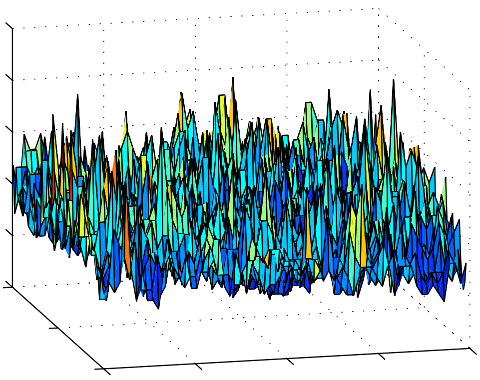
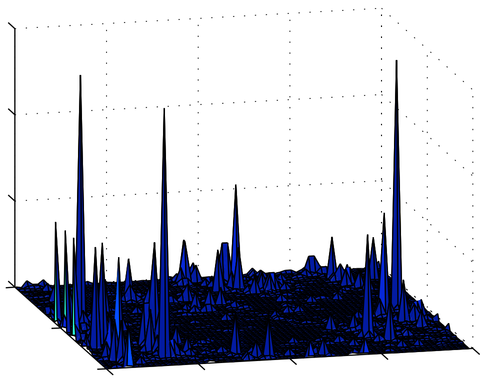
UNIVERSITÉ PARIS-DAUPHINE

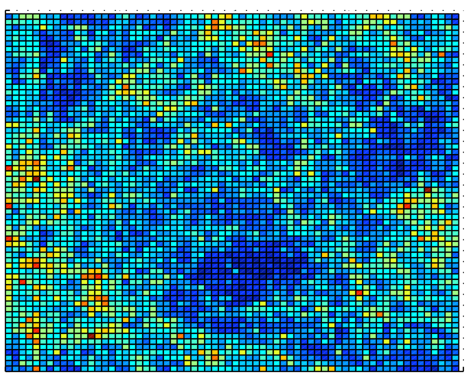
Processus stochastiques multifractaux et applications

Author :
Rémi RHODES

Master 2 :
EDPMAD







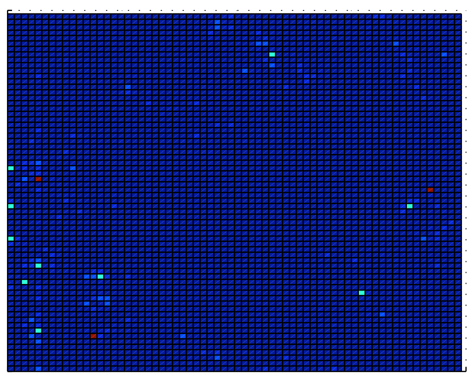


Table des matières

Chapitre 1

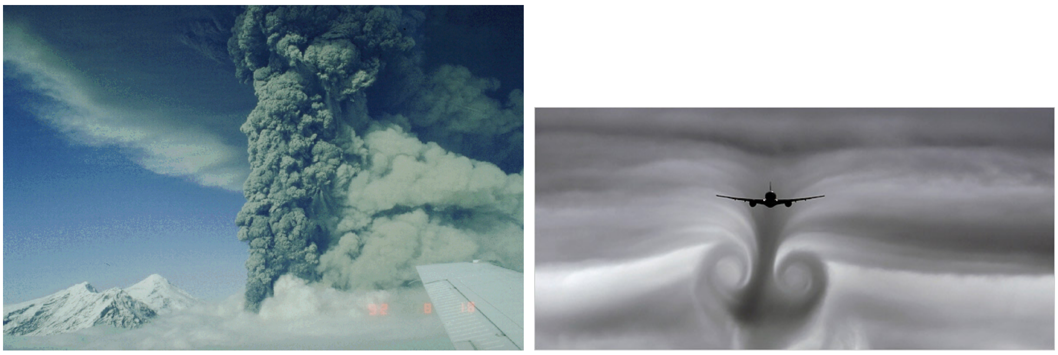
Introduction

1.1 Motivations en turbulence

La turbulence désigne l'état d'un fluide, liquide ou gaz, dans lequel la vitesse présente en tout point un caractère tourbillonnaire. La taille, la localisation et l'orientation varient constamment.

Les écoulements turbulents se caractérisent donc par une apparence très désordonnée, un comportement difficilement prévisible et l'existence de nombreuses échelles spatiales et temporelles. De tels écoulements apparaissent lorsque la source d'énergie cinétique qui met le fluide en mouvement est relativement intense devant les forces de viscosité agissant sur le fluide. A l'inverse, on appelle écoulement laminaire l'écoulement d'un fluide lorsqu'il est très régulier.

FIGURE 1.1 – Tourbillons dans un cours d'eau



(a) cendres et vapeur d'un volcan

(b) turbulence de sillage

FIGURE 1.2 – Divers exemples de turbulences

Dans le domaine de la météorologie, la turbulence explique les variations des courants marins et des vents atmosphériques. Elle est aussi utilisée en aéronautique (jets des réacteurs, chambres de combustion, sillage des aubes et compresseurs,...), dans l'industrie chimique ainsi qu'en accoustique, en géophysique, etc...

FIGURE 1.3 – Turbulence atmosphérique

Le comportement complexe des écoulements turbulents est la plupart du temps abordé par voie statistique. On peut ainsi considérer que l'étude de la turbulence fait partie de la physique statistique. Pour traduire le fait que, dans un écoulement, les forces d'inertie l'emportent sur les forces de viscosité, un nombre de Reynolds convenablement choisi doit être supérieur à un certain seuil. Une propriété classiquement mise en avant d'un écoulement turbulent réside dans un processus appelé cascade d'énergie : la division des grands tourbillons en tourbillons plus petits permet un transfert d'énergie des grandes échelles vers les petites échelles.

D'un point de vue mathématique, le transfert d'énergie est appréhendé de la façon suivante. Le mouvement d'un fluide incompressible est régi par les équations de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial}{\partial t}u + (u \cdot \nabla)u = -\nabla p + \nu \triangle u \quad \text{et} \quad \nabla \cdot u = 0. \tag{1.1}$$

La dissipation locale d'énergie dans un ensemble A est définie par :

$$\epsilon(A) = \frac{\nu}{2} \int_A \sum_{i,j} (\partial_i u_j + \partial_j u_i)^2 \, dx. \tag{1.2}$$

En 1941, Kolmogorov a proposé une étude statistique de la dissipation locale d'énergie appelée théorie K41. En bref, il affirme que si le nombre de Reynolds est suffisamment grand, la dissipation locale d'énergie est :

1. *spatialement homogène*, c'est-à-dire que la loi de ϵ est invariante par translations spatiales,
2. *statistiquement isotrope*, c'est-à-dire que la loi de ϵ est invariante par rotations,
3. *autosimilaire*, c'est-à-dire que pour un certain exposant $\alpha > 0$ et pour tout $\lambda > 0$, on a

$$\epsilon(\lambda A) \overset{loi}{=} \lambda^\alpha \epsilon(A).$$

Dans ce cas, le spectre de loi puissance est linéaire, ie

$$\mathbb{E}[\epsilon(B(0,r))^q] = r^{\xi(q)}$$

où ξ est une fonction linéaire en q.

A partir de la formulation de ces hypothèses, l'étude des processus stochastiques autosimilaires (mouvement brownien, brownien fractionnaire, processus de Lévy α-stables,...) s'est beaucoup développée.

Toutefois, suite à une objection de Landau, Kolmogorov et Obukhov ont revisité en 1962 la théorie K41 pour énoncer ce que l'on appelle la théorie KO62. Le principal changement concerne le point 3. Les études expérimentales montrent que le spectre de loi puissance est clairement non linéaire. L'écart à la linéarité du spectre est une manifestation d'un phénomène plus général connu sous le nom d'*intermittence*. Ils font de plus l'hypothèse de la lognormalité de la variable $\epsilon(A)$. L'objectif de ce cours est d'introduire des modèles stochastiques satisfaisant la théorie KO62. On verra que la non-linéarité du spectre de loi puissance est liée à une notion d'autosimilarité stochastique, appelée invariance d'échelle stochastique, du type

$$\epsilon(\lambda A) \stackrel{loi}{=} \lambda^\alpha e^{\Omega_\lambda} \epsilon(A),$$

où $\lambda, \alpha > 0$ et Ω_λ est une variable aléatoire indépendantes de $\epsilon(A)$.

1.2 Motivations en finance

La première modélisation des cours qui a été proposée est celle d'un mouvement brownien par Bachelier dès 1900, et elle restera largement utilisée pendant près de 60 ans. En 1965, Samuelson suggère d'étudier plutôt un mouvement brownien géométrique, modèle sur lequel viendront s'appuyer les travaux de Black, Scholes et Merton en 1973.

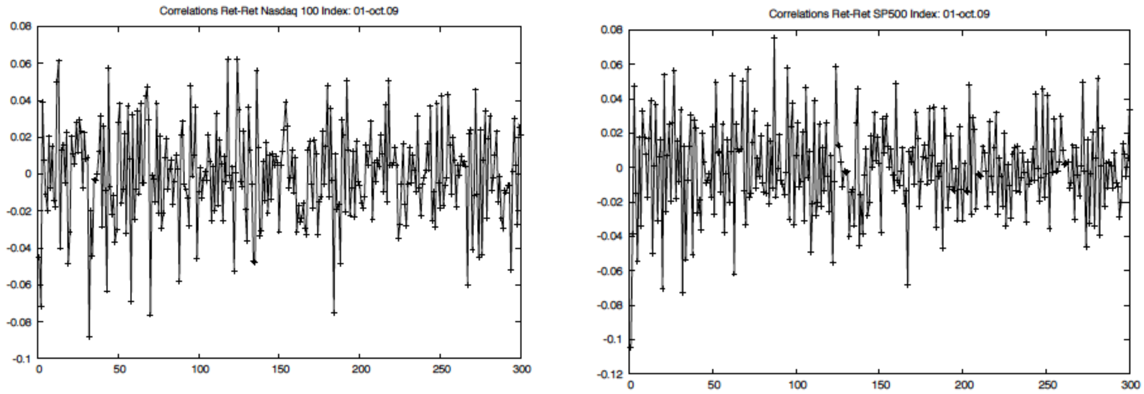
Le krach d'octobre 1987 confirma toutefois que ce modèle est loin d'être adéquat. En particulier, l'occurence d'évènements extrêmes est beaucoup plus forte en réalité que dans les modèles utilisés : avec de tels modèles, la probabilité d'un krach est de l'ordre de 10^{-23}. Autant dire que les krach de 1987 et 2009 n'aurait jamais dû se réaliser. Plusieurs études, notamment celles de Mandelbrot et Fama dans les années soixante, avaient déjà pointé le fait que les cours financiers sont loin de suivre une loi gaussienne.

Une étude statistique des marchés financiers montre qu'il existe des "propriétés universelles" partagées par l'ensemble des actifs financiers (actions, devises, indices,...), appelés "faits stylisés des marchés". Le log prix X_t d'un bon modèle doit vérifier :

1. stationarité des rendements, ie $(X_t)_t$ est à accroissements stationnaires
2. décorrélation : $\mathbb{E}[X_s(X_t - X_s)] = 0$ pour $s < t$ (voir figure **??**)
3. corrélation longue portée de la volatilité $< X >$ (voir figure **??**) :

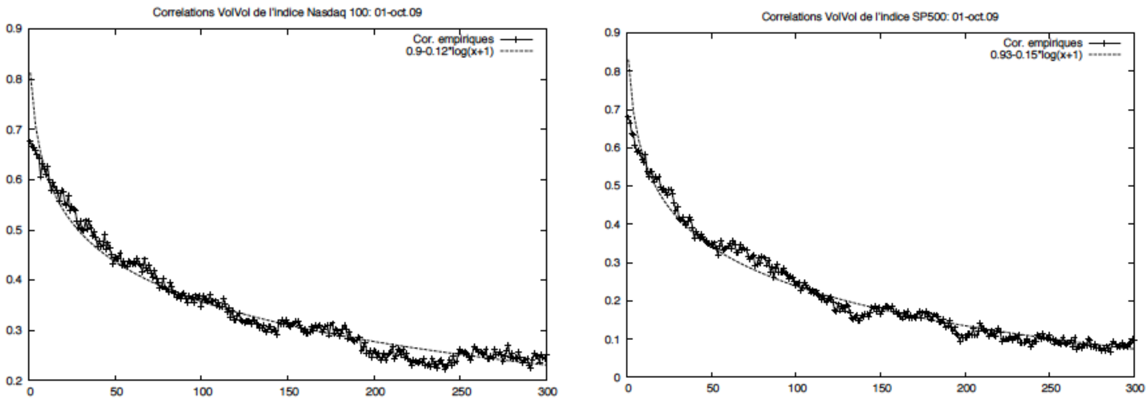
$$\text{Corr}\big(< X >_{0,1}, < X >_{t,t+1} \big) = \frac{A}{(1+t)^\mu}$$

avec $\mu \in [0; 0.5]$. Le cas limite $\mu \to 0$ peut aussi être modélisé par des corrélations en log du type $A - B \ln(1+t)$.



(a) NASDAQ (b) SP500

FIGURE 1.4 – Corrélations empiriques daily des indices Nasdaq et SP500 sur la période 2001-2009



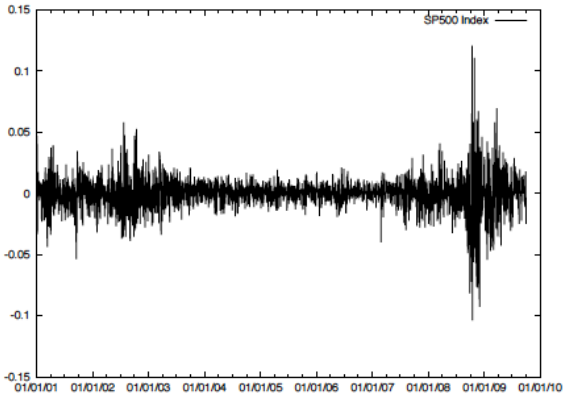
(a) NASDAQ (b) SP500

FIGURE 1.5 – Corrélations empiriques de la volatilité des indices Nasdaq et SP500 sur la période 2001-2009

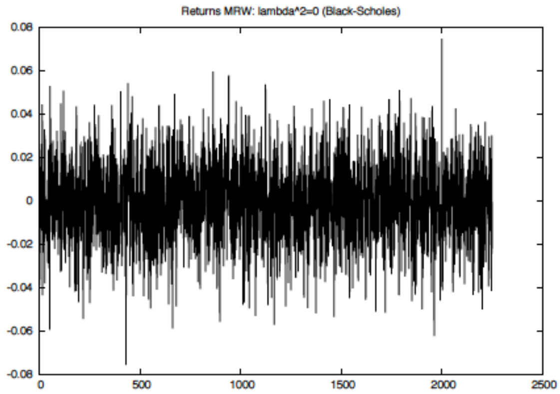
L'idée initialement introduite par Mandelbrot a été de modéliser l'évolution du log prix par une MRW (multifractal random walk), c'est-à-dire un mouvement brownien B changé de temps par un processus croissant M à accroissements stationnaires avec corrélations longue portée :

$$X_t = B_{M_t}.$$

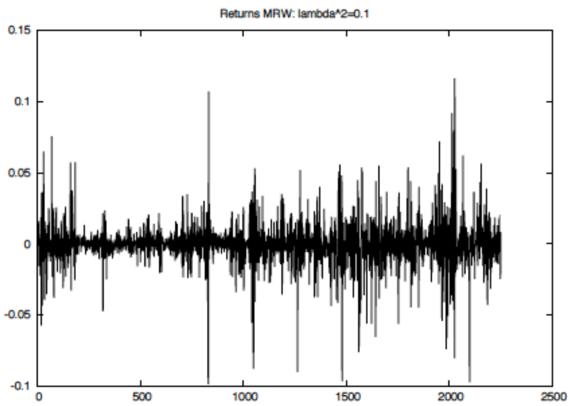
En particulier, la volatilité est alors donnée par le processus M. Dans ce cours, on verra comment construire ces changements de temps multifractaux. En particulier, ces processus sont intermittents, ce qui correspond à ce que l'on peut observer expérimentalement sur les données (voir figure **??**)



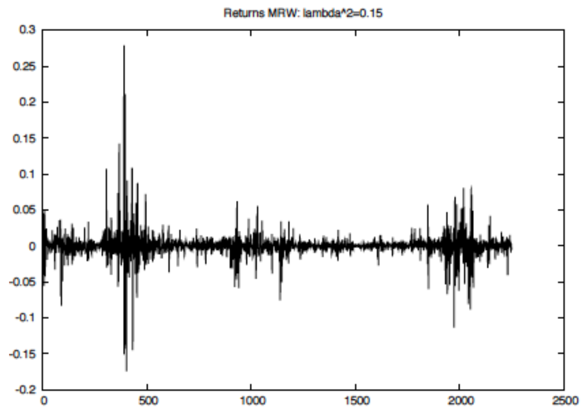
(a) Returns du SP500 sur 2001-2009



(b) Returns simulés avec Black-Scholes



(c) Returns simulés avec MRW



(d) Returns simulés avec MRW

FIGURE 1.6 – Caractère intermittent des marchés financiers

Chapitre 2

Rappels et prérequis

2.1 Rappels généraux

On munit $\mathbb{R}^d$ du produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i.$$

Définition 1. *Si $(X_1, \ldots, X_d)$ est un vecteur aléatoire de carré intégrable, on définit sa matrice de covariance par :*

$$K_X = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X]) \cdot (X - \mathbb{E}[X])^T\big]$$

Proposition 2. *La matrice de covariance d'un vecteur aléatoire est symétrique et positive. La forme quadratique associée est non dégénérée si et seulement si, en tant qu'éléments de $L^2(\Omega, \mathbb{P})$, les vecteurs $X_1 - \mathbb{E}[X_1], \ldots, X_d - \mathbb{E}[X_d]$ sont linéairement indépendants.*

2.2 Rappels sur les variables gaussiennes

2.2.1 Variables aléatoires réelles gaussiennes

On rappelle que la loi gaussienne (ou normale) $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est la loi sur $\mathbb{R}$ dont la densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Sa fonction caractéristique est donnée par

$$\phi(t) = e^{itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2}},$$

son espérance vaut m, sa variance vaut σ^2 et sa transformée de Laplace vaut :

$$\psi(u) = e^{um + \frac{\sigma^2 u^2}{2}}.$$

Si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et si $Y = m + \sigma X$ alors Y suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Réciproquement si Y suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors $X = \frac{Y-m}{\sigma}$ suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

2.2.2 Vecteurs gaussiens

Définition 3. *Un vecteur aléatoire* $(X_1, \ldots, X_d)$ *est dit gaussien si toute combinaison de ses composantes* $\sum_{i=1}^d \lambda_i X_i$*, pour* $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}$*, est une variable aléatoire réelle gaussienne.*

Proposition 4. *Si* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *est un vecteur aléatoire gaussien et si* $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ *est une application linéaire alors* $AX : \Omega \to \mathbb{R}^p$ *est encore un vecteur gaussien.*

En particulier, si X est un vecteur gaussien, toutes ses composantes X_k, pour $k = 1, \ldots, d$, sont des lois normales. L'inverse est faux : si un vecteur aléatoire a toutes ses composantes gaussiennes, il n'est pas nécessairement gaussien. Néanmoins, on a :

Proposition 5. *Si* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *est un vecteur aléatoire dont toutes les composantes sont des lois normales. Si les composantes sont de plus indépendantes alors* X *est un vecteur gaussien.*

Théorème 6. *Si* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *est un vecteur gaussien, sa fonction caractéristique est donnée par :*

$$\forall u \in \mathbb{R}^d, \quad \phi_X(u) = \exp\Big(i\langle u, \mathbb{E}[X]\rangle - \frac{1}{2}\langle u, K_X u\rangle\Big).$$

Comme corollaire, on obtient le résultat très important suivant :

Théorème 7. *Soient* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *et* $Y : \Omega \to \mathbb{R}^p$ *deux vecteurs aléatoires tels que le vecteur* (X, Y) *est gaussien. Alors* X *et* Y *sont indépendants si et seulement s'ils sont non corrélés :*

$$K_{XY} = \mathrm{Cov}(X, Y) = 0.$$

Tout vecteur gaussien admet pour matrice de covariance une matrice symétrique positive. Réciproquement, on a

Théorème 8. (existence) *Pour tout* $m \in \mathbb{R}^d$ *et toute matrice réelle carrée* K *d'ordre* d*, symétrique et positive, il existe un vecteur gaussien de moyenne* m *et de matrice de covariance* K*.*

Proposition 9. *Un vecteur gaussien* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *possède une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^d$ *si et seulement si sa matrice de covariance* K_X *est inversible. Cette densité vaut alors :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}(\det(K_X))^{1/2}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\langle (x - \mathbb{E}[X]), K_X^{-1}(x - \mathbb{E}[X])\rangle\Big)$$

2.2.3 Processus gaussiens réels

Définition 10. *Un processus stochastique* $(X_t)_{t\in T}$ *(où* T *est un ensemble arbitraire) est dit gaussien si et seulement si tout vecteur aléatoire fini* $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ *extrait de* X *(càd* $t_1, \ldots, t_n \in T$*) est un vecteur gaussien.*

Si $(X_t)_{t\in T}$ est un processus de carré intégrable, on définit son noyau de covariance par

$$\forall u, v \in T, \quad f_X(u, v) = \mathrm{cov}(X_u, X_v).$$

Définition 11. *Un processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^d}$ est dit stationnaire si et seulement si, pour tout $z \in \mathbb{R}^d$, les processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^d}$ et $(X_{z+t})_{t\in\mathbb{R}^d}$ ont même loi.*

Dans la cas où X est un processus gaussien stationnaire, son noyau de covariance $f_X(u,v)$ ne dépend, par stationnarité, que de la différence $u-v$. On peut donc écrire

$$f_X(u,v) = g(u-v)$$

pour une fonction g qui est donc nécessairement paire et de type positif, c'est-à-dire que pour tout $n \geq 1$, pour tous $t_1,\ldots,t_n \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{C}$, on a :

$$\sum_{i,j=1}^{n} x_i\overline{x_j}g(t_i-t_j) \geq 0.$$

La fonction g est alors appelée fonction de covariance du processus gaussien stationnaire X.

Définition 12. *Un processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^d}$ à valeurs réelles est dit isotrope si et seulement si, pour toute isométrie $m \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$, les processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^d}$ et $(X_{mt})_{t\in\mathbb{R}^d}$ ont même loi.*

Remarquons que si X est un processus isotrope de carré intégrable alors le noyau de covariance est invariant par isométries, c'est-à-dire que l'on a $f_X(mu,mv) = f_X(u,v)$ pour toute isométrie m de $\mathbb{R}^d$ et tous vecteurs $u,v \in \mathbb{R}^d$. En particulier, pour tout processus gaussien stationnaire et isotrope, la fonction de covariance g est une fonction de la norme euclidienne.

Poursuivons l'étude des fonctions réelles de type positif :

Proposition 13. *Soit f une fonction de type positif sur $\mathbb{R}^d$. Alors :*

1. *$f(0) \geq 0$,*
2. *f est paire,*
3. *$|f(t)| \leq c(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^d$,*
4. *si f est continue en 0 alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$.*

Preuve. Pour démontrer les propriétés ci-dessus on pourra suivre les indications suivantes :

1. Utiliser la définition de def+ en un seul point.
2. Utiliser la définition de def+ en 2 points $t_1 = 0$ et $t_2 = t$ avec $x_1 = x_2 = i$ pour obtenir $2f(0) + if(t) - if(-t) \geq 0$ d'où $f(-t) = \Re(f(-t)) = \Re(f(t)) = f(t)$.
3. Utiliser la définition de def+ en 2 points $t_1 = 0$ et $t_2 = t$ avec $x_1 = x_2 = 1$ pour obtenir $2f(0) + 2f(t) \geq 0$ puis avec $x_1 = x_2 = -1$ pour obtenir $2f(0) - 2f(t) \geq 0$.
4. Utiliser à nouveau la définition de def+ en 3 points 0, t et $t+h$.... □

Théorème 14. *Soit f une fonction réelle de type positif sur $\mathbb{R}^d$ et continue à l'origine. Alors il existe une unique mesure μ sur $\mathbb{R}^d$, qui s'avère être finie et positive, telle que :*

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t,x\rangle}\,\mu(dx).$$

Si f est integrable alors la mesure μ a une densité g par rapport à la mesure de Lebesgue donnée par :

$$g(t) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle t,x\rangle} f(t)\,dt.$$

Ainsi si X est un processus gaussien stationnaire de carré intégrable, sa fonction de covariance est la transformée de Fourier d'une mesure finie positive, appelée *mesure spectrale* du processus X.

Concernant l'existence de processus gaussiens, on a le résultat suivant :

Théorème 15. *Soit f une fonction réelle paire de type positif sur $\mathbb{R}^d$. Alors il existe un processus stationnaire centré gaussien réel admettant f pour fonction de covariance.*

Preuve. Si l'on fixe $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}^d$ alors la matrice carrée M_n d'ordre n dont l'élément générique est donné par

$$M_n(i,j) = f(t_j - t_i)$$

est symétrique positive. En utilisant le théorème **??**, on construit une loi gaussienne de probabilité $\mu_{t_1,\dots,t_n}$ sur $(\mathbb{R}^d)^n$ dont l'espérance est nulle et la matrice de covariance vaut M_n. On conclut en utilisant le théorème de limite projective de probabilités. □

2.3 Inégalités de convexité pour les gaussiennes

Lemme 16. *Soient $(X_i)_{1\le i\le n}$ et $(Y_i)_{1\le i\le n}$ deux vecteurs gaussiens centrés et indépendants. Soit $(p_i)_{1\le i\le n}$ une suite de nombres réels positifs. Si $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une fonction régulière avec croissance au plus polynômiale à l'infini, on définit :*

$$\varphi(t) = \mathbb{E}\big[\phi\big(\sum_{i=1}^n p_i e^{Z_i(t) - \frac{1}{2}\mathbb{E}[Z_i^2(t)]}\big)\big]$$

avec

$$Z_i(t) = \sqrt{t}X_i + \sqrt{1-t}Y_i.$$

Alors on a la formule

$$\forall t \in]0,1[, \quad \varphi'(t) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n p_i p_j \big(\mathbb{E}[X_iX_j] - \mathbb{E}[Y_iY_j]\big)\mathbb{E}\big[e^{Z_i(t)+Z_j(t)-\frac{1}{2}\mathbb{E}[Z_i^2(t)]-\frac{1}{2}\mathbb{E}[Z_j^2(t)]}\phi''(W_{n,t})\big]$$

où

$$W_{n,t} = \sum_{i=1}^n p_i e^{Z_i(t)-\frac{1}{2}\mathbb{E}[Z_i^2(t)]}.$$

Preuve. En dérivant l'expression de φ, on obtient

$$\varphi'(t) = \mathbb{E}\Big[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n p_i(\frac{1}{\sqrt{t}}X_i - \frac{1}{\sqrt{1-t}}Y_i - \mathbb{E}[X_i^2] + \mathbb{E}[Y_i^2])e^{Z_i(t)-\frac{1}{2}\mathbb{E}[Z_i^2(t)]}\phi'\big(\sum_{i=1}^n p_i e^{Z_i(t)-\frac{1}{2}\mathbb{E}[Z_i^2(t)]}\big)\Big]$$

On utilise alors le lemme suivant :

Lemme 17. *Soient $(X,Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ un vecteur gaussien centré et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction régulière avec croissance au plus polynômiale à l'infini pour f et ses dérivées. Alors*

$$\mathbb{E}[Xf(Y)] = \mathbb{E}[XY] \cdot \mathbb{E}[\nabla f(Y)].$$

On en déduit l'expression de φ' :

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) =&\mathbb{E}\Big[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n p_i(\frac{1}{\sqrt{t}}X_i - \frac{1}{\sqrt{1-t}}Y_i)e^{Z_i(t)-\frac{1}{2}\mathbb{E}[Z_i^2(t)]}\phi'\big(\sum_{i=1}^n p_i e^{Z_i(t)-\frac{1}{2}\mathbb{E}[Z_i^2(t)]}\big)\Big] \\
&- \mathbb{E}\Big[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n p_i(\mathbb{E}[X_i^2]-\mathbb{E}[Y_i^2])e^{Z_i(t)-\frac{1}{2}\mathbb{E}[Z_i^2(t)]}\phi'\big(\sum_{i=1}^n p_i e^{Z_i(t)-\frac{1}{2}\mathbb{E}[Z_i^2(t)]}\big)\Big] \\
=&\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n p_ip_j\mathbb{E}\Big[(\frac{1}{\sqrt{t}}X_i - \frac{1}{\sqrt{1-t}}Y_i)(\sqrt{t}X_j+\sqrt{1-t}Y_j)\Big] \\
&\times \mathbb{E}\Big[e^{Z_i(t)-\frac{1}{2}\mathbb{E}[Z_i^2(t)]}e^{Z_j(t)-\frac{1}{2}\mathbb{E}[Z_j^2(t)]}\phi''\big(\sum_{i=1}^n p_i e^{Z_i(t)-\frac{1}{2}\mathbb{E}[Z_i^2(t)]}\big)\Big] \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i}^n p_i\mathbb{E}\Big[(\frac{1}{\sqrt{t}}X_i - \frac{1}{\sqrt{1-t}}Y_i)(\sqrt{t}X_i+\sqrt{1-t}Y_i)\Big]\mathbb{E}\Big[e^{Z_i(t)-\frac{1}{2}\mathbb{E}[Z_i^2(t)]}\phi'\big(\sum_{i=1}^n p_i e^{Z_i(t)-\frac{1}{2}\mathbb{E}[Z_i^2(t)]}\big)\Big] \\
&- \mathbb{E}\Big[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n p_i(\mathbb{E}[X_i^2]-\mathbb{E}[Y_i^2])e^{Z_i(t)-\frac{1}{2}\mathbb{E}[Z_i^2(t)]}\phi'\big(\sum_{i=1}^n p_i e^{Z_i(t)-\frac{1}{2}\mathbb{E}[Z_i^2(t)]}\big)\Big] \\
=&\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n p_ip_j\big(\mathbb{E}[X_iX_j]-\mathbb{E}[Y_iY_j]\big)\mathbb{E}\big[e^{Z_i(t)+Z_j(t)-\frac{1}{2}\mathbb{E}[Z_i^2(t)]-\frac{1}{2}\mathbb{E}[Z_j^2(t)]}\phi''(W_{n,t})\big],
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve du lemme. □

Preuve du lemme **??**. On considère tout d'abord le cas de variables gaussiennes $X \in \mathbb{R}, Y \in \mathbb{R}^d$ centrées réduites et indépendantes. Soit $A \in M_d(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^d$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Xf(B\cdot X + AY)] &= \frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d} xf(B\cdot x+Ay)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dxdy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\int_{\mathbb{R}^2} f(B\cdot x+Ay)\partial_x\big(-e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\big)\,dxdy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\int_{\mathbb{R}^2} B\cdot\nabla f(B\cdot x+Ay)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dxdy \\
&= \mathbb{E}[B\cdot\nabla f(B\cdot X+AY)].
\end{aligned}$$

Soit maintenant un vecteur gaussien $(X', Y') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ centré mais non nécessairement à composantes indépendantes. Posons

$$X = \frac{X'}{a} \quad \text{et} \quad Y = c^{-1}(Y' - bX')$$

avec

$$a = \mathrm{Var}(X')^{1/2}, \quad b = \mathbb{E}[X'Y']/\mathrm{Var}(X'), \quad c = \sqrt{\mathrm{Var}(Y') - \mathbb{E}[X'Y']\mathbb{E}[X'Y']^t/\mathrm{Var}(X')}$$

Alors X, Y sont des va gaussiennes centrée réduites et indépendantes. On a alors en utilisant le résultat que l'on vient de montrer :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X'f(Y')] &= a\mathbb{E}[Xf(cY+baX)] \\
&= a^2\mathbb{E}[b\cdot\nabla f(baX+cY)].
\end{aligned}$$

Donc, on a montré que pour tout vecteur gaussien (X, Y) centré :

$$\mathbb{E}[Xf(Y)] = \mathbb{E}[XY] \cdot \mathbb{E}[\nabla f(Y)].$$

□

Théorème 18. (Principes de comparaison) *Soient $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(Y_i)_{1\leq i\leq n}$ deux vecteurs gaussiens centrés tels que :*

$$\forall i, j, \quad \mathbb{E}[X_i X_j] \leq \mathbb{E}[Y_i Y_j].$$

Alors :

1. *pour toute fonction convexe $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$:*

$$\mathbb{E}\big[F\big(\sum_{i=1}^n p_i e^{X_i - \frac{1}{2}\mathbb{E}[X_i^2]}\big)\big] \leq \mathbb{E}\big[F\big(\sum_{i=1}^n p_i e^{Y_i - \frac{1}{2}\mathbb{E}[Y_i^2]}\big)\big],$$

2. *si l'on suppose également :*

$$\forall i, \quad \mathbb{E}[X_i^2] = \mathbb{E}[Y_i^2]$$

alors pour toute fonction croissante $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}\big[F\big(\sup_{i=1,\ldots,n} Y_i\big)\big] \leq \mathbb{E}\big[F\big(\sup_{i=1,\ldots,n} X_i\big)\big].$$

Preuve.

1. On peut toujours supposer que les vecteurs X et Y sont indépendants. On peut alors appliquer le lemme précédent en remarquant que la dérivée est de signe constant négatif.
2. Il suffit de vérifier le résultat pout $F = \mathbb{1}_{]x,\infty[}$ pour x fixé réel. Soit β un réel positif. En appliquant 1. à la fonction convexe $\phi(u) = e^{-e^{-\beta x}u}$, aux vecteurs $(\beta X_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(\beta Y_i)_{1\leq i\leq n}$ et $p_i = e^{\beta^2 \mathbb{E}[X_i^2]/2}$ on obtient :

$$\mathbb{E}\big[e^{-\sum_{i=1}^n e^{\beta(X_i - x)}}\big] \leq \mathbb{E}\big[e^{-\sum_{i=1}^n e^{\beta(Y_i - x)}}\big].$$

En faisant tendre β vers $+\infty$ on conclut :

$$\mathbb{P}\big(\sup_{i=1,\ldots,n} X_i < x\big) \leq \mathbb{P}\big(\sup_{i=1,\ldots,n} Y_i < x\big).$$

□

Corollaire 19. *Soient $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ et $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$ deux processus gaussiens centrés tels que leur noyaux de covariance soient continus et vérifient :*

$$\forall u, t \in \mathbb{R}, \quad f_X(t, u) \leq f_Y(t, u).$$

Soit μ une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}$. Alors, pour toute fonction convexe $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{E}\big[F\big(\int_a^b e^{X_t - \frac{1}{2}\mathbb{E}[X_t^2]}\mu(dt)\big)\big] \leq \mathbb{E}\big[F\big(\int_a^b e^{Y_t - \frac{1}{2}\mathbb{E}[Y_t^2]}\mu(dt)\big)\big].$$

Preuve. Il suffit juste de discrétiser les intégrales en sommes de Riemann et d'appliquer le 1. théorème de comparaison. □

Chapitre 3

Chaos multiplicatif gaussien

3.1 Introduction

On se place dans $\mathbb{R}^d$ pour $d \geq 1$. On note M_+ l'espace des mesures de Radon positives sur $\mathbb{R}^d$. Soit p une fonction réelle de type positif et continue sur $\mathbb{R}^d$. Ainsi p est la fonction de covariance d'un processus réel gaussien centré stationnaire X :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad p(x-y) = \mathbb{E}[X_x X_y]. \tag{3.1}$$

On associe au processus X le poids aléatoire :

$$P(x) = \exp\big(X_x - \frac{1}{2}\mathbb{E}[(X_x)^2]\big) = \exp\big(X_x - \frac{1}{2}p(0)\big). \tag{3.2}$$

Remarquons tout de suite que le poids est normalisé :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbb{E}[P(x)] = 1. \tag{3.3}$$

De plus, pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\mathbb{E}[(P(x))^\alpha] = \exp\big(\frac{1}{2}(\alpha^2 - \alpha)p(0)\big), \tag{3.4}$$

et en prenant la dérivée pour $\alpha = 1$ on obtient :

$$\mathbb{E}[P(x)\ln P(x)] = \frac{1}{2}p(0).$$

Le poids aléatoire P agit sur l'espace M_+ de la façon suivante. A toute mesure $\sigma \in M_+$, on associe la mesure aléatoire

$$P\sigma(dx) = P(x)\sigma(dx).$$

Pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$, on a :

$$\mathbb{E}[P\sigma(K)] = \sigma(K).$$

Notons λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Pour obtenir une mesure aléatoire stationnaire, il faut choisir $\sigma = \lambda$. L'objectif est alors de choisir un noyau p convenable afin d'assurer que son spectre de loi puissance soit non linéaire. Par exemple, pour $d = 1$, un calcul asymptotique montre que :

$$\mathbb{E}[(P\lambda[0,t])^\alpha] \overset{t\to 0}{\simeq} t^\alpha \exp\big(\frac{1}{2}(\alpha^2 - \alpha)p(0)\big).$$

Le spectre est linéaire. Ceci montre que la construction ci-dessus n'est pas assez générale. Il faudrait que la fonction p puisse diverger en 0, ce qui correspondrait à un processus gaussien qui admet une variance infinie. Ceci peut s'envisager en considérant X non pas comme un processus ponctuellement défini, mais comme une distribution aléatoire. Par contre il reste alors à définir des mesures aléatoires qui pourraient formellement s'interpréter comme :

$$K \mapsto \int_K \exp\left(X_x - \frac{1}{2}\mathbb{E}[(X_x)^2]\right) dx,$$

la difficulté étant de donner un sens à l'exponentielle d'une distribution. C'est ce que nous allons présenter dans ce chapitre.

3.2 Notations et premières propriétés

Considérons donc une suite $(p_n)_n$ de fonctions réelles positives, de type positif et continues sur $\mathbb{R}^d$. Chaque p_n peut donc être considéré comme la fonction de covariance d'un processus gaussien stationnaire et centré X^n. On suppose que les processus $(X^n)_n$ sont indépendants. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit le poids aléatoire

$$P^n(x) = \exp\left(X_x^n - \frac{1}{2}\mathbb{E}[(X_x^n)^2]\right) = \exp\left(X_x^n - \frac{1}{2}p_n(0)\right). \tag{3.5}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$q_n(x) = p_1(x) + p_2(x) + \cdots + p_n(x), \tag{3.6}$$

qui est donc la fonction de covariance du processus gaussien

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad Y_x^n = X^1 + X^2 + \cdots + X^n.$$

A ce processus, on associe le poids aléatoire

$$Q^n(x) = \exp\left(Y_x^n - \frac{1}{2}\mathbb{E}[(Y_x^n)^2]\right) = \exp\left(Y_x^n - \frac{1}{2}q_n(0)\right)$$

qui coïncide avec le produit

$$Q^n(x) = P^1(x) \times P^2(x) \times \cdots \times P^n(x).$$

Comme les p_n sont positifs, on peut poser

$$q(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(x). \tag{3.7}$$

Dans ce cas, on dit que q est de type σ-positif car c'est la somme d'une série de fonctions de type positif. Dans ce qui suit, on va s'intéresser au cas où

$$q(x) = \gamma^2 \ln_+ \frac{1}{|x|} + g(x)$$

où g est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$ et γ^2 est un paramètre, dit d'intermittence.

3.3 Convergence du chaos multiplicatif et action sur les mesures de Radon

A toute mesure $\sigma \in M_+$ et $n \geq 1$, on associe la mesure aléatoire

$$(Q^n\sigma)(dx) = Q^n(x)\sigma(dx).$$

Pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$, on a :

$$\mathbb{E}[P\sigma(K)] = \sigma(K).$$

Notons $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les variables $\{X_u^k; k \leq n, u \in \mathbb{R}^d\}$. Pour tout borélien A de $\mathbb{R}^d$, on a alors

$$\mathbb{E}[Q^n\sigma(A)|\mathcal{F}_{n-1}] = \int_A Q^{n-1}(x)\mathbb{E}[P^n(x)]\sigma(dx) = Q^{n-1}\sigma(A).$$

Ainsi pour tout borélien A de $\mathbb{R}^d$, la suite $(Q^n\sigma(A))_n$ est une martingale positive. Elle converge donc presque sûrement vers une variable aléatoire positive que l'on notera $Q\sigma(A)$. On vérifie facilement (!) que $Q\sigma$ est une mesure aléatoire sur $\mathbb{R}^d$. L'opérateur linéaire qui à $\sigma \in M_+$ associe $Q\sigma$ est appelé opérateur de chaos multiplicatif associé à la suite $(P^n)_n$.

3.4 Support et non-dégénérescence

Soit B une boule de $\mathbb{R}^d$. Notons $\widetilde{Q}^n\sigma$ le chaos

$$\widetilde{Q}^n\sigma(A) = \lim_{N\to\infty} \int_A P^{n+1}(x) \times \cdots \times P^N(x)\sigma(dx).$$

Remarquons que l'on a

$$Q\sigma(A) = \int_A Q^n(x)\,\widetilde{Q}^n\sigma(dx).$$

Comme on a $Q^n(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on en déduit que :

$$Q\sigma(B) > 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \widetilde{Q}^n\sigma(B) > 0.$$

En particulier on en déduit que l'ensemble $\{Q\sigma(B) > 0\}$ appartient à la tribu asymptotique des processus $(X^p)_p$. D'après la loi du $0-1$, il a donc probabilité 0 ou 1. En prenant une suite exhaustive de boules de $\mathbb{R}^d$, on en déduit

Proposition 20. *La probabilité que la mesure $Q\sigma$ soit triviale vaut* 0 *ou* 1.

Si la probabilité que $Q\sigma = 0$ vaut 1, on dit que Q est dégénéré en σ, sinon on dit que Q est non-dégénéré en σ.

Pour tout ensemble mesurable A, on a

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{E}[Q^n\sigma(A)] = \sigma(A)$$

et

$$\mathbb{E}[Q\sigma(A)] \leq \sigma(A).$$

Comme $(Q^n\sigma(A))_n$ est une martingale positive, celle-ci est régulière (ie converge dans L^1) si et seulement si $\mathbb{E}[Q\sigma(A)] = \sigma(A)$. Dans le cas où la martingale $(Q^n\sigma(A))_n$ est régulière, on dira que Q est fortement non dégénéré en σ.

Pour une mesure de Radon σ quelconque, définissons alors les mesures de Radon positives suivantes :

$$\sigma_0(A) = \mathbb{E}[Q\sigma(A)], \quad \sigma_1(A) = \sigma(A) - \sigma_0(A).$$

Notons que

$$\mathbb{E}[Q\sigma(A)|\mathcal{F}_n] = Q^n\sigma_0(A),$$

donc $(Q^n\sigma_0(A))_n$ est une martingle régulière. On en déduit que l'on a décomposé σ en une somme de deux mesures $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1$ telles que

$$\mathbb{E}[Q\sigma_0(A)] = \sigma_0(A), \quad \mathbb{E}[Q\sigma_1(A)] = 0,$$

c'est-à-dire :

Théorème 21. *Toute mesure $\sigma \in M_+(\mathbb{R}^d)$ peut être décomposée en une somme de deux mesures $\sigma_0, \sigma_1 \in M_+(\mathbb{R}^d)$ telles que :*
— *Q soit dégénéré en σ_1,*
— *$(Q^n\sigma_0(A))_n$ soit une martingale régulière.*

Etudions plus en détails le cas où la mesure σ est la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}^d$. Dans ce cas, la mesure $Q\lambda$ est stationnaire. S'il existe une boule B telle que

$$\mathbb{P}\big(\{Q\sigma(B) > 0\}\big) = 0$$

alors par stationnarité

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbb{P}\big(\{Q\sigma(x+B) > 0\}\big) = 0$$

donc, presque sûrement, la mesure est identiquement nulle. On a donc montré :

Proposition 22. *L'une des deux situations suivantes arrive avec probabilité 1 :*

1. *la mesure aléatoire $Q\lambda$ est identiquement nulle.*
2. *pour toute boule B de $\mathbb{R}^d$, on a*

$$Q\sigma(B) > 0.$$

En particulier, la mesure $Q\lambda$ a pour support $\mathbb{R}^d$.

Une question fondamentale à laquelle on tentera de répondre dans la section **??** est de savoir quand est-ce que la mesure est non nulle.

3.5 Unicité

On a vu comment définir un chaos multiplicatif

$$K \mapsto \int_K \exp\left(X_x - \frac{1}{2}\mathbb{E}[(X_x)^2]\right) dx,$$

où X est un champ gaussien de covariance donnée par :

$$q(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(x).$$

Dès lors se pose la question-clé de la théorie du chaos : si l'on dispose de 2 décompositions

$$q(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} p'_n(x),$$

est-ce que les 2 chaos associés à chacune de ces 2 décompositions coïncident en loi ? Si la réponse est positive, on pourra alors dire que la théorie du chaos multiplicatif est bien posée. Dans cette section, nous allons donc tenter de montrer

Théorème 23. *Soit σ une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^d$. Soient $(p_n)_n$ et $(p'_n)_n$ deux familles de noyaux continus positifs et de type positif telles que*

$$\sum_n p_n(x) = \sum_n p'_n(x).$$

Les 2 chaos multiplicatifs associés à chacune de ces 2 familles, notés $Q\sigma$ et $Q'\sigma$ ont même loi. Autrement dit, le choix de la décomposition en noyaux positifs de type positif n'influe pas sur la loi du chaos.

Preuve. Considérons 2 familles de noyaux continus positifs et de type positif tels que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} p'_n(x),$$

et dénotons par q_n et q'_n les sommes partielles respectives de chacune des 2 séries. Soit q la limite commune de ces 2 séries. Notons Q et Q' les opérateurs de chaos multiplicatif associés. Grâce au théorème **??**, nous allons montrer les chaos Q et Q' ont les mêmes mesures dégénérées et fortement dégénérées.

Suppsons donc par exemple que la martingale $(Q_n\sigma(A))_n$ soit uniformément intégrable. Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. La suite $(q_n - q'_N)_n$ converge en croissant vers $q - q'_N$ qui est une fonction positive. Donc la partie négative $((q_n - q'_N)_-)_n$ converge donc en décroissant vers 0. La théorème de Dini assure que cette convergence est uniforme. Pour $\epsilon > 0$ fixé, on a donc

$$q'_N(x) \le q_n(x) + \epsilon$$

sur K pour n assez grand. On peut donc appliquer le lemme **??**. On obtient

$$\mathbb{E}\Big[F\Big(Q'_N\sigma(A)\Big)\Big] \le \mathbb{E}\Big[F\Big(Q_n\sigma(A)e^{\sqrt{\epsilon}Y - \frac{\epsilon}{2}}\Big)\Big]$$

pour tout mesurable $A \subset K$, F convexe et Y variable aléatoire gaussienne centrée réduite indépendante de Q_n. Supposons de plus que F vérifie

$$F(\lambda x) \leq \lambda^\alpha F(x)$$

pour un α fixé positif et pour tout $\lambda > 0$. On a alors :

$$\mathbb{E}\Big[F\Big(Q'_N\sigma(A)\Big)\Big] \leq \mathbb{E}\Big[F\Big(Q_n\sigma(A)e^{\sqrt{\epsilon}Y-\frac{\epsilon}{2}}\Big)\Big] \leq \mathbb{E}\Big[F\Big(Q_n\sigma(A)\Big)\Big]e^{\frac{(a^2-a)}{2}\epsilon}. \tag{3.8}$$

Rappel (théorème de De la Vallée Poussin) : une martingale $(M_n)_n$ est uniformément intégrable si et seulement s'il existe une fonction convexe $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $F(x)/x \to \infty$ as $x \to \infty$, $F(\lambda x) \leq \lambda^\alpha F(x)$ et

$$\sup_n \mathbb{E}[F|M_n|] < +\infty.$$

Comme la martingale $(Q_n\sigma(A))_n$ est uniformément intégrable, il existe une fonction convexe F telle qu'indiquée ci-dessus. Finalement on a

$$\forall N, \quad \mathbb{E}\Big[F\Big(Q'_N\sigma(A)\Big)\Big] \leq \sup_n \mathbb{E}\Big[F\Big(Q_n\sigma(A)\Big)\Big]e^{\frac{(a^2-a)}{2}\epsilon} < +\infty.$$

Ceci prouve que la martingale $(Q'_n\sigma(A))_n$ est également uniformément intégrable. Nous avons donc montré

Lemme 24. *Les chaos Q et Q' ont les mêmes mesures fortement non-dégénérées.*

Suppsons maintenant qu'il existe une mesure σ dégénérée pour Q et non-dégénérée pour Q'. On peut alors décomposer σ en une somme $\sigma_0 + \sigma_1$ où σ_0 est fortement non-dégénérée pour Q' et σ_1 dégénérée pour Q'. Comme $\sigma_0 \leq \sigma$ et $Q\sigma = 0$, on a $Q\sigma_0 = 0$ ce qui est en contradiction avec le lemme précédent.

Nous avons montré

Lemme 25. *Les chaos Q et Q' ont les mêmes mesures dégénérées.*

Vu les lemmes précédents, nous pouvons toujours supposer que les deux martingales $(Q_n\sigma(K))_n$ et $(Q'_n\sigma(K))_n$ sont régulières pour tout compact K. Reprenons les résultats précédents, et supposons maintenant que la fonction F dans (**??**) est lipschitzienne. D'après le corollaire **??**, on a alors la convergence croissante suivante ($Q_n\sigma(A)$ converge dans L^1 et F est lipschitz) :

$$\mathbb{E}\Big[F\Big(Q\sigma(A)\Big)\Big] = \lim_{n\to\infty} \uparrow \mathbb{E}\Big[F\Big(Q_n\sigma(A)\Big)\Big].$$

D'après (**??**), on a alors :

$$\forall N, \quad \mathbb{E}\Big[F\Big(Q'_N\sigma(A)\Big)\Big] \leq \mathbb{E}\Big[F\Big(Q\sigma(A)\Big)\Big]e^{\frac{(a^2-a)}{2}\epsilon}.$$

Pour les mêmes raisons, on peut passer à la limite lorsque N tend vers ∞. Comme ϵ est arbitraire, on en déduit :

$$\mathbb{E}\Big[F\Big(Q'\sigma(A)\Big)\Big] \leq \mathbb{E}\Big[F\Big(Q\sigma(A)\Big)\Big].$$

En faisant un raionnement symmétrique, on obtient

$$\mathbb{E}\Big[F\Big(Q'\sigma(A)\Big)\Big] = \mathbb{E}\Big[F\Big(Q\sigma(A)\Big)\Big].$$

pour toute fonction convexe F lipschitzienne telle que $F(\lambda x) \leq \lambda^\alpha F(x)$. Donc aussi pour toutes les différences de telles fonctions et somme avec des constantes, donc pour les fonctions régulières à support compact. On en déduit que $Q\sigma(A)$ et $Q'\sigma(A)$ ont même loi. On peut faire la même preuve pour les sommes

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q(A_i) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q'(A_i)$$

pour des $\lambda_i \geq 0$. On montre alors que les chaos $Q\sigma$ et $Q'\sigma$ ont même loi. □

3.6 Multifractalité, invariance d'échelle stochastique exacte

Nous nous intéressons maintenant au cas où la mesure σ est la mesure de Lebesgue λ. Par abus de notation, on notera Q la mesure $Q\lambda$. L'intérêt de se concentrer sur la mesure de Lebesgue est que la mesure aléatoire stationnaire Q est alors stationnaire, au sens où sa loi est invariante par translations.

Notre étude porte sur les chaos associés à un noyau de covariance du type

$$q(x) = \lambda^2 \ln_+ \frac{1}{|x|} + g(x) \tag{3.9}$$

où g est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$. Par exemple, il est facile de voir que le noyau

$$K(x, y) = \int_{1/T}^{+\infty} \frac{e^{-u|x-y|}}{u}\, du$$

est de la forme (**??**) pour toute dimension $d \geq 1$. De plus,

Proposition 26. *K est de type sigma-positif : il peut être décomposé comme*

$$K(x, y) = \sum_{n\geq 0} K_n(x, y) \quad \textit{avec} \quad K_n(x, y) = \int_{2^n/T}^{2^{n+1}/T} \frac{e^{-u|x-y|}}{u}\, du,$$

chaque noyau K_n étant positif, défini-positif et continu.

Preuve. Il suffit juste de montrer que les K_n sont définis positifs, le reste étant évident. Tout d'abord on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{-u|t|} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{ue^{izt}}{u^2 + z^2}\, dz$$

Donc

$$\begin{aligned} K_n(r) &= \int_{2^n/T}^{2^{n+1}/T} \frac{e^{-ur}}{u}\, du \\ &= \int_{2^n/T}^{2^{n+1}/T} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{izr}}{u^2 + z^2}\, dz\, du \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{izr} \Big(\int_{2^n/T}^{2^{n+1}/T} \frac{1}{\pi(u^2 + z^2)}\, du \Big)\, dz. \end{aligned}$$

Donc K_n est la tranformée de Fourier d'une mesure positive, il est donc défini-positif. □

Kahane [**?**] a montré :

Théorème 27. — *Si $\lambda^2 \geq 2d$, le chaos multiplicatif de noyau (**??**) est dégénéré sur la mesure de Lebesgue.*
— *Si $\lambda^2 < 2d$, le chaos multiplicatif de noyau (**??**) est fortement non-dégénéré sur la mesure de Lebesgue.*

On démontrera une version similaire de ce théorème dans la section suivante. Les mesures issues de ces chaos ont un caractère multifractal :

Proposition 28. *Soit Q la mesure issue du chaos multiplicatif de noyau (**??**) pour un $\lambda^2 < 2d$. La mesure Q possède un spectre de loi puissance non-linéaire : pour tout $p \geq 0$ tel que Q possède un moment d'ordre p (donc en particulier pour $p \in [0,1]$), il existe une constante $D_p > 0$ telle que*

$$\mathbb{E}\big[Q(tA)^p\big] \simeq D_p t^{\xi(p)} \quad \textit{quand } t \to 0$$

où A est un ouvert borné non vide et

$$\forall p \in \mathbb{R}, \quad \xi(p) = \big(d + \frac{\lambda^2}{2}\big)p - \frac{\lambda^2}{2}p^2.$$

Preuve. En toute généralité, on peut toujours supposer que A est inclus dans $[0,1]^d$. Pour $1 > t > 0$, notons $\bar{Q}_t$ le chaos associé au noyau $q(\cdot/t)$ et définissons :

$$g_t = \sup_{|r| \leq t} \mid g(r) - g(r/t) \mid \tag{3.10}$$

Notons que pour $|r| \leq t$, on a :

$$q(r) \geq q(r/t) + \lambda^2 \ln \frac{1}{t} - g_t.$$

Soit $p \geq 1$. Par le corollaire **??** (ou une conséquence facile), on a

$$\mathbb{E}\left[Q(tA)^p\right] \geq \mathbb{E}\left[\left(e^{\sqrt{\lambda^2 \ln \frac{1}{t} - g_t}Y - \frac{1}{2}(\lambda^2 \ln \frac{1}{t} - g_t)}\bar{Q}^t(tA)\right)^p\right]$$

où Y est une loi normale centrée réduite indépendante de $\bar{Q}^t$. D'où

$$\mathbb{E}\left[Q(tA)^p\right] \geq e^{\frac{(p^2-p)(\lambda^2 \ln \frac{1}{t} - g_t)}{2}} \mathbb{E}\left[\bar{Q}^t(tA)^p\right].$$

D'autre part, $\bar{Q}^t(tA) = t^d Q(A)$ en loi. Finalement, on obtient

$$\mathbb{E}\left[Q(tA)^p\right] \geq \mathbb{E}\left[Q(A)^p\right] t^{dp} e^{\frac{(p^2-p)(\lambda^2 \ln \frac{1}{t} - g_t)}{2}}.$$

Comme $\mathbb{E}\left[Q(A)^p\right] < +\infty$, on en déduit que pour tout $t > 0$

$$\mathbb{E}\left[Q(tA)^p\right] \geq \mathbb{E}\left[Q(A)^p\right] t^{\xi(p)} e^{-\frac{(p^2-p)g_t}{2}}.$$

En procédant de même, on montre l'inégalité inverse, d'où

$$\mathbb{E}\left[Q(A)^p\right] t^{\xi(p)} e^{-\frac{(p^2-p)g_t}{2}} \leq \mathbb{E}\left[Q(tA)^p\right] \leq \mathbb{E}\left[Q(A)^p\right] t^{\xi(p)} e^{\frac{(p^2-p)g_t}{2}}.$$

Comme $g_t \to$ quand $t \to 0$, le résultat suit pour $p \geq 1$. La démonstration est identique pour $p < 1$. □

Nous allons maintenant nous intéresser au cas où g est constante sur un voisinage de 0, voire sur $\mathbb{R}^d$ tout entier. On verra que ces mesures possèdent une propriété d'auto-similarité locale, appelée invariance d'échelle stochastique.

Théorème 29. — *Pour $d \leq 2$, la fonction*

$$x \mapsto \lambda^2 \ln_+ \frac{T}{|x|} \tag{3.11}$$

est de type sigma-positif.

— *Pour $d \geq 3$, on peut trouver une fonction isotrope g constante sur un voisinage de 0 telle que la fonction*

$$q(x) = \lambda^2 \ln_+ \frac{T}{|x|} + g(x) \tag{3.12}$$

soit de type sigma-positif.

Preuve. Un calcul direct montre que l'on a :

$$\ln_+ \frac{T}{|x|} = \int_0^{+\infty} (t - |x|)_+ \nu_T(dt)$$

où la mesure ν_T est donnée par :

$$\nu_T(dt) = 1\!\!1_{[0,T]}(t) \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{T}\delta_T(dt).$$

Donc pour tout $\mu > 0$, on a :

$$\ln_+ \frac{T}{|x|} = \frac{1}{\mu} \ln_+ \frac{T^\mu}{|x|^\mu} = \int_0^{+\infty} (t - |x|^\mu)_+ \nu_{T^\mu}(dt).$$

On est donc amené à considérer les $\mu > 0$ tels que la fonction $(1 - |x|^\mu)_+$ soit de type positif, appelé problème de Kuttner-Golubov (voir [**?**]).

Pour $d = 1$, il est direct de vérifier que la fonction $(1 - |x|)_+$ est de type positif. On peut donc écrire

$$\lambda^2 \ln_+ \frac{T}{|x|} = \sum_{n \geq 1} K_n(x)$$

avec

$$K_n(x) = \int_{\frac{T}{n}}^{\frac{T}{n-1}} (t - |x|)_+ \nu_T(dt).$$

En dimension 2, Pasenchenko [**?**] a démontré que la fonction $(1 - |x|^{1/2})_+$ est de type positif sur $\mathbb{R}^2$. On peut donc écrire

$$\lambda^2 \ln_+ \frac{T}{|x|} = \sum_{n \geq 1} K_n(x)$$

avec

$$K_n(x) = \gamma^2 \int_{\frac{T^{1/2}}{n^{1/2}}}^{\frac{T^{1/2}}{(n-1)^{1/2}}} (t - |x|^{\mu})_+ \nu_{T^{1/2}}(dt).$$

En dimension $1, 2$, on a donc montré que la fonction $\lambda^2 \ln_+ \frac{T}{|x|}$ est de type positif. En dimension 3, le problème reste ouvert alors qu'en dimension plus grande que 4, on sait que cette fonction n'est pas de type sigma-positif.

Traitons maintenant la deuxième partie du théorème et plaçons nous en dimension $d \geq 3$. Denotons par S la sphere de $\mathbb{R}^d$ et σ la mesure superficielle sur la sphere telle que $\sigma(S) = 1$. En particulier, nous rappelons que cette mesure est invariante par rotations. Définissons la fonction

$$F(x) = \lambda^2 \int_S \ln_+ \frac{T}{|\langle x, s\rangle|} \sigma(ds). \tag{3.13}$$

Comme σ est invariante par rotations, la foction F est isotrope. Calculons la sur un voisinage de 0. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $|x| \leq T$. On peut écrire $x = |x|e$ où $e \in S$. On a alors

$$F(x) = \lambda^2 \int_S \ln \frac{T}{|x||\langle e, s\rangle|} \sigma(ds) = \lambda^2 \ln \frac{T}{|x|} + \int_S \ln \frac{1}{|\langle e, s\rangle|} \sigma(ds).$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que la fonction $x \mapsto \int_S \ln \frac{1}{|\langle e,s\rangle|} \sigma(ds)$ est bornée sur $\mathbb{R}^d$. On peut arriver à déterminer la loi de la variable $\langle e, s\rangle$ sous la loi uniforme sur la sphère de la manière suivante :

Lemme 30. *$\langle e, s\rangle$ a la même loi que*

$$\frac{Z_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^d Z_i^2}}$$

où les Z_i sont des lois normales centrées réduites iid. En particulier, la variable aléatoire $|\langle e, s\rangle|$ admet pour densité :

$$\frac{2\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{d-1}{2})} (1 - y^2)^{\frac{d-3}{2}} \mathbb{1}_{[0,1]}(y)\, dy.$$

A l'aide du lemme on obtient

$$\int_S \ln \frac{1}{|\langle e, s\rangle|} \sigma(ds) = -\frac{2\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{d-1}{2})} \int_0^1 \ln y (1 - y^2)^{\frac{d-3}{2}}\, dy.$$

En particulier, on en déduit que la fonction $x \mapsto \int_S \ln \frac{1}{|\langle e,s\rangle|} \sigma(ds)$ est finie constante sur la boule $B(0, T)$. $\square$

Preuve du lemme **??**. Soit $(Z_i)_{1 \leq i \leq d}$ soient des variables aléatoires normales centrées réduites indépendantes. Posons pour $1 \leq i \leq d$,

$$\zeta_i = \frac{Z_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n Z_j^2}}.$$

Commençons par vérifier que la vecteur aléatoire $(\zeta_1, \ldots, \zeta_d)$ suit la loi uniforme sur la sphère de $\mathbb{R}^d$. Pour rappel, la mesure uniforme sur la sphère est la seule mesure sur la sphère invariante par rotations et de masse 1. Notre vecteur aléatoire a bien une masse égale à 1. Il suffit donc de vérifier qu'il est invariant par rotations. Or ceci résulte juste du fait que le vecteur gaussien $(Z_i)_{1\leq i\leq d}$ est invariant par rotations puisque sa matrice de covariance vaut l'identité.

Pour calculer la densité de $|\zeta_1|$, il suffit d'avoir celle de $|\zeta_1^2|^2$. Or,

$$\zeta_1^2 = \frac{Z_1^2}{\sum_{i=1}^n Z_j^2} \overset{loi}{=} \frac{Y}{Y+Z}$$

où Y, Z sont des variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois du chi 2 de paramètre 1 et $d-1$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(\zeta_1^2)] &= \mathbb{E}\big[f\big(\frac{Y}{Y+Z}\big)\big] \\
&= \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+} f\Big(\frac{x}{x+y}\Big)\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2})}x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\frac{1}{2^{\frac{d-1}{2}}\Gamma(\frac{d-1}{2})}y^{\frac{d-1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}\,dx\,dy \\
&= \frac{1}{2^{\frac{d}{2}}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{d-1}{2})}\int_0^1 f(u)\frac{1}{\sqrt{u}(1-u)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}_+} e^{-\frac{y}{2(1-u)}}y^{\frac{d-2}{2}}\,dy\,du \\
&= \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{d-1}{2})}\int_0^1 f(u)u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{\frac{d-3}{2}}\,du.
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(|\zeta_1|)] &= \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{d-1}{2})}\int_0^1 f(\sqrt{u})u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{\frac{d-3}{2}}\,du \\
&= \frac{2\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{d-1}{2})}\int_0^1 f(y)(1-y^2)^{\frac{d-3}{2}}\,dy
\end{aligned}$$

□

Si un chaos Q admet pour noyau de covariance une fonction q de la forme (**??**) ou (**??**), alors la mesure admet une propriété importante : l'**invariance d'échelle stochastique**. C'est une propriété d'autosimilarité où le facteur multiplicatif est stochastique. Plus précisément :

Théorème 31. *Soit q un noyau de covariance de type sigma-positif de la forme*

$$q(x) = \lambda^2 \ln_+ \frac{T}{|x|} + g(x) \tag{3.14}$$

où g est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$, constante sur la boule $B(0,T)$. Alors le chaos associé Q vérifie la propriété :

$$\forall 0<\alpha<1, \quad (Q(\alpha A))_{A\subset B(0,T)} \overset{loi}{=} \alpha^d e^{Y_\alpha - \frac{1}{2}\mathbb{E}[Y_\alpha^2]}(Q(A))_{A\subset B(0,T)},$$

*où Y_α est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $\lambda^2\ln\frac{1}{\alpha}$ indépendante de $(Q(A))_{A\subset B(0,T)}$. On dit que Q est **stochastiquement invariant d'échelle**.*

Preuve. Soit

$$q(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(x)$$

une décomposition de q en noyaux continus positifs et de type positif. On garde les notations introduites dans la section **??**.

On a pour tout $A \subset B(0,T)$:

$$\begin{aligned} Q_n(\alpha A) &= \int_{\alpha A} e^{Y_x^n - \frac{1}{2}\mathbb{E}[(Y_x^n)^2]}\, dx \\ &= \alpha^d \int_A e^{Y_{\alpha z}^n - \frac{1}{2}\mathbb{E}[(Y_{\alpha z}^n)^2]}\, dz. \end{aligned}$$

En passant à la limite en $n \to \infty$, on voit que $Q(\alpha\cdot)$ est, à un facteur multiplicatif α^d près, un chaos multiplicatif gaussien de noyau $q(\alpha x)$ sur $B(0,T)$. Or sur $B(0,T)$,

$$q(\alpha x) = \lambda^2 \ln \frac{1}{\alpha} + \lambda^2 \ln_+ \frac{T}{|x|} + g(\alpha x) = \lambda^2 \ln \frac{1}{\alpha} + q(x).$$

Or, si on considère une variable aléatoire gaussienne centrée Y_α de variance $\lambda^2 \ln \frac{1}{\alpha}$ et P_α le poids correspondant tel qu'indiqué dans la section **??**, un tel chaos s'obtient comme la limite de $P_\alpha Q^n$ lorsque n tend vers l'infini. Or cette limite est trivialement égale à $P_\alpha Q$, ce qui prouve le théorème. □

3.6.1 Utilisation en finance

Par exemple en dimension 1, on peut choisir

$$q(x) = \lambda^2 \ln_+ \frac{T}{|x|}$$

pour un $\lambda^2 < 2$. définir un processus $M : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par

$$\forall t \geq 0, \quad M_t = Q([0,t]).$$

Si l'on considère $0 < \alpha < 1$, on a l'égalité en loi des processus

$$(M_{\alpha t})_{0 \leq t \leq T} \overset{loi}{=} \alpha e^{Y_\alpha - \frac{\lambda^2}{2} \ln \frac{1}{\alpha}} (M_t)_{0 \leq t \leq T}.$$

Pour obtenir une martingale, lidée est de considérer un mouvement brownien B et de définir le log-prix X par

$$X_t = \sqrt{\sigma} B_{M_t}.$$

Typiquement les valeurs observées pour les indices sont de l'ordre de $\sigma \simeq 10^{-2}$, $\lambda^2 \simeq 0,03$ et $T \simeq 5 - 10$ ans (en fait, il y a un gros problème théorique au niveau de l'estimation de T : on ne sait toujours pas quelle est la bonne valeur à choisir.)

Le processus X ainsi obtenu possède de nombreuses propriétés observées sur les marchés :
— X est une martingale continue de carré intégrable. La volatilité est alors définie comme les variations quadratiques de la martingale c'est-à-dire σM_t.
— Corrélation longue portée de la volatilité :

$$\mathbb{E}[M_1(M_{t+1} - M_t)] = \int_0^1 \int_t^{t+1} e^{\lambda^2 \ln_+ \frac{T}{|r-u|}}\, dr\, du \simeq \frac{T^{\lambda^2}}{t^{\lambda^2}}.$$

— La distribution de la volatilité $\langle X\rangle_{s,t}$ entre les instants s et t suit approximativement une loi lognormale...

— auto-similarité :

$$(X_{\alpha t})_{0\leq t\leq T} \overset{loi}{=} \sqrt{\alpha} e^{\frac{1}{2}Y_\alpha - \frac{\lambda^2}{4}\ln\frac{1}{\alpha}} (X_t)_{0\leq t\leq T}.$$

3.7 Moments

Théorème 32. *Soit Q le chaos multiplicatif associé à un noyau q de la forme* (**??**). *Q est dégénéré si $\lambda^2 \geq 2d$ et fortement non-dégénéré si $\lambda^2 < 2d$. Dans ce dernier cas, on a :*

$$\mathbb{E}[Q(K)^p] < +\infty \iff \lambda^2 < \frac{2d}{p}. \tag{3.15}$$

Proof. On va faire la preuve dans un cadre simplifié. On va se placer en dimension 1 et on ne va prouver que l'équation (**??**). Supposons donc $\mathbb{E}[Q([0,1])^p] < +\infty$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathbb{E}\left[Q[0;1]^p\right] = \mathbb{E}\left[\left(Q[0;\frac{1}{n}] + Q[\frac{1}{n};\frac{2}{n}] + \cdots + Q[\frac{(n-1)}{n};1]\right)^p\right] \tag{3.16}$$

$$\geq \mathbb{E}\left[\left(Q[0;\frac{1}{n}]\right)^p + \left(Q[\frac{1}{n};\frac{2}{n}]\right)^p + \cdots + \left(Q[\frac{(n-1)}{n};1]\right)^p\right] \tag{3.17}$$

$$= n\mathbb{E}\left[\left(Q[0;\frac{1}{n}]\right)^p\right] \tag{3.18}$$

On a utilisé la stationnarité de la mesure Q à la seconde ligne.

Notons $\bar{Q}_n$ le chaos associé au noyau $q(n\cdot)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, définissons :

$$g_n = \sup_{|r|\leq 1/n} \mid g(r) - g(nr) \mid \tag{3.19}$$

Notons que pour $|r| \leq 1/n$, on a :

$$q(r) \geq q(nr) + \lambda^2 \ln n - g_n.$$

Par le corollaire **??** (ou une conséquence facile), on a

$$\mathbb{E}\left[\left(Q[0;\frac{1}{n}]\right)^p\right] \geq \mathbb{E}\left[\left(e^{\sqrt{\lambda^2\ln n - g_n}Y - \frac{1}{2}(\lambda^2\ln n - g_n)}\bar{Q}^n[0;\frac{1}{n}]\right)^p\right]$$

où Y est une loi normale centrée réduite indépendante de $\bar{Q}^n$. D'où

$$\mathbb{E}\left[\left(Q[0;\frac{1}{n}]\right)^p\right] \geq e^{\frac{(p^2-p)(\lambda^2\ln n - g_n)}{2}} \mathbb{E}\left[\left(\bar{Q}^n[0;\frac{1}{n}]\right)^p\right].$$

D'autre part, $\bar{Q}^n[0;\frac{1}{n}] = \frac{1}{n}Q[0;1]$ en loi. Finalement, on obtient

$$\mathbb{E}\left[Q[0;1]^p\right] \geq \mathbb{E}\left[Q[0;1]^p\right] n^{1-p} e^{\frac{(p^2-p)(\lambda^2\ln n - g_n)}{2}}.$$

Comme $\mathbb{E}\left[Q[0;1]^p\right] < +\infty$, on en déduit que pour tout n

$$n^{1-p} e^{\frac{(p^2-p)(\lambda^2 \ln n - g_n)}{2}} \leq 1.$$

Comme $(g_n)_n$ est une suite bornée, en prenant la limite lorsque $n \to \infty$, on en déduit

$$\lambda^2 \leq \frac{2}{p}.$$

On n'a pas prouvé l'inégalité stricte mais celle-ci se démontre suivant les mêmes idées.

Réciproquement, supposons que $\lambda^2 < \frac{2}{p}$. D'après le corollaire **??**, il suffit de considérer le cas où la fonction g de (**??**) est nulle. Introduisons les poids indépendants

$$P_n^T(x) = \exp\left(X_x^n - \frac{1}{2}\mathbb{E}[(X_x^n)^2]\right)$$

où chaque X^n est un processus Gaussien centré stationnaire de covariance (voir théorème **??**)

$$p_n(x) = \lambda^2 \int_{\frac{T}{n}}^{\frac{T}{n-1}} (t - |x|)_+ \nu_T(dt)$$

où

$$\nu_T(dt) = 1\!\!1_{[0,T]}(t)\frac{dt}{t^2} + \frac{1}{T}\delta_T(dt).$$

En gardant les notations de la section **??**, on a alors

$$q_n^T(x) = \lambda^2 \int_{\frac{T}{n}}^{+\infty} (t - |x|)_+ \nu_T(dt) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad T \leq |x| \\ \lambda^2 \ln \frac{T}{|x|} & \text{si} \quad \frac{T}{n} \leq |x| \leq T \\ \lambda^2 \ln n + \lambda^2\big(1 - \frac{n|x|}{T}\big) & \text{si} \quad |x| \leq \frac{T}{n} \end{cases}$$

Considérons $m \geq 1$. On remarque que pour tout $N \geq 1$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad q_{N2^m}^T(x) \leq \lambda^2 \ln 2^m + q_N^{T/2^m}(x). \tag{3.20}$$

D'après le corollaire **??**, on en déduit :

$$\mathbb{E}\left[Q_{N2^m}^T[0;T]^p\right] \leq e^{\frac{p^2-p}{2}\lambda^2 \ln 2^m}\mathbb{E}\left[Q_N^{T/2^m}[0;T]^p\right].$$

On introduit la partition suivante du segment $[0, T]$:

$$I_i^m = [\frac{iT}{2^m}; \frac{(i+1)T}{2^m}[$$

pour $m \geq 1$ et $0 \leq i \leq 2^m - 1$. Par l'inégalité de Minkowski, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Q_N^{T/2^m}[0;T]^p\right] &= \mathbb{E}\left[\Big(\sum_{0\leq i\leq 2^m-1} Q_N^{T/2^m}(I_i^m)\Big)^p\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\Big(\sum_{0\leq 2i\leq 2^m-1} Q_N^{T/2^m}(I_{2i}^m) + \sum_{0\leq 2i+1\leq 2^m-1} Q_N^{T/2^m}(I_{2i+1}^m)\Big)^p\right] \\
&\leq \left(\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{0\leq 2i\leq 2^m-1} Q_N^{T/2^m}(I_{2i}^m)\Big)^p\Big]^{1/p} + \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{0\leq 2i+1\leq 2^m-1} Q_N^{T/2^m}(I_{2i+1}^m)\Big)^p\Big]^{1/p}\right)^p.
\end{aligned}$$

Par stationnarité, les variables $\sum_{0\leq 2i+1\leq 2^m-1} Q_N^{T/2^m}(I_{2i+1}^m)$ et $\sum_{0\leq 2i+1\leq 2^m-1} Q_N^{T/2^m}(I_{2i+1}^m)$ ont même loi. On en déduit :

$$\mathbb{E}\left[Q_{N2^m}^T[0;T]^p\right] \leq 2^{p+m\lambda^2\frac{p^2-p}{2}}\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{0\leq 2i\leq 2^m-1} Q_N^{T/2^m}(I_{2i}^m)\Big)^p\Big].$$

Soit n un entier tel que $n-1<p\leq n$. Par sous-additivité de la fonction $x^{p/n}$, on a :

$$\mathbb{E}\left[Q_{N2^m}^T[0;T]^p\right] \leq 2^{p+m\lambda^2\frac{p^2-p}{2}}\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{0\leq 2i\leq 2^m-1} Q_N^{T/2^m}(I_{2i}^m)^{p/n}\Big)^n\Big].$$

Si l'on dévelope par rapport à la puissance n, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[Q_{N2^m}^T[0;T]^p\right] \leq & 2^{p+m\lambda^2\frac{p^2-p}{2}}\mathbb{E}\Big[\sum_{0\leq i_1,\dots,i_n\leq 2^{m-1}-1} Q_N^{T/2^m}(I_{2i_1}^m)^{p/n}\times\cdots\times Q_N^{T/2^m}(I_{2i_n}^m)^{p/n}\Big]\\ =&2^{p+m\lambda^2\frac{p^2-p}{2}}2^{m-1}\mathbb{E}\big[Q_N^{T/2^m}(I_0^m)^p\big]\\ &+2^{p+m\lambda^2\frac{p^2-p}{2}}\mathbb{E}\Big[\sum_{0\leq i_1,\dots,i_n\leq 2^{m-1}-1}^{*} Q_N^{T/2^m}(I_{2i_1}^m)^{p/n}\times\cdots\times Q_N^{T/2^m}(I_{2i_n}^m)^{p/n}\Big].\end{aligned}$$

où $\sum_{0\leq i_1,\dots,i_n\leq 2^{m-1}-1}^{*}$ désigne la somme sur les indices $i_1,\dots i_n$ qui ne sont pas tous égaux. On remarque que $Q_N^{T/2^m}(I_0^m)$ a même loi que $Q_N^T([0,T])$ d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[Q_{N2^m}^T[0;T]^p\right] \leq & 2^{p+m\lambda^2\frac{p^2-p}{2}}2^{m-1}2^{-mp}\mathbb{E}\big[Q_N^T([0,T])^p\big]\\ &+2^{p+m\lambda^2\frac{p^2-p}{2}}\mathbb{E}\Big[\sum_{0\leq i_1,\dots,i_n\leq 2^{m-1}-1}^{*} Q_N^{T/2^m}(I_{2i_1}^m)^{p/n}\times\cdots\times Q_N^{T/2^m}(I_{2i_n}^m)^{p/n}\Big].\end{aligned}$$

Chaque terme de la somme $\sum_{0\leq i_1,\dots,i_n\leq 2^{m-1}-1}^{*}$ est de la forme

$$\mathbb{E}\Big[Q_N^{T/2^m}(I_{2i_1}^m)^{ps_1/n}\times\cdots\times Q_N^{T/2^m}(I_{2i_k}^m)^{ps_k/n}\Big]$$

où $s_1+\cdots+s_k=n$ (avec $1\leq s_i\leq n-1$) et les indices $i_1,\dots,i_k$ sont tous distincts. De plus, les intervalles $I_{2i_q}^m$ sont tous à distance $T/2^m$ les uns des autres, donc les variables $Q_N^{T/2^m}(I_{2i_1}^m),\dots,Q_N^{T/2^m}(I_{2i_k}^m)$ sont indépendantes. Comme $ps_i/n\leq n-1$, on en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[Q_N^{T/2^m}(I_{2i_1}^m)^{ps_1/n}&\times\cdots\times Q_N^{T/2^m}(I_{2i_k}^m)^{ps_k/n}\Big]\\ =&\mathbb{E}\Big[Q_N^{T/2^m}(I_{2i_1}^m)^{ps_1/n}\Big]\times\cdots\times\mathbb{E}\Big[Q_N^{T/2^m}(I_{2i_k}^m)^{ps_k/n}\Big]\\ \leq&\mathbb{E}\Big[Q_N^{T/2^m}(I_{2i_1}^m)^{n-1}\Big]^{\frac{ps_1}{n(n-1)}}\times\cdots\times\mathbb{E}\Big[Q_N^{T/2^m}(I_{2i_k}^m)^{n-1}\Big]^{\frac{ps_k}{n(n-1)}}\\ =&\mathbb{E}\Big[Q_N^{T/2^m}(I_0^m)^{n-1}\Big]^{\frac{p}{n-1}}\\ =&2^{-m(n-1)}\mathbb{E}\Big[Q_N^T([0,T])^{n-1}\Big]^{\frac{p}{n-1}}.\end{aligned}$$

Il y a au plus $2^{(m-1)n}$ termes de la sorte. En rassemblant ce qui précède, on a donc montré

$$\mathbb{E}\left[Q_{N2^m}^T[0;T]^p\right] \leq 2^{p-1+m\left(\lambda^2\frac{p^2-p}{2}+1-p\right)}\mathbb{E}\big[Q_N^T([0,T])^p\big]+2^{m-n}\mathbb{E}\Big[Q_N^T([0,T])^{n-1}\Big]^{\frac{p}{n-1}}$$

De plus, la suite $(Q_n^T[0;T]^p)_n$ est une sous-martingale positive donc

$$\mathbb{E}\big[Q_{N2^m}^T([0,T])^p\big] \geq \mathbb{E}\big[Q_N^T([0,T])^p\big].$$

On peut donc écrire

$$\mathbb{E}\left[Q_N^T[0;T]^p\right] \leq 2^{p-1+m\left(\lambda^2\frac{p^2-p}{2}+1-p\right)}\mathbb{E}\big[Q_N^T([0,T])^p\big] + 2^{m-n}\mathbb{E}\Big[Q_N^T([0,T])^{n-1}\Big]^{\frac{p}{n-1}}$$

De plus, on peut trouver m tel que $2^{p-1+m\left(\lambda^2\frac{p^2-p}{2}+1-p\right)}$ soit inférieur strictement à 1 car $\lambda^2\frac{p^2-p}{2} + 1-p < 0$ vu que $\lambda^2 < 2/p$ par hypothèse. Pour ce m, on a

$$\mathbb{E}\left[Q_N^T[0;T]^p\right] \leq \frac{2^{m-n}}{1-2^{p-1+m\left(\lambda^2\frac{p^2-p}{2}+1-p\right)}}\mathbb{E}\Big[Q_N^T([0,T])^{n-1}\Big]^{\frac{p}{n-1}} \tag{3.21}$$

Pour clore la preuve, il suffit d'avoir $\sup_N \mathbb{E}\Big[Q_N^T([0,T])^{n-1}\Big] < +\infty$. Ceci peut se faire par récurrence sur n.

• Si $1 < p \leq 2$ et $\lambda^2 < 2/p$ alors $n = 2$ et $\sup_N \mathbb{E}\Big[Q_N^T([0,T])\Big] = T < +\infty$. Donc le résultat est montré pour $1 < p \leq 2$.

• Si $2 < p \leq 3$ et $\lambda^2 < 2/p$ alors on a $\lambda^2 < 2/2$ et $n = 3$ donc on vient de montrer que $\sup_N \mathbb{E}\Big[Q_N^T([0,T])^2\Big] < +\infty$. Vu (**??**), on a $\sup_N \mathbb{E}\Big[Q_N^T([0,T])^p\Big] < +\infty$. Et ainsi de suite, ce qui termine la preuve. □

Bibliographie

[1] Bacry E., Muzy J.F. : Log-infinitely divisible multifractal processes, *Comm. Math. Phys.*, **236** (2003) no.3, 449-475.

[2] Barral, J., Mandelbrot, B.B. : Multifractal products of cylindrical pulses, *Probab. Theory Relat. Fields* **124** (2002), 409-430.

[3] Castaing B., Gagne Y., Hopfinger E.J. : Velocity probability density-functions of high Reynolds-number turbulence, *Physica D* **46** (1990) 2, 177-200.

[4] Castaing B., Gagne Y., Marchand M. : Conditional velocity pdf in 3-D turbulence, *J. Phys. II France* **4** (1994), 1-8.

[5] Daley D.J., Vere-Jones D., An introduction to the theory of point processes volume 2, Probability and its applications, Springer, 2nd edition, 2007.

[6] Dudley R.M. : Sample functions of the Gaussian process, *Annals of Probability* **1** vol.1 (1973), 66-103.

[7] Duplantier, B., Sheffield, S. : Liouville Quantum Gravity and KPZ, available on arxiv at the URL http ://arxiv.org/abs/0808.1560.

[8] Emilion R. : Mean-bounded operators and mean ergodic theorems, *Journal of Functional Analysis* **61** (1985), 1-14.

[9] Frisch, U. : *Turbulence*, Cambridge University Press (1995).

[10] Gneiting, T. : Criteria of Polya type for radial positive definite functions, Proceedings of the American Mathematical Society, 129 no. 8 (2001), 2309-2318.

[11] Kahane, J.-P. : Sur le chaos multiplicatif, *Ann. Sci. Math. Québec*, **9** no.2 (1985), 105-150.

[12] Knizhnik, V.G., Polyakov, A.M., Zamolodchikov, A.B. : Fractal structure of 2D-quantum gravity, *Modern Phys. Lett A*, **3**(8) (1988), 819-826.

[13] Mandelbrot B.B. : Intermittent turbulence in self-similar cascades, divergence of high moments and dimension of the carrier, *J. Fluid. Mech.* **62** (1974), 331-358.

[14] Pasenchenko, O. Yu. : Sufficient conditions for the characteristic function of a two-dimensional isotropic distribution, Theory Probab. Math. Statist., 53 (1996), 149-152.

[15] Rajput, B., Rosinski, J. : Spectral representations of infinitely divisible processes, *Probab. Theory Relat. Fields* **82** (1989), 451–487.

[16] Robert, R., Vargas, V. : Gaussian Multiplicative Chaos revisited, to appear in the Annals of Probability, available on arxiv at the URL http ://arxiv.org/abs/0807.1036v1.

[17] Rhodes, R. Vargas, V. : KPZ formula for log-infinitely divisible multifractal random measures, available on arxiv at the URL http ://arxiv.org/abs/0807.1036.

[18] Rhodes, R. Vargas, V. : Multidimensional multifractal random measures, *Electronic Journal of Probability*.

[19] Schmitt, F., Lavallee, D., Schertzer, D., Lovejoy, S. : Empirical determination of universal multifractal exponents in turbulent velocity fields, *Phys. Rev. Lett.* **68** (1992), 305-308.

[20] She, Z.S., Leveque, E. : Universal scaling laws in fully developed turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994), 336-339.

[21] Stolovitzky, G., Kailasnath, P., Sreenivasan, K.R. : Kolmogorov's Refined Similarity Hypotheses, *Phys. Rev. Lett.* **69**(8) (1992), 1178-1181.