Cours d'homogénéisation

Rhodes Rémi

4 mars 2010

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Pour pouvoir étudier les phénomènes physiques intervenant dans la nature, on a tout d'abord besoin d'un modèle permettant de déterminer les équations régissant ces phénomènes, et ensuite on a besoin de pouvoir calculer (numériquement) les solutions de ces équations. Or, il arrive parfois que la puissance de calcul dont on dispose ne soit pas suffisante, non pas en raison d'algorithmes de calcul peu élaborés mais en raison de la complexité intrinsèque du problème, par exemple lorsque le milieu dans lequel le phénomène physique est étudiée présente lui-même une très grande complexité.

Le but de la théorie de l'homogénéisation est d'obtenir une approximation homogéne (simple) d'un milieu décrit par des propriétés microscopiques supposées trés hétérogénes. Les champs d'application sont variés : étude des sous-sols (diffusion du pétrole en milieu poreux), propriétés des matériaux composites, matériaux céramiques, matériaux supraconducteurs suprafilamentaires, étude de polyméres...

Par exemple, l'étude d'une diffusion de la chaleur dans ces milieux là, va se modéliser de la façon suivante :

$$\partial_t u^\epsilon(t,x) = \frac{1}{2}\mathrm{div}_x\Big(a\big(\frac{x}{\epsilon}\big)\nabla u^\epsilon(t,x)\Big)$$

avec une condition initiale donnée du type $u^\epsilon(0,x) = f(x)$. Le paramètre ϵ est introduit pour rendre compte de la petite taille des hétérogénéités du milieu. Pour trouver une approximation de la solution u^ϵ, l'objectif est donc de faire tendre ϵ vers 0 et d'identifier une éventuelle limite.

La formule de Feynamann-Kac donne la relation entre le point de vue analytique et l'approche probabiliste :

$$u^\epsilon(t,x) = \mathbb{E}_x[f(X_t^\epsilon)]$$

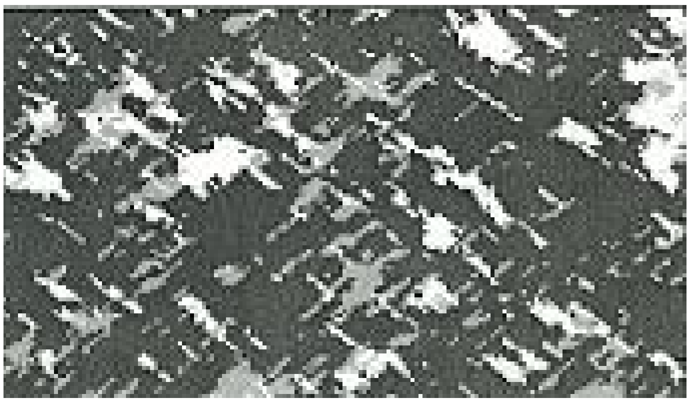

FIGURE 1.1 – Représentation d'un sous-sol à 3 niveaux de perméabilité

où X^ϵ est la solution de l'EDS (B est un mouvement brownien standard d-dimensionnel)

$$X_t^\epsilon = x + \frac{1}{\epsilon}\int_0^t b\big(\frac{X_r^\epsilon}{\epsilon}\big)\,dr + \int_0^t \sigma\big(\frac{X_r^\epsilon}{\epsilon}\big)\,dB_r. \tag{1.1}$$

Pour que le générateur de cette EDS coïncide avec

$$L^\epsilon\varphi(x) = \frac{1}{2}\mathrm{div}_x\Big(a\big(\frac{x}{\epsilon}\big)\nabla\varphi(x)\Big),$$

il est nécessaire de supposer que $a = \sigma\sigma^*$ et $b(x) = \frac{1}{2}\mathrm{Div}_x(a)(x)$. Du point de vue probabiliste, tout revient donc à étudier la convergence en loi de l'EDS (1.1) quand $\epsilon \to 0$.

Pour finir, supposons que $x = 0$ (pour simplifier) et notons X le processus obtenu pour la valeur 1 du paramètre ϵ dans (1.1) :

$$X_t = x + \int_0^t b(X_r)\,dr + \int_0^t \sigma(X_r)\,dB_r. \tag{1.2}$$

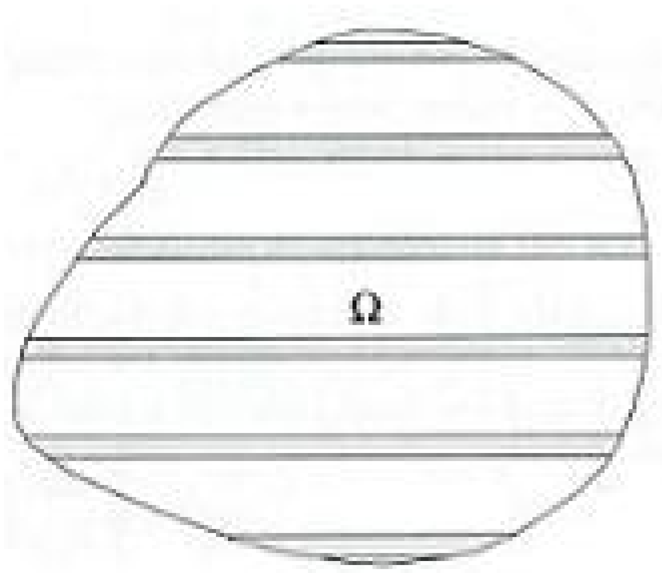

FIGURE 1.2 – Matériau composite (mélange de plusieurs matériaux)

On remarque le processus $\epsilon X_{t/\epsilon^2}$ est solution de l'EDS :

$$\begin{aligned}\epsilon X_{t/\epsilon^2} &= \epsilon \int_0^{t/\epsilon^2} b(X_r)\,dr + \epsilon \int_0^{t/\epsilon^2} \sigma(X_r)\,dB_r \\ &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t b\big(\frac{\epsilon X_{r/\epsilon^2}}{\epsilon}\big)\,dr + \int_0^t \sigma\big(\frac{\epsilon X_{r/\epsilon^2}}{\epsilon}\big)\,dB_r^\epsilon\end{aligned}$$

où B^ϵ est le mouvement brownien défini par $B_t^\epsilon = \epsilon B_{t/\epsilon^2}$. Ainsi $\epsilon X_{t/\epsilon^2}$ (partant de 0) est solution de la même EDS que le processus X^ϵ (partant de 0). D'après le théorème d'unicité en loi des solutions des EDS, on doit avoir $\epsilon X_{t/\epsilon^2} \overset{loi}{=} X^\epsilon$. Pour étudier la limite du processus X^ϵ, il suffit donc d'étudier la limite en loi du processus $\epsilon X_{t/\epsilon^2}$, où X est la solution de l'EDS (1.2). Ces théorèmes sont appelés *limites d'échelle*. Ce sont ces types de résultats que nous allons étudier par la suite.

Chapitre 2

Quelques rappels

2.1 Processus de Markov à temps continu

Intuitivement un processus stochastique est markovien si une prédiction du futur en utilisant tout le passé du processus conduit à la même prédiction qu'en utilisant que le présent. Ceci peut être traduit mathématiquement comme suit :

Définition 2.1. Processus de Markov. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé équipé d'une filtration* $(\mathcal{F}_t; t \geq 0)$. *Soit* $(X_t; t \geq 0)$ *un processus adapté à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$. *On dit que* X *est un processus de Markov si, pour toute function* f *mesurable bornée sur* $\mathbb{R}^d$ *(on note* $f \in B_b(\mathbb{R}^d)$*) et pour tous* $0 \leq s \leq t < +\infty$*,*

$$\mathbb{E}[f(X_t)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[f(X_t)|X_s], \quad p.s.$$

Remarque : $\mathbb{R}^d$ peut être remplacé par n'importe quel espace métrique séparable complet. D'autre part, cette notion coïncide avec celle des chaînes de Markov si l'espace des temps est discret.

A chaque processus de Markov X, on peut associer une famille d'opérateur $(T_{s,t}; 0 \leq s \leq t < +\infty)$ de $B_b(\mathbb{R}^d)$ dans l'espace de Banach des fonctions mesurables bornées sur $\mathbb{R}^d$ muni de la norme uniforme en posant :

$$\forall f \in B_b(\mathbb{R}^d) \text{ et } x \in \mathbb{R}^d, \quad T_{s,t}f(x) = \mathbb{E}[f(X_t)|X_s = x].$$

On dit que le processus X est normal si $T_{s,t}(B_b(\mathbb{R}^d)) \subset B_b(\mathbb{R}^d)$ pour tous $0 \leq s \leq t < +\infty$.

Proposition 2.2. *Si* X *est un processus de Markov normal, alors :*

1. *$T_{s,t}$ est un opérateur linéaire sur $B_b(\mathbb{R}^d)$ pour tous $0 \leq s \leq t < +\infty$.*
2. *$T_{s,s} = I$ pour tout $s \geq 0$.*
3. *$T_{s,r}T_{r,t} = T_{s,t}$ pour tous $0 \leq s \leq r \leq t < +\infty$.*
4. *si $f \geq 0$ alors $T_{s,t}f \geq 0$ pour tous $0 \leq s \leq t < +\infty$.*
5. *$T_{s,t}$ est une contraction, i.e. $\|T_{s,t}\| \leq 1$ pour tous $0 \leq s \leq t < +\infty$.*
6. *$T_{s,t}1 = 1$ pour tous $t \geq 0$.*

2.2 Rappels sur les variables aléatoires à valeurs dans $C([0,T];\mathbb{R})$

On commence par préciser l'espace (et sa topologie) dans lequel on souhaiterait établir la convergence des processus stochastiques. En ce qui concerne les processus à trajectoires continus, on utilise généralement l'espace $C([0,T];\mathbb{R})$ de la topologie de la convergence uniforme :

$$\forall f \in C([0,T];\mathbb{R}), \quad \|f\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq T} |f(t)|.$$

C'est un espace de Banach. Tout processus aléatoire défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à trajectoires continues peut être considéré comme une variable aléatoire à valeurs dans $C([0,T];\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{rccl} X : & \Omega & \to & C([0,T];\mathbb{R}) \\ & \omega \in \Omega & \mapsto & \big(t \in [0,T] \mapsto X_t(\omega)\big). \end{array}$$

Proposition 2.3. *Deux variables aléatoires X et X' à valeurs dans $C([0,T];\mathbb{R})$ ayant même loi finies-dimensionnelles ont même loi.*

On donne maintenant des critéres de tension pour les variables aléatoires à valeurs dans $C([0,T];\mathbb{R})$. Le théoréme d'Ascoli permet de décrire les compacts de $C([0,T];\mathbb{R})$. On obtient ainsi le critére :

Proposition 2.4. *Pour qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ à valeurs dans $C([0,T];\mathbb{R})$ soit tendue, il faut et il suffit que :*

$$\forall R > 0, \quad \limsup_{R \to \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\big(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^n| > R \big) = 0, \tag{2.1}$$

$$\forall \alpha > 0, \quad \limsup_{\delta \to 0} \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\big(\sup_{\substack{0 \leq s,t \leq T \\ |t-s| \leq \delta}} |X_t^n - X_s^n| > \alpha \big) = 0. \tag{2.2}$$

Chapitre 3

Homogénéisation des structures périodiques

On commence par l'étude d'une diffusion en milieu périodique. Soit $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 1 périodique. Pour simplifier, on suppose $\sigma \in C_b^\infty(\mathbb{R})$. On pose $a(x) = \sigma^2(x)$, $b(x) = \frac{1}{2}a'(x)$ (voir Chapitre 1 pour les motivations) et on suppose que pour toute $M > 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad M^{-1} \leq a(x) \leq M.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ on définit X^x solution de l'EDS

$$X_t^x = x + \int_0^t b(X_r^x)dr + \int_0^t \sigma(X_r^x)dB_r, \tag{3.1}$$

où B est un mouvement brownien standard 1-dimensionnel.

Objectif : Montrer que le processus $\epsilon X_{t/\epsilon^2}$ converge en loi vers un mouvement Brownien non standard $A\bar{B}_t$. De plus, il est intéressant de caractériser les propriétes de A, appelée coefficient de diffusivité effective.

On notera L l'opérateur, défini sur $C^2(\mathbb{R})$

$$L\varphi(x) = \frac{1}{2}\partial_x\big(a(x)\partial_x\varphi(x)\big).$$

De plus, pour $f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$, on note $P_t f(x) = \mathbb{E}[f(X_t^x)]$.

On admet le résultat d'EDP suivant :

Théorème 3.1. *Il existe une fonction positive $p(t,x,y)$, appelée fonction de Green, satisfaisant :*

1. $(t,x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto p(t,x,y)$ *est* C^∞,
2. *pour toute fonction continue et bornée f sur $\mathbb{R}$, on a*
$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} p(t,x,y) f(y)\, dy = f(x).$$
3. *pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$*
$$\mathbb{E}[f(X_t^x)] = \int_{\mathbb{R}} p(t,x,y) f(y)\, dy,$$
4. *p satisfait l'équation*
$$\partial_t p = Lp.$$
5. *de plus, il existe une constante C telle que*
$$p(t,x,y) \leq C t^{-1/2} \exp\Big(-\frac{|y-x|^2}{Ct}\Big).$$

En particulier, pour toute fonction continue et bornée f sur $\mathbb{R}$, la fonction $P_t f(x) = \mathbb{E}[f(X_t^x)]$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et satisfait l'équation
$$\partial_t P_t f(x) = L P_t f(x), \quad P_0 f(x) = f(x).$$

3.1 Théorème ergodique

On note $L^p_{per}(\mathbb{R})$ (pour $p \in [1,+\infty[$) l'espace des fonctions 1-périodique dont la puissance p-iéme est localement intégrable, et pour $f \in L^p_{per}(\mathbb{R})$
$$\|f\|_p = \Big(\int_{[0,1]} |f(x)|^p dx\Big)^{1/p}.$$
On note également $C_{per}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues et 1-périodiques sur $\mathbb{R}$. On rappelle également l'inégalité de Poincaré :

Proposition 3.2. *Il existe une constante P telle que, pour toute fonction 1-périodique $f \in C^1(\mathbb{R})$, on a :*
$$\|f - m(f)\|_2 \leq P \|f'\|_2$$
où $m(f) = \int_{[0,1]} f(x) dx$.

Preuve : Soient $x, y \in [0,1]$, on a :

$$f(x) - f(y) = \int_x^y f'(r)dr.$$

On intègre pour $y \in [0,1]$:

$$f(x) - m(f) = \int_{[0,1]} \Big(\int_x^y f'(r)dr \Big) dy,$$

d'où

$$\begin{aligned} |f(x) - m(f)|^2 =& \Big| \int_{[0,1]} \Big(\int_x^y f'(r)dr \Big) dy \Big|^2 \leq \int_{[0,1]} \Big| \int_x^y f'(r)dr \Big|^2 dy \\ &\leq \int_{[0,1]} |y-x| \int_x^y |f'(r)|^2 dr dy \leq \int_0^1 |f'(r)|^2 dr. \end{aligned}$$

On déduit le résultat en intégrant par rapport à $x \in [0,1]$. □

Proposition 3.3. *Pour tout $t_0 > 0$, il existe deux constantes $C > 0$ et $\rho > 0$ telles que pour tout $t > t_0$:*

$$\forall f \in C_{per}(\mathbb{R}), \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} \Big| \mathbb{E}[f(X_t^x)] - \int_{[0,1]} f(x)dx \Big| \leq C e^{-\rho t} \|f\|_1.$$

Preuve : Soit $f \in C_{per}(\mathbb{R})$ telle que

$$\int_{[0,1]} f(x)dx = 0.$$

On remarque tout d'abord que

$$\forall t > 0, \quad \int_{[0,1]} P_t f(x) dx = 0.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{[0,1]} P_t f(x) dx &= \int_{[0,1]} \partial_t P_t f(x)\, dx \\ &= \int_{[0,1]} L P_t f(x) dx \\ &= \int_{[0,1]} \partial_x (a(x) \partial_x P_t f)(x) dx \\ &= - \int_{[0,1]} \partial_x \mathbb{1}_{[0,1]}(x) a(x) \partial_x P_t f(x) dx \\ &=0. \end{aligned}$$

On note
$$g(t) = \int_{[0,1]} (P_t f(x))^2 dx.$$
On a :
$$\begin{aligned}
\partial_t g(t) =& \partial_t \int_{[0,1]} (P_t f(x))^2 dx = 2 \int_{[0,1]} P_t f(x) \partial_t P_t f(x) dx \\
=& 2 \int_{[0,1]} P_t f(x) L P_t f(x) dx = \int_{[0,1]} P_t f(x) \partial_x \big(a(x) \partial_x P_t f(x) \big) dx \\
=& - \int_{[0,1]} \partial_x P_t f(x) a(x) \partial_x P_t f(x) dx \leq -M^{-1} \int_{[0,1]} |\partial_x P_t f(x)|^2 dx \\
\leq& -(MP)^{-1} \int_{[0,1]} |P_t f(x) - \int P_t f dx|^2 dx = -(MP)^{-1} g(t).
\end{aligned}$$
On en déduit $g(t) \leq g(0) \exp\big(-(MP)^{-1} t\big)$ avec $g(0) = \int_{[0,1]} f(x)^2 dx$. On pose $\rho' = (MP)^{-1}/2$.

Pour conclure, on utilise que $\sup_{x \in \mathbb{R}} |P_1 f(x)| \leq C \|f\|_2$ et $\|P_1 f\|_2 \leq C \|f\|_1$ (voir le lemme ci-dessous). On en déduit :
$$\begin{aligned}
\sup_{x \in [0,1]} \Big| \mathbb{E}[f(X_t^x)] - m(f) \Big| &\leq C \|P_{t-1} f - m(f)\|_2 \leq C e^{-\rho'(t-1)} \|P_1 f - m(f)\|_2 \\
&\leq C' e^{-\rho' t} \|f\|_1.
\end{aligned}$$
□

Remarque : on peut aussi montrer ce résultat par des méthodes plus probabilistes reposant sur la condition de Doeblin.

Lemme 3.4. *Il existe une constante $C > 0$ telle que :*
$$\begin{aligned}
\forall f \in L^2_{per}(\mathbb{R}), \quad \|P_1 f\|_\infty \leq C \|f\|_2, \\
\forall f \in L^1_{per}(\mathbb{R}), \quad \|P_1 f\|_2 \leq C \|f\|_1.
\end{aligned}$$

Preuve : On a :
$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(y) p(1,x,y) dy &\leq \int_{\mathbb{R}} f(y) M \exp\big(-\frac{|y-x|^2}{M}\big) dy \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{[0,1]} f(y) M \exp\big(-\frac{|y-x+k|^2}{M}\big) dy \\
&\leq \int_{[0,1]} f(y) g(x,y) dy,
\end{aligned}$$

où $g(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} M \exp\big(-\frac{|y-x+k|^2}{M}\big)$. Il suffit, par exemple, de voir que :

$$\sup_{x,y\in[0,1]} g(x,y) < +\infty$$

en utilisant l'inégalité $\frac{1}{2}|y-x|^2 - |k|^2 \leq |y-x+k|^2$. □

Corollaire 3.5. *Soit $f \in C_{per}(\mathbb{R})$. On a*

$$\sup_{x\in[0,1]} \mathbb{E}\Big[\Big|\epsilon^2 \int_0^{t/\epsilon^2} f(X_r^x)\,dr - t\int_{[0,1]} f(x)dx\Big|^2\Big] \to 0, \quad \textit{quand } \epsilon \to 0.$$

Preuve : L'idée est de voir que, pour toute fonction intégrable g, on a :

$$\Big(\int_a^b g(r)\,dr\Big)^2 = 2\int_a^b g(r)\int_a^r g(u)\,du\,dr.$$

Sans perdre en généralité, on suppose $m(f)=0$. On a alors, en utilisant la propriété de Markov

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t f(X_r^x)\,dr\Big)^2\Big] =& 2\mathbb{E}\Big[\int_0^t f(X_s^x)\int_0^s f(X_u^x)\,du\,ds\Big] = 2\mathbb{E}\Big[\int_0^t\int_0^s \mathbb{E}[f(X_s^x)|\mathcal{F}_u]f(X_u^x)\,du\,ds\Big]\\
=&2\mathbb{E}\Big[\int_0^t\int_0^s f(X_u^x)P_{s-u}f(X_u^x)\,du\,ds\Big] \leq 2\mathbb{E}\Big[\int_0^t\int_0^s f(X_u^x)\sup_{\mathbb{R}}|P_{s-u}f|\,du\,ds\Big]\\
=&2\int_0^t\int_0^s \mathbb{E}[|f(X_u^x)|]C\|f\|_2 e^{-\rho(s-u)}duds + 2\int_{|s-u|<t_0}\|f\|_\infty^2\,duds\\
\leq&2\int_0^t\int_0^s C^2\|f\|_2^2 e^{-\rho s}duds + 2tt_0\|f\|_\infty^2 \leq C^2\|f\|_2^2 t/\rho(1-e^{-\rho t}) + 2tt_0\|f\|_\infty^2
\end{aligned}$$

En conséquence,

$$\sup_{x\in[0,1]} \mathbb{E}\Big[\Big|\epsilon^2\int_0^{t/\epsilon^2} f(X_r^x)\,dr\Big|^2\Big] \leq \epsilon^4 C^2\|f\|_2^2(t/\epsilon^2)/\rho(1-e^{-\rho t/\epsilon^2}) + 2\epsilon^2 tt_0\|f\|_\infty^2 \to 0$$

quand $\epsilon \to 0$. □

Remarque : soit $Y_t = X_t^x[\text{mod } 1]$. On peut montrer que Y est un processus de Markov à valeurs dans le tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Le résultat précédent permet également de montrer que la mesure de Lebesgue sur le tore est invariante (et ergodique) pour Y.

3.2 Construction des correcteurs

L'objectif de cette partie est de résoudre l'équation suivante

$$Lu = -b$$

où u doit être une fonction périodique. Il n'est pas clair que cette équation admette toujours des solutions. En effet, si une fonction u réguliére satisfait $Lu = h$ (où h est donnée), en intégrant par rapport à la mesure de Lebesgue sur le tore, on a

$$0 = \int_{[0,1]} Lu(x)dx = \int_{[0,1]} h(x)dx.$$

On voit donc que nécessairement, on doit avoir $\int_{[0,1]} h(x)dx = 0$. A l'aide du principe du maximum et de l'alternative de Fredholm, on pourrait montrer que c'est une condition nécessaire et suffisante pour avoir des solutions.

Nous allons choisir une approche différente, celle des approximations. Pour tout $\lambda > 0$, on définit u_λ comme étant la solution de l'équation

$$\lambda u_\lambda - Lu_\lambda = b. \tag{3.2}$$

Le fait de rajouter de la coercivité (le terme λu_λ) permet de résoudre assez simplement cette équation et de montrer qu'elle est réguliére, i.e. de classe C^2 (en fait, on peut montrer qu'elle est C^∞). On peut trouver la preuve de tous ces résultats dans [5].

On peut également montrer que u_λ admet une représentation probabiliste :

Proposition 3.6. *Pour tout $\lambda > 0$, on a*

$$u_\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda r} P_r f(x) dr = \int_0^\infty e^{-\lambda r} \mathbb{E}[f(X_r^x)] dr.$$

Preuve : On applique la formule d'Itô à la fonction $(t, x) \mapsto e^{-\lambda t} u_\lambda(x)$ et au processus X_t^x. On obtient :

$$e^{-\lambda t} u_\lambda(X_t^x) = u_\lambda(x) + \int_0^t e^{-\lambda r}(-\lambda u_\lambda + Lu_\lambda)(X_r^x) dr + \int_0^t e^{-\lambda r} u_\lambda'(X_r^x)\, dB_r.$$

On utilise la relation $\lambda u_\lambda - Lu_\lambda = b$ et on prend l'espérance. Comme u_λ' est borné, la martingale locale brownienne est en fait une martingale, donc son espérance est nulle. On obtient :

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda t} u_\lambda(X_t^x)] = u_\lambda(x) - \mathbb{E}\Big[\int_0^t e^{-\lambda r} b(X_r^x) dr\Big].$$

Il reste à passer à la limite lorsque $t \to \infty$. On remarque que

$$|\mathbb{E}[e^{-\lambda t}u_\lambda(X_t^x)]| \leq e^{-\lambda t} \sup_{[0,1]} |u_\lambda| \to 0, \quad \text{lorsque } t \to \infty.$$

Pour les mêmes raisons, l'intégrale $\int_0^t e^{-\lambda r} b(X_r^x)dr$ converge lorsque $t \to \infty$. On obtient ainsi

$$u_\lambda(x) = \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty e^{-\lambda r} b(X_r^x)dr\Big] = \int_0^\infty e^{-\lambda r}\mathbb{E}[b(X_r^x)]dr.$$

$\square$

Le rajout du terme λu_λ dans l'équation (3.2) permet de résoudre plus facilement cette équation. Toutefois, l'objectif premier était de résoudre $-Lu = b$. Il reste donc à déterminer si l'on peut passer à la limite dans (3.2) pour $\lambda \to 0$. Dans notre cas, la proposition 3.3 va nous permettre de montrer que le terme λu_λ tend vers 0 dans un sens assez fort. Il faut bien comprendre que la facilité avec laquelle tout ceci va marcher est typique du tore (ou des espaces compacts). Cette analyse peut s'avérer bien plus ardue dans des contextes plus généraux.

Lemme 3.7. *Lorsque λ tend vers 0, on a les convergences suivantes :*

1. $u_\lambda \to u(x) = \int_0^\infty \mathbb{E}[f(X_r^x)]\, dr$ *uniformément par rapport à* $x \in [0,1]$. *En particulier* $\sup_{x\in[0,1]} |\lambda u_\lambda(x)| \to 0$ *(unif. /x).*
2. $u'_\lambda \to u'$ *dans* $L^2([0,1])$.
3. $Lu_\lambda(x) \to -b(x)$ *uniformément par rapport à* x.

Preuve : A l'aide de la proposition 3.3, en particulier on utilise la borne

$$|\mathbb{E}[b(X_r^x)]| \leq C\|b\|_1 e^{-\rho r},$$

on montre facilement que

$$u_\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda r}\mathbb{E}[b(X_r^x)]dr \to u(x) = \int_0^\infty \mathbb{E}[b(X_r^x)]dr$$

lorsque $\lambda \to 0$ uniformément par rapport à $x \in [0,1]$. De cela on déduit également que

$$\sup_{x\in[0,1]} |\lambda u_\lambda(x)| \to 0.$$

De plus, comme $Lu_\lambda(x) + b(x) = \lambda u_\lambda(x)$, il est clair que $Lu_\lambda(x) + b(x) \to 0$ unif. $/x$.

Il reste donc à étudier la convergence des dérivées. Pour toute fonction $\varphi \in C^2_{per}(\mathbb{R})$, en intégrant par parties la relation :

$$\int_{[0,1]} \lambda u_\lambda \varphi dx - \int_{[0,1]} L u_\lambda \varphi dx = \int_{[0,1]} b\varphi dx,$$

on obtient

$$\int_{[0,1]} \lambda u_\lambda \varphi dx + \frac{1}{2}\int_{[0,1]} u'_\lambda a \varphi' dx = \int_{[0,1]} b\varphi dx.$$

Donc, pour $\lambda, \mu > 0$, on a :

$$\int_{[0,1]} (\lambda u_\lambda - \mu u_\mu)\varphi dx + \frac{1}{2}\int_{[0,1]} (u'_\lambda - u'_\mu) a \varphi' dx = 0.$$

En choisissant $\varphi = u_\lambda - u_\mu$, on a :

$$\int_{[0,1]} (\lambda u_\lambda - \mu u_\mu)(u_\lambda - u_\mu) dx + \frac{1}{2}\int_{[0,1]} a(u'_\lambda - u'_\mu)^2 \varphi' dx = 0.$$

Vu ce qui précéde, il est clair que $\int_{[0,1]} (\lambda u_\lambda - \mu u_\mu)(u_\lambda - u_\mu) dx \to 0$ lorsque $\max(\lambda, \mu) \to 0$. Ceci montre que la famille $(u'_\lambda)_\lambda$ est de Cauchy dans $L^2([0,1])$ et donc converge vers un élément $g \in L^2([0,1])$. De plus, le graphe de l'opérateur dérivé étant fermé, on a $g = u'$. □

Lemme 3.8. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\lim_{\lambda \to 0} \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t u'_\lambda \sigma(X_r^x)\, dB_r - \int_0^t u' \sigma(X_r^x)\, dB_r\Big)^2\Big] \to 0, \quad \textit{quand } \lambda \to 0.$$

Preuve : Tout d'abord :

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t u'_\lambda \sigma(X_r^x)\, dB_r - \int_0^t u' \sigma(X_r^x)\, dB_r\Big)^2\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_0^t a(u'_\lambda - u')^2 (X_r^x)\, dr\Big]$$

Vu la proposition 3.3, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big[\int_0^t a(u'_\lambda - u')^2(X_r^x)\, dr\Big] &= \int_0^t \mathbb{E}\big[a(u'_\lambda - u')^2(X_r^x)\big]\, dr \\ &\leq \int_0^t \Big[\int_{[0,1]} a(u'_\lambda - u')^2 dx + C\|a(u'_\lambda - u')^2\|_1 e^{-\rho r}\Big]\, dr \end{aligned}$$

et cette derniére quantité tend vers 0 lorsque $\lambda \to 0$. □

3.3 Homogénéisation

On fixe le point de départ comme étant égal à 0, et on note X pour le processus X^0. On veut montrer la convergence du processus $\epsilon X_{t/\epsilon^2}$. L'idée est d'utiliser (3.1) :

$$\epsilon X_{t/\epsilon^2} = \epsilon \int_0^{t/\epsilon^2} b(X_r)\, dr + \epsilon \int_0^{t/\epsilon^2} \sigma(X_r)\, dB_r.$$

L'idée est d'utiliser le corollaire 3.5 pour passer à la limite dans l'équation précédente. Toutefois, il apparaît clair que les fluctuations du terme $\epsilon \int_0^{t/\epsilon^2} b(X_r^0)\, dr$ ne sont pas contrôlables à l'aide du corollaire 3.5 (il faudrait avoir $\epsilon^2 \int_0^{t/\epsilon^2} b(X_r^0)\, dr$). Il faut, en fait, exploiter le fait que le terme b est de moyenne nulle, et montrer que la contribution de ces fluctuations se résument à une intégrale brownienne. Pour cela, on introduit la solution u_λ de l'équation (3.2). Comme $u_\lambda \in C^2(\mathbb{R})$, on peut appliquer la formule d'Itô :

$$u_\lambda(X_t) = u_\lambda(0) + \int_0^t Lu_\lambda(X_r)\, dr + \int_0^t \sigma(X_r)\, dB_r.$$

En sommant avec (3.1) et en utilisant la relation $\lambda u_\lambda - Lu_\lambda = b$, on obtient :

$$X_t + u_\lambda(X_t) = u_\lambda(0) + \int_0^t \lambda u_\lambda(X_r)\, dr + \int_0^t (1 + u_\lambda')\sigma(X_r)\, dB_r,$$

d'où

$$\epsilon X_{t/\epsilon^2} + \epsilon u_\lambda(X_{t/\epsilon^2}) = \epsilon u_\lambda(0) + \epsilon \int_0^{t/\epsilon^2} \lambda u_\lambda(X_r)\, dr + \epsilon \int_0^{t/\epsilon^2} (1 + u_\lambda')\sigma(X_r)\, dB_r.$$

En utilisant les lemmes 3.7 et 3.8, on peut passer à la limite quand $\lambda \to 0$ dans l'équation ci-dessus pour obtenir :

$$\epsilon X_{t/\epsilon^2} + \epsilon u(X_{t/\epsilon^2}) = \epsilon u(0) + \epsilon \int_0^{t/\epsilon^2} (1 + u')\sigma(X_r)\, dB_r.$$

Il reste maintenant à déterminer la convergence quand $\epsilon \to 0$ de l'équation ci-dessus. Tout d'abord, comme u est borné, il est clair que

$$\mathbb{E}[\sup_{0 \le t \le T} |\epsilon u(X_{t/\epsilon^2})|] \to 0, \quad \text{quand } \epsilon \to 0.$$

Il reste à étudier l'intégrale brownienne. La prochaine section montre que la famille de martingales (indexée par ϵ)

$$\epsilon \int_0^{t/\epsilon^2} (1 + u')\sigma(X_r)\, dB_r$$

converge en loi vers un mouvement brownien $\{A^{1/2}\bar{B}_t; t \geq 0\}$, où $\{\bar{B}_t; t \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard et

$$A = \int_{[0,1]} (1 + u'(x))^2 a(x) dx.$$

En conclusion, nous avons montré :

Théorème 3.9. *Le processus $\epsilon X_{t/\epsilon^2}$ converge en loi (au sens des processus à valeurs dans l'espace $C([0, T; \mathbb{R}])$) vers un mouvement brownien centré et de matrice de covariance A donnée par*

$$A = \int_{[0,1]} (1 + u'(x))^2 a(x) dx.$$

3.4 Convergence des martingales browniennes

Nous allons nous placer dans un cadre un peu plus général et supposer que nous disposons d'une famille $(\rho^\epsilon)_\epsilon$ d'éléments de $L^2([0, T]; \mathbb{R})$. On considére alors, pour $\epsilon > 0$ et $t \in [0, T]$, l'intégrale

$$M_t^\varepsilon = \int_0^t \rho_r^\epsilon \, dB_r.$$

Pour $\epsilon > 0$ fixé, presque sûrement, les processus $\{M_t^\epsilon; t \in [0, T]\}$ sont des martingales continues de carré intégrable. On suppose $\sup_{\epsilon>0} \mathbb{E} \int_0^T (\rho_r^\epsilon)^2 \, dr < +\infty$

Théorème 3.10. *Supposons que l' hypothése suivante sont vérifiée :*

(CV) il existe une constante A telle que, pour tout $t \in [0, T]$ fixé,

$$\int_0^t (\rho_r^\epsilon)^2 \, dr \xrightarrow[prob.]{} At, \quad \textit{quand } \epsilon \to 0.$$

Alors la famille de martingales $\{M_t^\epsilon; t \in [0, T]\}$ converge en loi dans l'espace des processus à valeurs dans $C([0, T]; \mathbb{R})$ vers un mouvement brownien centré de matrice de covariance A.

Preuve. Nous allons procéder en plusieurs étapes :

Lemme 3.11. *Soit $(\tilde{M}^\epsilon)_\epsilon$ une famille de martingales telle que :*

1) $\tilde{M}_t^\epsilon = \int_0^t \tilde{\rho}_r^\epsilon \, dr$ pour tout $t \geq T$,

2) $\forall s \leq t \leq s + \delta$, $\int_s^t (\tilde{\rho}^\epsilon)_r^2 \, dr \leq Q$.

Pour tout $s \geq T$, $R > 0$ et $\delta \geq 0$, on a :

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{s \leq t \leq s+\delta} |M_t^\epsilon - M_s^\epsilon| \geq R\Big) \leq 2\exp\big(-\frac{R^2}{2Q}\big).$$

Preuve du lemme 3.11. Fixons $s \leq T$. Pour tout $\lambda > 0$ on définit la martingale exponentielle

$$Y_{s,t}^\lambda = \exp\Big(\lambda(M_t^\epsilon - M_s^\epsilon) - \frac{\lambda^2}{2}\int_s^t (\rho_r^\epsilon)^2\, dr\Big).$$

D'aprés l'inégalité de Doob :

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{s \leq t \leq s+\delta} Y_{s,t}^\lambda \geq e^{\lambda R - \lambda^2 Q/2}\Big) \leq e^{-\lambda R + \lambda^2 Q/2}.$$

Comme $\int_s^t (\rho_r^\epsilon)^2\, dr \leq Q$ on en déduit :

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{s \leq t \leq s+\delta} (M_t^\epsilon - M_s^\epsilon) \geq R\Big) \leq \mathbb{P}\Big(\sup_{s \leq t \leq s+\delta} Y_{s,t}^\lambda \geq e^{\lambda R - \lambda^2 Q}\Big).$$

D'où

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{s \leq t \leq s+\delta} (M_t^\epsilon - M_s^\epsilon) \geq R\Big) \leq e^{-\lambda R + \lambda^2 Q/2}.$$

En optimisant par rapport à $\lambda > 0$, on a :

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{s \leq t \leq s+\delta} (M_t^\epsilon - M_s^\epsilon) \geq R\Big) \leq e^{-R^2/(2Q)}.$$

En répétant l'argument pour $-(M_t^\epsilon - M_s^\epsilon)$, on obtient le résultat. □

Lemme 3.12. *Pour tout $R > 0$, on a :*

$$\lim_{R \to +\infty} \limsup_{\epsilon > 0} \mathbb{P}\big(\sup_{t \in [0,T]} |M_t^\epsilon| > R\big) = 0. \tag{3.3}$$

Preuve du lemme 3.12. Soit τ^A le temps d'arrêt défini par :

$$\tau^A = \inf\{s \geq 0; \int_0^s \rho_r^\epsilon\, dr > (A+1)T\}.$$

Soit $\tilde{M}^\epsilon$ la martigale définie par

$$\tilde{M}_t^\epsilon = M_{t \wedge \tau^A}^\epsilon.$$

Clairement, elle vérifie les hypothéses du lemme 3.11 avec $s = 0, \delta = T$ et $Q = A + 1$. D'où

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\le t\le T} |\tilde{M}^\epsilon_t| \ge R\Big) \le 2\exp\big(-\frac{R^2}{2T(A+1)}\big).$$

Puis

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(\sup_{t\in[0,T]} |M^\epsilon_t| > R\big) \le& \mathbb{P}\big(\sup_{t\in[0,T]} |M^\epsilon_t| > R; \tau^A > T\big) + \mathbb{P}\big(\tau^A \le T\big)\\ =& \mathbb{P}\big(\sup_{t\in[0,T]} |M^\epsilon_{t\wedge\tau^A}| > R; \tau^A > T\big) + \mathbb{P}\big(\tau^A \le T\big)\\ \le& \mathbb{P}\big(\sup_{t\in[0,T]} |M^\epsilon_{t\wedge\tau^A}| > R\big) + \mathbb{P}\big(\tau^A \le T\big)\\ \le& 2\exp\big(-\frac{R^2}{2(A+1)}\big) + \mathbb{P}\big(\int_0^T (\rho^\epsilon_r)^2_r\,dr > A+1\big)\end{aligned}$$

Vu l'hypothése (CV), on en déduit :

$$\limsup_{\epsilon>0} \mathbb{P}\big(\sup_{t\in[0,T]} |M^\epsilon_t| > R\big) \le 2\exp\big(-\frac{R^2}{2T(A+1)}\big).$$

Il ne reste alors plus qu'à passer à la limite quand $R \to +\infty$. □

Lemme 3.13. *Pour tout $\alpha > 0$, on a :*

$$\lim_{\delta\to+\infty} \limsup_{\epsilon>0} \mathbb{P}\big(\sup_{|t-s|\le\delta} |M^\epsilon_t - M^\epsilon_s| > \alpha\big) = 0. \tag{3.4}$$

Preuve du lemme 3.13. Pour commencer, fixons $s \in [0, T]$ et $\delta > 0$. On définit le temps d'arrêt :

$$\tau^A = \inf\{t \ge s; \int_s^t \rho^\epsilon_r\,dr > (A+1)\delta\}.$$

Soit $\tilde{M}^\epsilon$ la martigale définie par

$$\tilde{M}^\epsilon_t = M^\epsilon_{t\wedge\tau^A}.$$

Clairement, elle vérifie les hypothéses du lemme 3.11 avec $Q = (A + 1)\delta$ et $R = \alpha$. D'où

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{s\le t\le s+\delta} |\tilde{M}^\epsilon_t - \tilde{M}^\epsilon_s| \ge \alpha\Big) \le 2\exp\big(-\frac{\alpha^2}{2\delta(A+1)}\big).$$

Puis

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\sup_{s\le t\le s+\delta}|M_t^\epsilon-M_s^\epsilon|\ge\alpha\Big)\le&\mathbb{P}\big(\sup_{s\le t\le s+\delta}|M_t^\epsilon-M_s^\epsilon|\ge\alpha;\tau^A>s+\delta\big)+\mathbb{P}\big(\tau^A\le s+\delta\big)\\=&\mathbb{P}\big(\sup_{s\le t\le s+\delta}|M_{t\wedge\tau^A}^\epsilon-M_{s\wedge\tau^A}^\epsilon|\ge\alpha;\tau^A>s+\delta\big)+\mathbb{P}\big(\tau^A\le s+\delta\big)\\\le&2\exp\big(-\frac{\alpha^2}{2\delta(A+1)}\big)+\mathbb{P}\big(\tau^A\le s+\delta\big)\\\le&2\exp\big(-\frac{\alpha^2}{2\delta(A+1)}\big)+\mathbb{P}\big(\int_s^{s+\delta}(\rho_r^\epsilon)_r^2\,dr>\delta(A+1)\big)\end{aligned}$$

Vu l'hypothése (CV), on en déduit :

$$\limsup_{\epsilon>0}\mathbb{P}\Big(\sup_{s\le t\le s+\delta}|M_t^\epsilon-M_s^\epsilon|\ge\alpha\Big)\le 2\exp\big(-\frac{\alpha^2}{2\delta(A+1)}\big).$$

Fixons maintenant $\delta>0$. On pose ensuite $N=E(T/\delta)+1$, $t_i=i\delta$ pour $i=0,\dots,N-1$ et $t_N=T$. $(t_i)_{0\le i\le N}$ est une subdivision de l'intervalle $[0,T]$ de pas δ. On a alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\sup_{|t-s|\le\delta}|M_t^\epsilon-M_s^\epsilon|\ge\alpha\Big)\le&\mathbb{P}\big(\bigcup_{i=0}^{N-1}\sup_{t\in[t_i;t_{i+1}]}|M_t^\epsilon-M_{t_i}^\epsilon|>\alpha/3\big)\\\le&\sum_{i=0}^{N-1}\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[t_i;t_{i+1}]}|M_s^\epsilon-M_{t_i}^\epsilon|>\alpha/3\Big).\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\limsup_{\epsilon>0}\mathbb{P}\Big(\sup_{|t-s|\le\delta}|M_t^\epsilon-M_s^\epsilon|\ge\alpha\Big)\le&\sum_{i=0}^{N-1}\limsup_{\epsilon>0}\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[t_i;t_{i+1}]}|M_s^\epsilon-M_{t_i}^\epsilon|>\alpha/3\Big)\\\le&2E(T/\delta)\exp\big(-\frac{\alpha^2}{2\delta(A+1)}\big)\end{aligned}$$

Il ne reste alors plus qu'à passer à la limite pour $\delta\to0$. □

Les lemmes 3.12 et 3.13 montrent que la famille $(M^\epsilon)_\epsilon$ est endue dans $C([0;T];\mathbb{R})$.

Lemme 3.14. *Soit $\bar{M}$ un processus continu qui soit limite en loi d'une sous-famille de $(M^\epsilon)_\epsilon$. Alors $\bar{M}$ est une martingale.*

Preuve du lemme 3.14. Soit $\bar{M}$ un processus continu qui soit limite en loi d'une sous-famille de $(M^\epsilon)_\epsilon$, encore indexée par ϵ. Donc $\forall \Phi\colon C([0,T];\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ continue bornée, on a

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\Phi(M^\epsilon)\right] \to \mathbb{E}\left[\Phi(\bar{M})\right] \quad \text{quand } \epsilon \to 0.$$

Comme les martingales sont de carré uniformément intégrable, il est facile de voir que

$$\mathbb{E}\big(\sup_{0\le t\le T} \bar{M}_t^2\big) < \infty.$$

D'autre part, si l'on fixe $0 \le r_1 < \cdots < r_n \le s \le t \le T$ et si l'on considére $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue et bornée, on a :

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathbb{E}\left[e^{i\lambda(M_t^\varepsilon - M_s^\varepsilon)}\psi(M_{r_n}^\varepsilon, \dots, M_{r_1}^\varepsilon)\right] = \mathbb{E}\left[e^{-\lambda^2/2\int_s^t(\rho_r^\epsilon)^2\,dr}\psi(M_{r_n}^\varepsilon, \dots, M_{r_1}^\varepsilon)\right].$$

Donc en passant à la limite quand $\varepsilon \to 0$:

$$\mathbb{E}\left[e^{i\lambda(\bar{M}_t - \bar{M}_s)}\psi(\bar{M}_{r_n}, \dots, \bar{M}_{r_1})\right] = \mathbb{E}\left[e^{-\lambda^2/2A(t-s)}\psi(\bar{M}_{r_n}, \dots, \bar{M}_{r_1})\right].$$

Si l'on définit $\mathcal{G}_t = \sigma(\bar{M}_u; 0 \le u \le t)$, on a ainsi montré que $\bar{M}$ est une $\mathcal{G}$-martingale continue de carré intégrable telle que

$$\mathbb{E}\left[e^{i\lambda(\bar{M}_t - \bar{M}_s + \lambda^2/2A(t-s))}|\mathcal{G}_s\right] = 0.$$

C'est donc un mouvement brownien centré de variance A. $\square$

Chapitre 4

Homogénéisation des structures aléatoires

Notre modéle pour le milieu aléatoire consiste en un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ sur lequel est défini un groupe de transformations $(\tau_x)_{x \in \mathbb{R}^d}$ $(d \geq 1)$ agissant sur Ω de telle sorte que :

Définition 4.1. Milieu aléatoire

H.1 $\mu(\tau_x A) = \mu(A)$, $\forall A \in \mathcal{G}$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$;

H.2 *Si* $\forall x \in \mathbb{R}^d, \tau_x A = A$, *alors* $\mu(A) = 0$ *ou* 1.

H.3 *Pour toute application mesurable* $\boldsymbol{f}$ *définie sur* Ω, *l'application* $(x, \omega) \mapsto \boldsymbol{f}(\tau_x \omega)$ *est* $(\mathbb{R}^d \times \Omega; \mathcal{B}_d \otimes \mathcal{G})$*-mesurable.*

H.4 $\forall \boldsymbol{f} \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu), \forall \delta > 0,$

$$\mu(|\boldsymbol{f}(\tau_x \omega) - \boldsymbol{f}(\omega)| \geq \delta) \to 0, \ \textit{quand } |x| \to 0.$$

On notera $\mathbb{M}$ l'espérance par rapport à la mesure μ, c'est-à-dire

$$\mathbb{M}[\boldsymbol{f}] = \int_\Omega \boldsymbol{f} \, d\mu$$

pour toute function $\boldsymbol{f}$ μ-intégrable. A chaque variable aléatoire $\boldsymbol{f}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$, on associe le champ aléatoire stationnaire f qui est une fonction mesurable définie sur $(\mathbb{R}^d \times \Omega; \mathcal{B}_d \otimes \mathcal{G})$ par :

$$f(x, \omega) = \boldsymbol{f}(\tau_x \omega)$$

Les transformations définissent un groupe $(T_x)_{x\mathbb{R}^d}$ d'opérateurs unitaires sur $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ par

$$T_x(\boldsymbol{f})(\omega) = \boldsymbol{f}(\tau_x \omega).$$

Vu l'hypothése 4.1 (H.4), ce groupe est fortement continu. Si $(e_1, \ldots, e_d)$ désigne une base orthonormale de $\mathbb{R}^d$, on définit les opérateurs de dérivation :

$$D_i \boldsymbol{f} = \lim_{h \to 0} \frac{T_{he_i}(\boldsymbol{f}) - \boldsymbol{f}}{h},$$

si cette limite existe dans $L^2(\Omega)$.

On appelle $\mathcal{C}$ le sous-ensemble dense de $L^2(\Omega)$ défini par :

$$\mathcal{C} = \left\{ \boldsymbol{f} * \varphi; \boldsymbol{f} \in L^2(\Omega), \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \right\},$$

où l'opération de convolution $*$ est définie par :

$$\boldsymbol{f} * \varphi(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} \boldsymbol{f}(\tau_x \omega) \varphi(x) \, dx.$$

On remarque que $\mathcal{C} \subset \mathrm{Dom}(D_i)$ et $D_i(\boldsymbol{f} * \varphi) = -\boldsymbol{f} * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, i = 1 \ldots, d$ et cette dernière quantité vaut également $D_i \boldsymbol{f} * \varphi$ si $\boldsymbol{f} \in Dom(D_i)$.

Les opérateurs $(D_i)_{1 \leq i \leq d}$ sont donc à domaines denses dans $L^2(\Omega)$ et comme l'adjoint de D_i est $-D_i$, à l'aide de la proposition (II.16) de [2] page 28, on sait que les opérateurs $(D_i)_{1 \leq i \leq d}$ sont fermés. D'autre part, on a $\mathbb{M}[D_i \boldsymbol{f}] = 0$ pour toute fonction $\boldsymbol{f} \in \mathrm{Dom}(D_i)$.

On note $(.,.)$ le produit scalaire usuel sur $L^2(\Omega)$ et $|\cdot|_2$ la norme associée.
On remarque aussi que si $\overset{\vee}{\varphi}(x) \overset{\triangle}{=} \varphi(-x)$, alors

$$(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{f} * \varphi) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} * \overset{\vee}{\varphi}).$$

4.1 Diffusion en milieu aléatoire

On considére la diffusion en milieu aléatoire

$$X_t^\omega = x + \int_0^t b\left(X_s^\omega, \omega\right) \, ds + \int_0^t \sigma\left(X_s^\omega, \omega\right) \, dB_s \tag{4.1}$$

où $\{B_t; t \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard défini sur un espace de probabilité $(\Omega', \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et les coefficients $b(x,\omega), \sigma(x,\omega)$ sont des champs aléatoires stationnaires définis sur $(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$, de telle sorte que tout soit défini sur l'espace produit $(\Omega \times \Omega'; \mathcal{G} \otimes \mathcal{F}, \mu \times \mathbb{P})$ (le mouvement brownien et le milieu sont indépendants). Plus précisément, il existe $\boldsymbol{b} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ et $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \to \mathbb{R}^{d \times d}$ tels que $b(x,\omega) = \boldsymbol{b}(\tau_x \omega)$ et $\sigma(x,\omega) = \boldsymbol{\sigma}(\tau_x \omega)$. Pour simplifier, on suppose que $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ sont dans $\mathcal{C}$.

Précisons les hypothèses sur les coefficients. Soit $\boldsymbol{a}(\omega) = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^*(\omega)$. $\boldsymbol{a}$ est donc à valeurs dans l'ensemble des matrices carrées de taille $d \times d$ symétriques et semi-définies positives.

On suppose de plus que pour $1 \leq i \leq d$,

$$b_i(\omega) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} D_j \boldsymbol{a}_{ij}(\omega).$$

Sous ces hypothèses, le générateur infinitésimal L^ω du processus de diffusion X^ω peut alors se réécrire sous forme divergence :

$$\begin{aligned} L^\omega &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x,\omega)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x,\omega)\frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,\omega)\frac{\partial}{\partial x_j}\,.\quad\right) \end{aligned}$$

Hypothèse 4.2. *On suppose que la matrice $\mathbf{a}$ vérifie une condition d'uniforme ellipticité, c'est-à-dire qu'il existe une constante Λ telle que*

$$\Lambda^{-1} Id \leq \boldsymbol{a} \leq \Lambda Id \tag{4.2}$$

au sens des matrices symmétriques positives.

4.2 Formes de Dirichlet et correcteurs

Dans ce qui suit, la norme $|.|_2$ désignera la norme associée à l'espace $L^2(\Omega,\pi)$ et $(.,.)_2$ le produit scalaire correspondant. On considère le sous-ensemble $\mathcal{C}$ de $L^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ défini précédemment et on introduit la forme bilinéaire suivante

$$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{C}, \quad B(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}) = \frac{1}{2}(D\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{a}D\boldsymbol{\psi})_2. \tag{4.3}$$

L'hypothèse d'uniforme ellipticité assure que le noyau de la semi-norme associée, notée aussi $\|\boldsymbol{\psi}\|_1 = (B(\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\psi}))^{1/2}$, est uniquement constitué des fonctions constantes. On note $\mathbb{H}_1$ la fermeture de $\mathcal{C}$ quotientée par les constantes pour cette norme, c'est un espace de Hilbert. La norme duale correspondante est donnée par

$$\|\boldsymbol{h}\|_{-1} = \inf\left\{C \geq 0; \forall \boldsymbol{f} \in \mathcal{C}, (\boldsymbol{f},\boldsymbol{h})_2 \leq C B(\boldsymbol{f},\boldsymbol{f})^{1/2}\right\}.$$

On remarque que $\|\boldsymbol{g}\|_{-1} < \infty \Rightarrow \mathbb{M}[\boldsymbol{g}] = 0$. En fait, contrairement au cas du tore, on ne dispose plus de l'inégalité de Poincarré. On est donc amené à distinguer les fonctions sur Ω qui vérifient l'inégalité précédente, celle-ci faisant office "d'inégalité de Poincaré" sur le milieu aléatoire.

On note $\mathbb{F}$ la fermeture de $\mathcal{C}$ pour la norme associée à la forme bilinéaire suivante :

$$\varepsilon(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}) = (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi})_2 + B(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}).$$

C'est également un espace de Hilbert. Pour $\lambda > 0$, et $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi} \in \mathcal{C}$ on définit

$$B_\lambda(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}) = \lambda(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi})_2 + B(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi})_2 \tag{4.4}$$

et il vient

$$|B_\lambda(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi})| \leq M\sqrt{\varepsilon(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi})\varepsilon(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi})}.$$

Ainsi on peut prolonger B_λ en une forme bilinéaire continue définie sur $\mathbb{F}$. D'autre part, $\forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}$ on a

$$|B_\lambda(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi})| \geq \min(1, \lambda)\varepsilon(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi})$$

ce qui signifie que B_λ est coercive. Le théoréme de Lax-Milgram permet alors de construire une résolvante fortement continue G_λ sur $L^2(\Omega)$, de générateur l'opérateur $\boldsymbol{L}$ défini sur $\mathcal{C}$ par

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}, \quad \boldsymbol{L}\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} D_i\left(\boldsymbol{a}_{ij} D_j \boldsymbol{\varphi}\right)$$

et de domaine $\mathrm{Dom}(L) = G_\lambda(L^2(\Omega)) \subset \mathbb{F}$.

Pour $i = 1, \ldots, d$ et $\lambda > 0$, on note $\boldsymbol{u}_\lambda^i = G_\lambda(\boldsymbol{b}_i)$ la solution de l'équation de la résolvante

$$\lambda \boldsymbol{u}_\lambda^i - \boldsymbol{L}\boldsymbol{u}_\lambda^i = \boldsymbol{b}_i. \tag{4.5}$$

A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on montre

Proposition 4.3. *La fonction $\boldsymbol{b}$ satisfait une "inégalité de Poincaré" : $\|\boldsymbol{b}_i\|_{-1} < \infty$.*

Preuve. Pour la preuve, il suffit de faire une intégration par parties. □

Proposition 4.4. *Pour $i = 1, \ldots, d$, la fonction $\boldsymbol{u}^i$ satisfait :*

1) $\lambda|\boldsymbol{u}_\lambda^i|_2^2 \to 0$ quand $\lambda \to 0$,

2) il existe $\boldsymbol{\xi}^i \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$ tel que $|D\boldsymbol{u}_\lambda^i - \boldsymbol{\xi}^i|_2 \to 0$ quand $\lambda \to 0$.

Preuve. Si l'on multiplie (4.5) par $\boldsymbol{u}_\lambda^i$ et en intégrant par rapport à μ, on obtient :

$$\lambda|\boldsymbol{u}_\lambda^i|_2^2 + \|\boldsymbol{u}_\lambda^i\|_1^2 \leq \|\boldsymbol{b}_i\|_{-1}\|\boldsymbol{u}_\lambda^i\|_1 \tag{4.6}$$

d'où

$$\lambda|\boldsymbol{u}_\lambda^i|_2^2 + \|\boldsymbol{u}_\lambda^i\|_1^2 \leq \|\boldsymbol{b}_i\|_{-1}^2. \tag{4.7}$$

Vu (4.7), il existe une sous-suite $(\lambda_n)_n \to 0$ telle que $D\boldsymbol{u}_{\lambda_n}^i$ converge faiblement vers $\boldsymbol{\xi}^i \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$, et $\lambda \boldsymbol{u}_\lambda^i \xrightarrow[\lambda\to 0]{L^2} 0$. En passant à la limite dans la relation suivante (valable pour $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{F}$) lorsque $\lambda \to 0$:

$$\lambda(\boldsymbol{u}_\lambda^i, \boldsymbol{\varphi})_2 + (1/2)(D\boldsymbol{u}_\lambda^i, \boldsymbol{a}D\boldsymbol{\varphi})_2 = (\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{\varphi})_2,$$

on obtient

$$(1/2)(\boldsymbol{\xi}^i, \boldsymbol{a}D\boldsymbol{\varphi})_2 = (\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{\varphi})_2 = -(1/2)(\boldsymbol{a}e_i, D\boldsymbol{\varphi})_2. \tag{4.8}$$

Cette relation garantit l'unicité de la limite faible. Donc toute la famille $(D\boldsymbol{u}_\lambda^i)_\lambda$ converge faiblement vers $\boldsymbol{\xi}^i \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$. Il reste à établir la convergence forte. On a :

$$\begin{aligned}
\lambda|\boldsymbol{u}_\lambda^i|_2^2 &+ (1/2)(\boldsymbol{a}(D\boldsymbol{u}_\lambda^i - \boldsymbol{\xi}^i), D\boldsymbol{u}_\lambda^i - \boldsymbol{\xi}^i)_2 \\
&= \lambda|\boldsymbol{u}_\lambda^i|_2^2 + (1/2)(\boldsymbol{a}D\boldsymbol{u}_\lambda^i, D\boldsymbol{u}_\lambda^i)_2 + (\boldsymbol{a}D\boldsymbol{u}_\lambda^i, \boldsymbol{\xi}^i)_2 + (1/2)(\boldsymbol{a}\boldsymbol{\xi}^i, \boldsymbol{\xi}^i)_2 \\
&= (\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{u}_\lambda^i)_2 + (\boldsymbol{a}D\boldsymbol{u}_\lambda^i, \boldsymbol{\xi}^i)_2 + (1/2)(\boldsymbol{a}\boldsymbol{\xi}^i, \boldsymbol{\xi}^i)_2 \\
&= -(1/2)(\boldsymbol{a}e_i, D\boldsymbol{u}_\lambda^i)_2 + (\boldsymbol{a}D\boldsymbol{u}_\lambda^i, \boldsymbol{\xi}^i)_2 + (1/2)(\boldsymbol{a}\boldsymbol{\xi}^i, \boldsymbol{\xi}^i)_2 \\
&\to -(1/2)(\boldsymbol{a}e_i, \boldsymbol{\xi}^i)_2 + (1/2)(\boldsymbol{a}\boldsymbol{\xi}^i, \boldsymbol{\xi}^i)_2
\end{aligned}$$

quand $\lambda \to 0$. Or, en choisissant $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{u}_\lambda^i$ dans (4.8) et en passant à la limite quand $\lambda \to 0$, on obtient $(\boldsymbol{a}e_i, \boldsymbol{\xi}^i)_2 = -(\boldsymbol{a}\boldsymbol{\xi}^i, \boldsymbol{\xi}^i)_2$. Le résultat suit. □

Proposition 4.5. *Soit $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)$. On définit $\boldsymbol{f}_\lambda$ comme étant la solution de l'équation*

$$\lambda\boldsymbol{f}_\lambda - \boldsymbol{L}\boldsymbol{f}_\lambda = \boldsymbol{f}.$$

On a :

1) $|\lambda\boldsymbol{f}_\lambda - \mathbb{M}(\boldsymbol{f})|_2 \to 0$ quand $\lambda \to 0$,

2) la famille $(\lambda^{1/2}D\boldsymbol{f}_\lambda)_\lambda$ est bornée dans $L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$.

Proof. Il suffit de considérer le cas où $\mathbb{M}[\boldsymbol{f}] = 0$. En effet si l'on sait démontrer le résultat pour toutes les fonctions vérifiant $\mathbb{M}[\boldsymbol{f}] = 0$ alors pour une fonction $\boldsymbol{g}$ quelconque, il suffit de poser $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g} - \mathbb{M}[\boldsymbol{g}]$ qui satisfait $\mathbb{M}[\boldsymbol{f}] = 0$.

Si l'on multiplie $\lambda \boldsymbol{f}_\lambda - \boldsymbol{L}\boldsymbol{f}_\lambda = \boldsymbol{f}$ par $\lambda \boldsymbol{f}_\lambda$ et en intégrant par rapport à μ, on obtient :

$$\lambda^2 |\boldsymbol{f}_\lambda|_2^2 + \lambda \|\boldsymbol{f}_\lambda\|_1^2 \leq \lambda |\boldsymbol{f}|_2 |\boldsymbol{f}_\lambda|_2 \leq \frac{|\boldsymbol{f}|_2^2}{2\lambda} + \frac{\lambda |\boldsymbol{f}_\lambda|_2}{2} \tag{4.9}$$

d'où

$$\lambda |\boldsymbol{f}_\lambda|_2^2 + 2\|\boldsymbol{u}_\lambda^i\|_1^2 \leq \frac{|\boldsymbol{f}|_2^2}{\lambda}. \tag{4.10}$$

Vu (4.10), il existe une sous-suite $(\lambda_n)_n \to 0$ telle que $\lambda_n \boldsymbol{f}_{\lambda_n}$ converge faiblement vers $\bar{\boldsymbol{f}} \in L^2(\Omega)$, et $(\lambda_n |D\boldsymbol{f}_{\lambda_n}|_2^2)_n$ est bornée. On remarque ensuite que $\boldsymbol{\varphi} \in \mathrm{Dom}(\boldsymbol{L})$

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi})_2 =& (\lambda_n \boldsymbol{f}_{\lambda_n} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{f}_{\lambda_n}, \boldsymbol{\varphi})_2 \\
=& \lambda_n (\boldsymbol{f}_{\lambda_n}, \boldsymbol{\varphi})_2 + (1/2)(D\boldsymbol{f}_{\lambda_n}, \boldsymbol{a}D\boldsymbol{\varphi})_2 \\
=& \lambda_n (\boldsymbol{f}_{\lambda_n}, \boldsymbol{\varphi})_2 - (1/2)(\boldsymbol{f}_{\lambda_n}, D(\boldsymbol{a}D\boldsymbol{\varphi}))_2
\end{aligned} \tag{4.11}$$

En multipliant la relation précédente par λ_n et en passant à la limite lorsque $n \to \infty$, on obtient

$$0 = (\bar{\boldsymbol{f}}, \boldsymbol{L}\boldsymbol{\varphi})_2. \tag{4.12}$$

Cette relation signifie que $\bar{\boldsymbol{f}} \in \mathrm{Dom}(\boldsymbol{L})$ et $\boldsymbol{L}\bar{\boldsymbol{f}} = 0$. En particulier,

$$0 = -(\boldsymbol{L}\bar{\boldsymbol{f}}, \bar{\boldsymbol{f}})_2 = \|\bar{\boldsymbol{f}}\|_1^2,$$

c'est-à-dire que $\bar{\boldsymbol{f}}$ est constante. Choisissons maintenant $\boldsymbol{\varphi} = \mathbb{I}$ (la fonction constante valant 1) dans la relation (4.11), on obtient

$$(\boldsymbol{f}, \mathbb{I})_2 = \lambda_n (\boldsymbol{f}_{\lambda_n}, \mathbb{I})_2 - (1/2)(\boldsymbol{f}_\lambda, D(\boldsymbol{a}D\mathbb{I}))_2 = \lambda_n (\boldsymbol{f}_{\lambda_n}, \mathbb{I})_2.$$

Comme $\lambda_n \boldsymbol{f}_{\lambda_n}$ converge faiblement vers $\bar{\boldsymbol{f}}$, on en déduit

$$0 = \mathbb{M}[\boldsymbol{f}] = \lim_{n\to\infty} (\lambda_n \boldsymbol{f}_{\lambda_n}, \mathbb{I})_2 = \mathbb{M}[\bar{\boldsymbol{f}}] = \bar{\boldsymbol{f}},$$

la dernière égalité résultant du fait que $\bar{\boldsymbol{f}}$ est constante. On a donc montré que la famille $(\lambda \boldsymbol{f}_\lambda)_\lambda$ est faiblement relativement compacte et possède une unique valeur d'adhérence. La famille est donc faiblement convergente vers 0. Nous allons maintenant montrer que la famille est en fait fortement convergente vers 0.

Dans la relation

$$\lambda (\boldsymbol{f}_\lambda, \boldsymbol{\varphi})_2 + (1/2)(D\boldsymbol{f}_\lambda, \boldsymbol{a}D\boldsymbol{\varphi})_2 = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi})_2,$$

on choisit $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{f}_\lambda$ et on multiplie par λ. On obtient

$$|\lambda \boldsymbol{f}_\lambda|_2^2 + \lambda \|\boldsymbol{f}_\lambda\|_1^2 = (\boldsymbol{f}, \lambda \boldsymbol{f}_\lambda)_2 \to 0$$

quand $\lambda \to 0$. Ceci termine la preuve. □

4.3 Mesure invariante et ergodicité

Le processus

$$\begin{aligned} Y_t &= \tau_{X_t^\omega}\omega,\ t \geq 0; \\ Y_0 &= \omega, \end{aligned}$$

(où X_t^ω est le processus de diffusion de la section précédente partant de $X_0^\omega = 0$) est un processus de Markov à valeurs dans Ω. Le but de cette section est de montrer que μ est une mesure invariante.

D'après les estimations d'Aronson (voir [12]), le processus X^ω admet des transitions de probabilités qui sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, ie $\mathbb{P}_x(X_t^\omega \in dy) = p^\omega(t,x,y)dy$. De plus, il existe une constante A, qui ne dépend que de Λ, d, telle que $\forall \omega \in \Omega$, $\forall (t,x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$

$$\frac{1}{At^{d/2}} e^{-\frac{A|y-x|^2}{t}} \leq p^\omega(t,x,y) \leq \frac{A}{t^{d/2}} e^{-\frac{|y-x|^2}{At}}. \tag{4.13}$$

Pour toute fonction $\boldsymbol{f} \in L^\infty(\Omega)$, on a donc

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{f}(Y_t)] = \mathbb{E}[\boldsymbol{f}(\tau_{X_t^\omega}\omega)] = \int \boldsymbol{f}(\tau_y\omega) p^\omega(t,0,y)dy$$

et

$$\mathbb{M}|\mathbb{E}[\boldsymbol{f}(Y_t)]| \leq \mathbb{M} \int |\boldsymbol{f}(\tau_y\omega)| p^\omega(t,0,y)dy \leq \frac{A}{t^{d/2}} \int \mathbb{M}[|\boldsymbol{f}(\tau_y\omega)|] e^{-\frac{|y|^2}{At}} dy.$$

Comme $\mathbb{M}[|\boldsymbol{f}(\tau_y\omega)|] = \mathbb{M}[|\boldsymbol{f}(\omega)|]$ et que $\frac{A}{t^{d/2}} \int e^{-\frac{|y|^2}{At}} dy = C$ est une constante ne dépendant que de A et d (et pas de t), on en déduit

$$\mathbb{M}|\mathbb{E}[\boldsymbol{f}(Y_t)]| \leq C\mathbb{M}[|\boldsymbol{f}(\omega)|] \tag{4.14}$$

de sorte que l'application $\boldsymbol{f} \in L^\infty(\Omega) \mapsto \mathbb{E}[\boldsymbol{f}(Y_t)]$ se prolonge pour tout t à $L^1(\Omega)$. Ainsi le semi-groupe sur $L^\infty(\Omega)$ généré par le processus Y se prolonge en un semi-groupe sur $L^1(\Omega)$. En fait, cette propriété peut se démontrer pour chaque espace $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < +\infty$.

Proposition 4.6. (Théorème ergodique). *Pour toute fonction $\boldsymbol{f} \in L^1(\Omega)$, on a*

$$\mathbb{M}\mathbb{E}\left| \varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} \boldsymbol{f}(Y_r)\, dr - t\mathbb{M}(\boldsymbol{f}) \right| \to 0$$

quand $\varepsilon \to 0$.

(preuve faite en cours)

En conséquence la mesure μ est invariante pour le processus Y. Elle est de plus ergodique.

Remarque : nous n'avons pas montré l'unicité de la probabilité invariante mais seulement que π est un point extrêmal de l'ensemble des mesures invariantes. En particulier, si ν est une autre mesure invariante ergodique alors ν et π sont singulières. L'exemple trivial suivant illustre ceci. Considérons un milieu à deux éléments $\Omega = \{0; 1\}$ muni de la tribu de ses parties. Prenons pour dimension $d = 1$ et pour action de $\mathbb{R}$ sur Ω l'action triviale ie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \omega \in \Omega, \tau_x \omega = \omega.$$

On choisit comme coefficient de diffusion :

$$\forall \omega \in \Omega, \boldsymbol{\sigma}(\omega) = 1.$$

Considérons alors les deux mesures suivantes μ et ν sur le milieu définies par

- $\mu(\{0\}) = 1$ et $\mu(\{1\}) = 0$.
- $\nu(\{0\}) = 0$ et $\nu(\{1\}) = 1$.

Chacune de ces deux mesures vérifient l'ensemble des hypothéses précédentes et la propriété d'homogénéisation démontrée par la suite sera valable pour chacune de ces deux mesures. Ceci n'est pas incohérent car ces deux mesures sont singulières.

4.4 Homogénéisation

Remarque : si $\boldsymbol{f}$ est une fonction de classe C^2 sur Ω (c'est-à-dire que pour tout $\omega \in \Omega$, l'application $x \mapsto \boldsymbol{f}(\tau_x \omega)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^d$), on a :

$$\boldsymbol{f}(Y_t) = \boldsymbol{f}(Y_0) + \int_0^t \boldsymbol{L}\boldsymbol{f}(Y_s)\, ds + \int_0^t (D\boldsymbol{f})^*(Y_s)\boldsymbol{\sigma}(Y_s)\, dB_s.$$

Le but de cette section est d'étudier le comportement asymptotique du processus X. Plus précisément, nous allons montrer que le processus $t \mapsto \varepsilon X^{\omega}_{t/\varepsilon^2}$ (avec $X^{\omega}_0 = 0$) converge en loi vers un mouvement brownien.
Comme $\lambda \boldsymbol{u}_\lambda - \boldsymbol{L}\boldsymbol{u}_\lambda = \boldsymbol{b}$, la fonction $\boldsymbol{u}_\lambda$ est C^2 sur Ω. On peut donc lui appliquer la formule

d'Itô :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_\lambda(Y_t) =&\boldsymbol{u}_\lambda(Y_0) + \int_0^t \boldsymbol{L}\boldsymbol{u}_\lambda(Y_r)\,dr + \int_0^t D\boldsymbol{u}_\lambda^*\boldsymbol{\sigma}(Y_r)\,dB_r\\ =&\boldsymbol{u}_\lambda(Y_0) + \int_0^t (\lambda\boldsymbol{u}_\lambda - \boldsymbol{b})(Y_r)\,dr + \int_0^t D\boldsymbol{u}_\lambda^*\boldsymbol{\sigma}(Y_r)\,dB_r\end{aligned}$$

De plus, on a

$$X_t^\omega = \int_0^t \boldsymbol{b}(Y_r)\,dr + \int_0^t \boldsymbol{\sigma}(Y_r)\,dB_r$$

En ajoutant ces 2 relations, on obtient

$$X_t^\omega + \boldsymbol{u}_\lambda(Y_t) = \boldsymbol{u}_\lambda(Y_0) + \int_0^t \lambda\boldsymbol{u}_\lambda(Y_r)\,dr + \int_0^t (D\boldsymbol{u}_\lambda^*\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma})(Y_r)\,dB_r.$$

Ainsi, en multipliant par ε, en remplaçant t par t/ε^2 et en choisissant $\lambda = \varepsilon^2$, on a

$$\varepsilon X_{t/\varepsilon^2}^\omega + \varepsilon\boldsymbol{u}_{\varepsilon^2}(Y_{t/\varepsilon^2}) = \varepsilon\boldsymbol{u}_{\varepsilon^2}(Y_0) + \varepsilon^3\int_0^{t/\varepsilon^2} \boldsymbol{u}_{\varepsilon^2}(Y_r)\,dr + \varepsilon\int_0^{t/\varepsilon^2} (D\boldsymbol{u}_{\varepsilon^2}^*\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma})(Y_r)\,dB_r.$$

Les variations quadratiques de la partie martingale $\varepsilon\int_0^{t/\varepsilon^2}(D\boldsymbol{u}_{\varepsilon^2}^*\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma})(Y_r)\,dB_r$ sont données par

$$\varepsilon^2\int_0^{t/\varepsilon^2} (D\boldsymbol{u}_{\varepsilon^2}^* + \mathrm{I})\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^*(D\boldsymbol{u}_{\varepsilon^2} + \mathrm{I})(Y_r)\,dr$$

et convergent, d'après le théorème ergodique, au moins en μ probabilité vers tA où A est une matrice $d \times d$ donnée par

$$A = \mathbb{M}\big[(\boldsymbol{\xi}^* + \mathrm{I})\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{\xi} + \mathrm{I})\big].$$

D'après le théorème de convergence des martingales, la partie martingale converge en loi, dans $C([0,T])$, vers un mouvement brownien centré et non-standard $A^{1/2}\bar{B}_t$.

D'autre part, on a d'après (4.14)

$$\mathbb{ME}\Big[\big|\varepsilon\boldsymbol{u}_{\varepsilon^2}(Y_{t/\varepsilon^2})\big|^2\Big] \leq C\mathbb{M}[\varepsilon^2|\boldsymbol{u}_{\varepsilon^2}|] = \varepsilon^2|\boldsymbol{u}_{\varepsilon^2}|_2^2$$

et cette dernière quantité tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$ d'après la proposition 4.4. De même,

$$\mathbb{ME}\Big[\big|\varepsilon\boldsymbol{u}_{\varepsilon^2}(Y_0)\big|^2\Big] = C\mathbb{M}[\varepsilon^2|\boldsymbol{u}_{\varepsilon^2}|] = \varepsilon^2|\boldsymbol{u}_{\varepsilon^2}|_2^2$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{ME}\Big[\Big|\varepsilon^3\int_0^{t/\varepsilon^2}\boldsymbol{u}_{\varepsilon^2}(Y_r)\,dr\Big|^2\Big] \leq & t\mathbb{ME}\Big[\varepsilon^4|\int_0^{t/\varepsilon^2}\big|\boldsymbol{u}_{\varepsilon^2}(Y_r)\big|^2\,dr\Big] \\ =& t\varepsilon^4|\int_0^{t/\varepsilon^2}\mathbb{ME}\big[\big|\boldsymbol{u}_{\varepsilon^2}(Y_r)\big|^2\big[\,dr \\ \leq & Ct^2\mathbb{M}[\varepsilon^2|\boldsymbol{u}_{\varepsilon^2}|] \\ =& Ct^2\varepsilon^2|\boldsymbol{u}_{\varepsilon^2}|_2^2,\end{aligned}$$

et ces 2 dernières quantités tendent vers 0. Ainsi on a prouvé :

Théorème 4.7. *Les lois finies-dimensionnelles du pocessus $\varepsilon X^{\omega}_{t/\varepsilon^2}$ convergent en loi vers celles d'un mouvement brownien $A^{1/2}B_t$.*

Bibliographie

[1] A. Bensoussan, J.L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, Amsterdam, North-Holland 1978.

[2] BREZIS H., *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, 1983.

[3] G. Da Prato, J. Zabczyk *Ergodicity for Infinite Dimensional Systems*, London Mathematical Society, Lecture Note Series 229, Cambridge University Press, 1996.

[4] S.M. Ethier, T.G. Kurtz, *Markov Processes*, John Wiley & Sons, New York, 1986.

[5] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic partial equation of second order*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaft 224, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1983.

[6] I.S. Helland, *Central limit theorems for martingales with discrete or continuous time*, Scand. J. Statist. 9, 79-94, 1982.

[7] J. Jacod, A. Shiryaev, *Limit Theorems for Stochastic Processes*,

[8] V.V. Jikov, S.M. Kozlov, O.A. Oleinik, *Homogenization of differential operators and integral functionals*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[9] S.M. Kozlov, *The Method of Averaging and Walks in Inhomogeneous Environments*, Russian Math. Surveys. (1985), 40, 73-145.

[10] H. Oelschlager, *Homogenization of a diffusion process in a divergence free random field*, Annals of Probability, 16, 1084-1126, 1988.

[11] S. Olla, *Homogenization of diffusion processes in Random Fields*, Publications de l'école doctorale de l'Ecole Polytechnique, 1994.

[12] H. Osada, *Diffusion processes with generators of generalized divergence form*, J. Math. Kyoto Univ., 1987, 27, 597-619.