-(2t+\delta+\gamma)\alpha} \\
&\to \frac{\beta^2}{2\alpha}e^{-|\delta-\gamma|\alpha} \text{ lorsque } t \to \infty
\end{aligned}$$

et ceci termine l'exercice. □

Exercice 2.11

1) On applique le théorème 2.12 au processus d'Itô B_t (avec $B_0 = 0,\psi_s = 0$ et $\varphi_s = 1$) et la fonction $\Phi(t,x) = e^{\lambda x - \frac{\lambda^2 t}{2}}$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} e^{\lambda X_t - \left(\frac{\lambda^2}{2}+\mu\lambda\right)t} &= e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}} \\ &= \Phi(0,B_0) - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t e^{\lambda B_s - \frac{\lambda^2 s}{2}}\, ds + \int_0^t \lambda e^{\lambda B_s - \frac{\lambda^2 s}{2}}\, dBs + \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t e^{\lambda B_s - \frac{\lambda^2 s}{2}}\, ds \\ &= 1 + \lambda \int_0^t e^{\lambda B_s - \frac{\lambda^2 s}{2}}\, dBs \end{aligned}$$

Comme $e^{\lambda B_s - \frac{\lambda^2 s}{2}} \in \Lambda^2$, Z_t est bien une $\mathcal{F}_t$-martingale.

2) On a alors

$$Z_{t\wedge T} = 1 + \lambda \int_0^{t\wedge T} e^{\lambda B_s - \frac{\lambda^2 s}{2}}\, dB_s = 1 + \lambda \int_0^t \mathbb{I}_{[0,T]}(s) e^{\lambda B_s - \frac{\lambda^2 s}{2}}\, dB_s.$$

Vu la proposition 2.8, on a

$$\mathbb{E}\left[Z_{t\wedge T}\right] = 1.$$

Si $\lambda > (-2\mu)^+$ alors $\left(\frac{\lambda^2}{2}+\mu\lambda\right)t > 0$ pour tout $t > 0$. Donc on a

$$0 < Z_{t\wedge T} \leq e^{\lambda a}.$$

De plus, sur $\{T < \infty\}$, on a

$$\lim_{t\to\infty} Z_{t\wedge T} = e^{\lambda a - \left(\frac{\lambda^2}{2}+\mu\lambda\right)T}$$

et sur $\{T = \infty\}$ on a

$$\lim_{t\to\infty} Z_{t\wedge T} = 0.$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue assure que

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{T<\infty\}} e^{\lambda a - \left(\frac{\lambda^2}{2}+\mu\lambda\right)T}\right] = 1,$$

soit

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{T<\infty\}} e^{-\left(\frac{\lambda^2}{2}+\mu\lambda\right)T}\right] = e^{-\lambda a}.$$

3) Si $\mu > 0$ alors, d'après la loi des grands nombres,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} = \mu.$$

Donc

$$\mathbb{P} \text{ p.s.,} \quad X_t \to \infty$$

et $\mathrm{P}\,(T < \infty) = 1$. Sinon $\mu \leq 0$ et en passant à la limite pour $\lambda \to -2\mu$ dans l'égalité obtenue à la question 2) dont les deux membres sont des fonctions continues de $\lambda \in [-2\mu, \infty[$, on a

$$\mathrm{P}\,(T < \infty) = e^{2\mu a},$$

ce qui termine l'exercice. $\square$