UNIVERSITÉ PARIS-DAUPHINE

Crédit et processus à sauts

Author :
Rémi RHODES

Master 2 :
TSI

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Chapitre 2

Outils mathématiques

Dans ce qui suit, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé complet. On considère une filtration $(\mathcal{F}_t)_t$ satisfaisant les conditions usuelles :

1. $\mathcal{F}_t$ est complète,
2. $\mathcal{F}_t$ est continue à droite, ie $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$.

On suppose de plus que $\mathcal{F}_0$ est la tribu triviale complétée et que

$$\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t = \mathcal{F}.$$

2.1 Généralités sur les processus càdlàg

2.1.1 Définitions et premières propriétés

Un processus stochastiques $\{X_t; t \geq 0\}$ est dit càdlàg si, presque sûrement, ses trajectoires sont continues à droite avec limites à gauche :

$$X_t = \lim_{s \downarrow t} X_s \quad \text{et} \quad X_{t-} = \lim_{s \uparrow t} X_s.$$

Le saut de X à la date t est alors la quantité

$$\triangle X_t = X_t - X_{t-}$$

avec la convention $\triangle X_0 = 0$. Une classe importante de processus càdlàg est la famille des processus croissants :

Définition 1. *Un processus stochastique $\{X_t; t \geq 0\}$ est dit adapté croissant s'il est adapté, càdlàg, $X_0 = 0$ et si, presque sûrement, ses trajectoires sont croissantes.*

Remarque 2. *Il est facile de voir que pour tout processus stochastique adapté croissant, les instants de sauts forment presque sûrement un ensemble au plus dénombrable.*

En fait, on peut même montrer :

Proposition 3. *Soit $\{X_t; t \geq 0\}$ un processus stochastique adapté et càdlàg. Alors il existe une suite de temps d'arrêt $(T_n)_n$ telle que*

$$\{(t,\omega); \triangle X_t \neq 0\} \subset \{(t,\omega); T_n(\omega) = t\}.$$

On dit que la suite de temps d'arrêt épuise les sauts de X.

2.1.2 Processus à variations bornée et intégrale de Stieljes

Soit $T > 0$, on dit que la famille finie $(t_n)_{0\leq n\leq N}$ est une subdivision de $[0,T]$ si c'est une suite finie à valeurs dans $[0,T]$ telle que

$$0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_N = T.$$

Dans la suite, on note $\mathrm{Subd}([0,T])$ l'ensemble des subdivisions de $[0,T]$.

Définition 4. *Une fonction F définie sur $[0,T]$ est dite à variation bornée (ou finie) sur $[0,T]$ si*

$$V(F)_T = \sup_{(t_n)_n\in \mathrm{Subd}([0,T])} \{\sum_{i=0}^{N-1} |F(t_{i+1}) - F(t_i)|\} < +\infty.$$

Il est facile de voir que la fonction $t \mapsto V(F)_t$ est une fonction croissante positive. Si F est définie sur $\mathbb{R}_+$ et si pour tout $t < 0$ on a $V(F)_t < +\infty$, on dit que F est à variation finie sur $\mathbb{R}_+$. Si

$$\sup_{t>0} V(F)_t < +\infty$$

on dit que F est à variation bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Proposition 5. *Si X est un processus adapté croissant alors il est à variation finie sur $\mathbb{R}_+$.*

Démonstration. Il suffit de voir que $V_T(F) = F(T) - F(0)$ lorsque F est croissante. □

Proposition 6. *Si F est une fonction à variation finie sur $[0,T]$ alors F peut s'écrire comme la différence de 2 fonctions croissantes.*

Démonstration. Ecrivons

$$F(t) = \frac{V(F)_t + F(t)}{2} - \frac{V(F)_t - F(t)}{2}$$

et il est facile de vérifier que ces 2 fonctions sont croissantes. Par exemple

$$\begin{aligned} V(F)_{t+s} + F(t+s) &\geq V_t(F) + |F(t+s) - F(t)| + F(t+s) \\ &\geq V_t(F) + F(t). \end{aligned}$$

□

Soit F une fonction croissante càdlàg définie sur $\mathbb{R}_+$ et définissons la mesure μ_F par sa restriction aux intervalles :

$$\mu_F(]s,t]) = F(t) - F(s)$$

pour $s < t$. On peut ainsi définir

$$\int f(s)\, dF(s) = \int f(s)\, d\mu_F(s).$$

Si maintenant F est une fonction à variations finies alors $F = F_1 - F_2$ pour 2 fonctions croissantes F_1, F_2. On peut ainsi définir l'intégrale :

$$\int f(s)\, dF(s) = \int f(s)\, dF_1(s) - \int f(s)\, dF_2(s).$$

Définition 7. *Un processus stochastique est dit à variation finie si, presque sûrement, ses trajectoires sont à variation finie sur* $\mathbb{R}_+$.

Donc, pour un processus stochastique à variation finie, on peut définir trajectoire par trajectoire les intégrales

$$\int H_s(\omega)\, dX_s,$$

pourvu que H soit mesurable et bornée.

2.2 Processus de Poisson

2.2.1 Processus de Poisson standard

Définition 8. *Soit $\lambda > 0$. Un processus $\{N_t; t \geq 0\}$ est appelé $(\mathcal{F}_t)_t$-processus de Poisson d'intensité λ ssi :*

1. *le processus N est $(\mathcal{F}_t)_t$-adapté,*
2. *presque sûrement, ses trajectoires sont croissantes, continues à droites et à valeurs entières,*
3. *pour tous $0 \leq s < t$, la variable aléatoire $N_t - N_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$,*
4. *pour tous $0 \leq s < t$, la variable aléatoire $N_t - N_s$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(t-s)$, ie :*

$$I\!P(N_t - N_s = k) = e^{-\lambda(t-s)} \frac{\lambda^k (t-s)^k}{k!}$$

pour $k \in \mathbb{N}$.

Soit N un processus de Poisson standard d'intensité $\lambda > 0$. La suite des temps de sauts de N est la famille $(\tau_n)_n$ de $(\mathcal{F}_t)_t$ temps d'arrêt définie par :

$$\tau_n = \inf\{t > \tau_{n-1}; N_t \neq N_{\tau n-1}\}$$

avec $\tau_0 = 0$. On peut également remarquer que

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0; N_t = n\}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

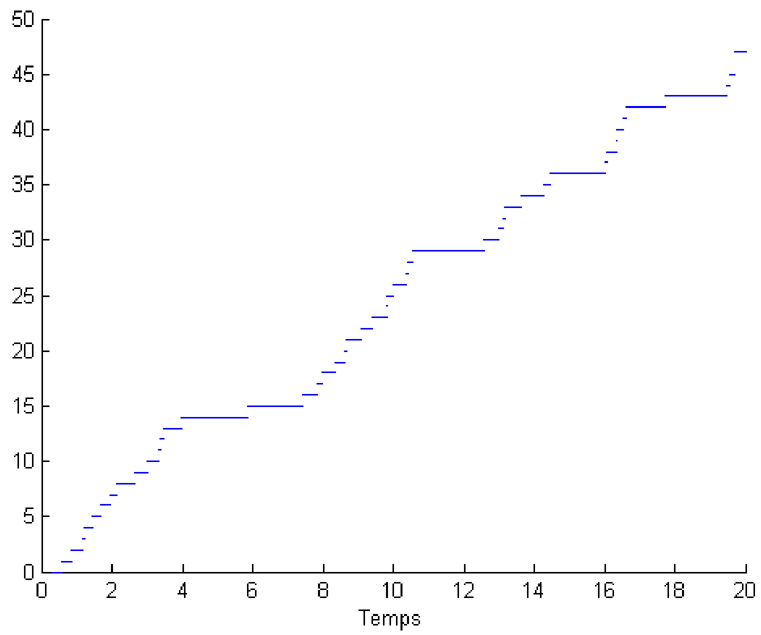

FIGURE 2.1 – Simulation d'un processus de Poisson

Proposition 9. *Pour tout $n \geq 1$, on pose*

$$\xi_n = \tau_n - \tau_{n-1}.$$

Alors la suite $(\xi_n)_n$ est une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées, leur loi commune étant une loi exponentielle de paramètre λ.

Réciproquement, on a :

Théorème 10. *Soit $(\xi_n)_n$ une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées de loi commune la loi exponentielle de paramètre λ. Pour tout $t \geq 0$, on pose*

$$N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{t \leq \tau_n\}}.$$

Alors N est un processus de Poisson par rapport à sa filtration naturelle d'intensité λ.

Voici quelques propriétés des processus de Poisson :

Proposition 11. *Soit N un processus de Poisson standard d'intensité $\lambda > 0$ et $(\tau_n)_n$ la suite de ses temps de sauts. Alors*

$$\mathbb{E}[N_t] = \lambda t, \quad \mathrm{Var}(N_t) = \lambda t \quad \textit{et} \quad \mathbb{E}[e^{uN_t}] = e^{\lambda t(e^u - 1)}.$$

De plus, τ_n suit une loi gamma de paramètre (n, λ), c'est-à-dire

$$I\!P(\tau_n \in dt) = \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\{t \geq 0\}} \quad \textit{et} \quad \mathbb{E}[e^{-\mu \tau_n}] = \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^n.$$

Théorème 12. Comportement asymptotique *Si N est un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ alors, lorsque t tend vers $+\infty$:*

$$p.s. \quad \frac{N_t}{t} \to \lambda \quad et \quad \sqrt{\frac{t}{\lambda}}\Big(\frac{N_t}{t} - \lambda\Big) \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0,1).$$

2.2.2 Intégrale stochastique

Soit N un processus de Poisson standard d'intensité $\lambda > 0$. Pour tout processus stochastique mesurable et borné C, on définit l'intégrale stochastique $\int C_r\, dN_r$ trajectoires par trajectoires à l'aide de l'intégrale de Stieljes, ce qui donne également :

$$\int_0^t C_r\, dN_r = \sum_{n \geq 1} C_{\tau_n} \mathbb{1}_{\tau_n \leq t}.$$

Cette intégrale est bien finie car il n'y a qu'un nombre fini de sauts sur chaque intervalle $[0, t]$.

2.2.3 Processus de Poisson et martingales

Proposition 13. *Soit N un processus de Poisson standard d'intensité $\lambda > 0$, a un réel et h une fonction borélienne bornée. Les processus suivants sont des $(\mathcal{F}_t)_t$-martingales :*

1. $X_t = N_t - \lambda t$ *(appelée martingale compensée de N),*
2. $X_t = (N_t - \lambda t)_t^2 - \lambda t$,
3. $X_t = e^{aN_t - \lambda t(e^a - 1)}$,
4. $X_t = \int_0^t h(r)\, dN_r - \lambda \int_0^t h(r)\, dr$,
5. $X_t = \big(\int_0^t h(r)\, dN_r - \lambda \int_0^t h(r)\, dr\big)^2 - \lambda \int_0^t h(r)^2\, dr$,
6. $X_t = e^{\int_0^t h(r)\, dN_r - \lambda \int_0^t (e^{h(r)} - 1)\, dr}$.

2.2.4 Changement de probabilité

Soit N un processus de Poisson standard d'intensité $\lambda > 0$. Pour tout réel $b > -1$, on définit

$$L_t^b = (1+b)^{N_t} e^{-\lambda b t}.$$

D'après la proposition précédente, L^b est une $(\mathcal{F}_t)_t$-martingale strictement positive d'espérance 1. Pour $T > 0$, on peut alors définir la probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$ par

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A L_T^b]$$

pour tout $A \in \mathcal{F}_T$.

Proposition 14. *Sous la probabilité $\mathbb{Q}$, le processus N est un $(\mathcal{F}_t)_t$-processus de Poisson d'intensité $(1+b)\lambda$.*

2.2.5 Intégration par parties

Soit N un processus de Poisson standard d'intensité $\lambda > 0$. On considère 2 fonctions boréiennes bornées h et k. On définit les processus :

$$H_t = h_0 + \int_0^t h(r)\,dN_r \quad \text{et} \quad K_t = k_0 + \int_0^t k(r)\,dN_r$$

pour des constantes h_0 et k_0 données. On a

$$H_t K_t = h_0 k_0 + \int_0^t H_{r-} k(r)\,dN_r + \int_0^t K_{r-} h(r)\,dN_r + \int_0^t h(r)k(r)\,dN_r.$$

2.2.6 Formule d'Itô

Soit N un processus de Poisson standard d'intensité $\lambda > 0$. On considère une fonction boréiennes bornée h et on définit le processu :

$$H_t = h_0 + \int_0^t h(r)\,dN_r$$

pour des constantes h_0 et k_0 données. Pour toute fonction bornée $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a

$$F(H_t) = F(h_0) + \int_0^t (F(H_{r-} + h(r)) - F(H_{r-}))\,dN_r$$

2.3 Processus de Poisson inhomogènes

On généralise la notion de processus de Poisson en faisant varier l'intensité λ avec le temps.

Définition 15. *Soit $\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ une filtration et $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne telle que*

$$\int_0^t \lambda(r)\,dr < +\infty \quad \textit{pour tout } t > 0 \quad \textit{et} \quad \int_0^\infty \lambda(r)\,dr = +\infty.$$

Un processus stochastique N est appelé processus de Poisson inhomogène d'intensité λ si :

1. *N est adapté,*
2. *presque sûrement, les trajectoires de N sont croissantes, continues à droite et à valeurs entières,*
3. *pour tous $0 \leq s < t$, la variable aléatoire $N_t - N_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$,*
4. *pour tous $0 \leq s < t$, la variable aléatoire $N_t - N_s$ suit une loi de Poisson de paramètre $\Lambda(s,t)$, ie :*

   $$\mathbb{P}(N_t - N_s = k) = e^{-\Lambda(s,t)} \frac{\Lambda(s,t)^k}{k!}$$

   pour $k \in \mathbb{N}$ où

   $$\Lambda(s,t) = \Lambda(t) - \Lambda(s) \quad \textit{avec} \quad \Lambda(t) = \int_0^t \lambda(r)\,dr.$$

On peut vérifier que pour un processus de Poisson inhomogène d'intensité λ, on a

$$\mathbb{E}[N_t] = \Lambda(t) = \mathrm{Var}(N_t) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[e^{uN_t}] = e^{(e^u-1)\Lambda(t)}.$$

On peut comme précédemment définir la suite des temps $(\tau_n)_n$ de sauts de N définie par

$$\tau_n = \inf\{t > \tau_{n-1}; N_t \neq N_{\tau_{n-1}}\}$$

avec $\tau_0 = 0$.

Proposition 16. *Soit N un processus de Poisson inhomogène d'intensité λ et soit $(\tau_n)_n$ la suite de ses temps de sauts. Alors*

$$I\!P(\tau_n \in dt) = \lambda(t)e^{-\Lambda(t)}\frac{\Lambda(t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau_n \leq t) &= \mathbb{P}(N_t \geq n) \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\Lambda(t)}\frac{\Lambda(t)^k}{k!} \\
&= \int_0^t \Big(\sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\Lambda(r)}\frac{\Lambda(r)^k}{k!}\Big)' \, dr \\
&= \int_0^t \Big(-\lambda(r)\sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\Lambda(r)}\frac{\Lambda(r)^k}{k!} + \lambda(r)\sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\Lambda(r)}\frac{\Lambda(r)^{k-1}}{(k-1)!}\Big)\, dr \\
&= \int_0^t \lambda(r)e^{-\Lambda(r)}\frac{\Lambda(r)^{n-1}}{(n-1)!}\, dr.
\end{aligned}$$

□

Comme dans le cas des processus de Poisson, nous avons les différentes martingales suivantes :

Proposition 17. *Soit N un processus de Poisson inhomogène d'intensité λ et H un processus prévisible borné. Les processus suivants sont des martingales :*

1. $X_t = N_t - \Lambda(t)$ *(Λ est appelé compensateur de N),*
2. $X_t = \int_0^t H_r \, dN_r - \int_0^t H_r\lambda(r)\, dr$,
3. $X_t = \Big(\int_0^t H_r \, dN_r - \int_0^t H_r\lambda(r)\, dr\Big)^2 - \int_0^t H_r^2\lambda(r)\, dr$,
4. $X_t = \exp\Big(\int_0^t H_r \, dN_r - \int_0^t (e^{H_r}-1)\lambda(r)\, dr\Big)$.

2.3.1 Formule d'Itô

Proposition 18. *Soit N un processus de Poisson inhomogène d'intensité λ. Soit K un processus adapté et H un processus prévisible. Posons :*

$$X_t = x + \int_0^t (K_r - \lambda_r)\, dr + \int_0^t H_r \, dN_r.$$

Soit $F \in C^{1,1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. *Alors*

$$\begin{aligned} F(t,X_t) =& F(0,x) + \int_0^t \partial_t F(r,X_r)\,dr + \int_0^t \partial_x F(r,X_r)(K_r - \lambda_r)\,dr \\ &+ \int_0^t \big(F(r,X_{r-}+H_r) - F(r,X_{r-})\big)\,dN_r \end{aligned}$$

En appliquant cette proposition, on obtient :

Proposition 19. *Soit* N *un processus de Poisson inhomogène d'intensité* λ. *Soit* H *un processus prévisible* > -1 *tel que :*

$$\int_0^t |H_r|\lambda_r\,dr < +\infty \quad \textit{pour tout } t > 0.$$

Alors le processus L *défini par*

$$L_t = e^{-\int_0^t H_r\lambda_r\,dr} \prod_{0\le s\le t} (1 + H_s \triangle N_s)$$

est une martingale locale vérifiant

$$L_t = L_0 + \int_0^t L_{r-}H_r\,dN_r - \int_0^t L_{r-}H_r\lambda(r)\,dr.$$

Proposition 20. *Soit* N *un processus de Poisson inhomogène d'intensité* λ. *Soit* H *une fonction borélienne* > -1 *telle que :*

$$\int_0^t |H_r|\lambda_r\,dr < +\infty \quad \textit{pour tout } t > 0.$$

On suppose de plus que le processus L *défini par*

$$L_t = e^{-\int_0^t H_r\lambda_r\,dr} \prod_{0\le s\le t} (1 + H_s \triangle N_s)$$

est une martingale.

$$L_t = L_0 + \int_0^t L_{r-}H_r\,dN_r - \int_0^t L_{r-}H_r\lambda(r)\,dr.$$

Pour $T > 0$, *on définit la mesure de probabilité* $\mathbb{Q}$ *équivalente à* $\mathbb{P}$ *par :*

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}_{|\mathcal{F}_T} = L_T.$$

Alors, sous la probabilité $\mathbb{Q}$, *le processus* N *est un processus de Poisson inhomogène d'intensité*

$$\bar{\lambda}(t) = \lambda(t)(1 + H_t).$$

2.4 Processus de Poisson composé

2.4.1 Définition et premières propriétés

Définition 21. *Soit $\lambda > 0$ et ν une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. Un processus X est appelé processus de Poisson composé de paramètre (λ, ν) s'il est de la forme*

$$X_0 = 0 \quad et \quad X_t = \sum_{k\geq 1}^{N_t} Z_k \text{ pour } t > 0$$

(avec la convention $\sum_{k\geq 1}^{0} = 0$) où N est un processus de Poisson d'intensité λ, et $(Z_k)_{k\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi ν, indépendante du processus N.

Proposition 22. *Soit X un processus de Poisson composé de paramètre (λ, ν). Alors c'est un processus à accroissements stationnaires et indépendants. De plus*

$$I\!P(X_t \leq x) = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \nu^{*n}(]-\infty, x]).$$

Définition 23. *Soit μ une mesure de finie sur $\mathbb{R}$. Un processus X est appelé μ-processus de Poisson composé s'il est un processus de Poisson composé de paramètre $(\nu(\mathbb{R}), \frac{\nu(\cdot)}{\nu(\mathbb{R})})$.*

Proposition 24. *Soit X un μ-processus de Poisson composé. On a :*

$$\mathbb{E}[e^{iuX_t}] = e^{t\int_{\mathbb{R}}(e^{iuz}-1)\mu(dz)}.$$

2.4.2 Propriétés de martingales

Proposition 25. *Soit X un processus de Poisson composé de paramètre (λ, ν). Les processus suivants sont des $(\mathcal{F}_t)_t$-martingales :*

1. *$M_t = X_t - \lambda t\mathbb{E}[Z_1]$ (si Z_1 est intégrable, càd $\int_{\mathbb{R}} |x|\,\nu(dx) < +\infty$),*
2. *$M_t = (X_t - \lambda t\mathbb{E}[Z_1])^2 - \lambda t\mathbb{E}[Z_1^2]$ (si Z_1 est de carré intégrable, càd $\int_{\mathbb{R}} |x|^2\,\nu(dx) < +\infty$),*
3. *$M_t = (X_t - \lambda t\mathbb{E}[Z_1])^2 - \sum_{k=1}^{N_t} Z_k^2$ (si Z_1 est de carré intégrable, càd $\int_{\mathbb{R}} |x|^2\,\nu(dx) < +\infty$),*

Proposition 26. *Soit $X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Z_k$ un processus de Poisson composé de paramètre (λ, ν).*

1. *Le processus S défini par $S_t = S_0 e^{\mu t} \prod_{k=1}^{N_t}(1+Z_k)$ est une martingale locale si et seulement si $\mu + \lambda\mathbb{E}[Z_1] = 0$.*
2. *Le processus S défini par $S_t = S_0 e^{bt+X_t}$ est une martingale si et seulement si $\lambda\int_{\mathbb{R}}(1 - e^x)\,\nu(dx) = b$.*
3. *Soit u tel que $\mathbb{E}[e^{uZ_1}] < +\infty$. Alors le processus $S_t = e^{uX_t - t\lambda\int_{\mathbb{R}}(e^{uz}-1)\,\nu(dz)}$.*

2.4.3 Changement de probabilité

Proposition 27. *Soit ν, ν' deux mesures de probabilités sur $\mathbb{R}$ et $\lambda, \lambda' > 0$. Soit X un processus de Poisson composé de paramètre (λ, ν). On suppose que ν' est absolument continue par rapport à ν. On considère le processus L défini par*

$$L_t = \exp\Big(t(\lambda - \lambda') + \sum_{s \leq t} \ln \frac{\lambda' d\nu'}{\lambda d\nu}(\triangle X_s)\Big).$$

Le processus L est une martingale d'espérance égale à 1 et le processus X est un processus de Poisson composé sous la mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ définie par

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}_{|\mathcal{F}_t}} = L_t.$$

Chapitre 3

Approche structurelle

L'approche structurelle est une méthodologie d'évaluation d'obligations à risque de défaut, reposant sur la modélisation de la valeur de la firme émettrice. Le modèle de Merton (1974) est historiquement l'initiateur de cette approche. Dans ce modèle la dette de la firme est assimilée à une seule obligation à zéro-coupon et le risque de défaut peut survenir uniquement à la date d'échéance. Ce modèle reprend le cadre du modèle d'évaluation d'options de Black-Scholes (1973). Nous faisons, dans un premier temps, des rappels sur l'évaluation d'options dans le modèle de Black-Scholes et nous présentons ensuite le modèle de Merton. Supposer que le défaut peut survenir uniquement à la date d'échéance est une hypothèse très restrictive. Des extensions du modèle de Merton permettent de lever cette restriction, ce sont les modèles de premier temps de passage. Nous présentons dans ce cadre le modèle de Black-Cox (1976).

3.1 Rappels sur le modèle de Black-Scholes

On considère un marché financier formé par un actif sans risque S^0 et d actifs risqués $S^1, \ldots, S^d$. Pour modéliser l'incertitude quant aux prix futurs des actifs, on introduit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur lequel est défini un mouvement brownien standard d-dimensionnel B. On note $\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ la filtration naturelle du mouvement brownien B. On peut supposer sans perte de généralité que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni de cette filtration satisfait les conditions usuelles :
-$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est complet,
-$\mathcal{F}_0$ contient tous les évènements négligeables,
-$\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ est continue à droite.

La dynamique de prix de l'actif sans risque est donnée par :

$$dS_t^0 = S_t^0 r\, dt \quad \text{et } S_0^0 = 1,$$

celle des prix des actifs risqués est donnée par

$$dS_t^i = S_t^i \mu^i\, dt + \sum_{j=1}^{d} S_t^i \sigma_{ij}\, dB_t^j \quad \text{et } S_0^i = s^i.$$

On suppose que la matrice $\Sigma = (\sigma_{ij})_{ij}$ est symétrique définie positive.

On note $\tilde{S}^i_t = S^i_t/S^0_t$ le prix actualisé de l'actif risqué i et $\tilde{S}_t = (\tilde{S}^1_t, \dots, \tilde{S}^d_t)$. En appliquant Itô, on obtient

$$d\tilde{S}^i_t = \tilde{S}^i_t(\mu^i - r)\,dt + \sum_{j=1}^{d} \tilde{S}^i_t \sigma_{ij}\,dB^j_t \quad \text{et } \tilde{S}^i_0 = s^i.$$

On pose $\Lambda = \Sigma^{-1}(\mu - r\mathbb{I})$. On définit le processus

$$Z_t = \exp\Big(-\sum_{j=1}^{d} \lambda_j\,dB^j_t - \frac{1}{2}\|\lambda\|^2 t\Big).$$

Par le théorème de Girsanov (le rappeler et expliquer comment trouver λ), le processus $B^*_t = B_t + \lambda t$ est un mouvement brownien sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}^*$, équivalente à $\mathbb{P}$, définie pour $A \in \mathcal{F}_t$ par

$$\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{E}[\mathbb{I}_A Z_t].$$

Par conséquent, sous $\mathbb{P}^*$, on a :

$$d\tilde{S}^i_t = \sum_{j=1}^{d} \tilde{S}^i_t \sigma_{ij}\,dB^{*j}_t \quad \text{et } \tilde{S}^i_0 = s^i.$$

3.1.1 Stratégies autofinancées

Un investisseur disposant d'un capital initial x veut l'investir sur ce marché financier sur l'horizon de temps $[0;T]$. On suppose que le marché est sans frictions, c'est-à-dire :

Définition 28. *On dit que le marché est sans friction si :*

1. *les transactions ont lieu de manière continue,*
2. *il n'y a pas de contraintes de portefeuille,*
3. *il n'y a pas de coûts de transaction ni taxes.*

Dans ce cadre une stratégie financière autofinancée peut être décrite par un processus adapté d-dimensionnel $\theta_t = (\theta^1_t, \dots, \theta^d_t)$ pour $t \leq T$ vérifiant :

$$\int_0^T |\theta_r|^2\,dr < +\infty \quad \mathbb{P} \text{ a.s.}$$

où θ^i_t représente le nombre d'unités de l'actif risqué i détenues dans le portefeuille à la date t. Désignons par $X^{x,\theta}_t$ la valeur à la date t de la richesse associée au capital initial x et à la stratégie financière θ. Par la condition d'autofinancement (L'évolution du portefeuille ne dépend que du rendement des actifs, pas d'injection d'argent) :

$$\widetilde{X}^{x,\theta}_t = x + \int_0^t \theta_r\,d\tilde{S}_r$$

où $\widetilde{X}^{x,\theta}_t = X^{x,\theta}_t/S^0_t$. Une stratégie θ est dite admissible s'il existe une constante $c \geq 0$ telle que pour tout $t \in [0,T]$, $\widetilde{X}^{0,\theta}_t \geq -c$ presque sûrement. Dans la suite, on note $\mathcal{A}$ l'ensemble des stratégies admissibles. Remarquons que si θ est une stratégie admissible alors $\widetilde{X}^{x,\theta}$ est une $\mathbb{P}^*$-martingale locale.

3.1.2 Absence d'opportunité d'arbitrage

Une opportunité d'arbitrage est un portefeuille admissible $\theta \in \mathcal{A}$ tel que

$$\mathbb{P}(X_T^{0,\theta} \geq 0) = 1 \text{ et } \mathbb{P}(X_T^{0,\theta} > 0) > 0.$$

Dans le modèle de Black-Scholes, il n'existe aucune opportunité d'arbitrage. En effet, comme $(X_t^{0,\theta})_t$ est une martingale sous la proba risque neutre $\mathbb{P}^*$, équivalente à $\mathbb{P}$, on a $0 = \mathbb{E}^*[X_T^{0,\theta}]$. D'où $X_T^{0,\theta} = 0$ ps car $X_T^{0,\theta} \geq 0$.

3.1.3 Réplication d'options

Soit G une va $\mathcal{F}_T$ mesurable. Elle peut être interprétée comme la valeur terminale d'un actif contingent (obligation, option,...). Supposons qu'il existe une stratégie de réplication de G, cad il existe $x \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathcal{A}$ tels que $X_T^{x,\theta} = G$ ps. Le prix de l'actif contingent G est alors égal, sous la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage, à la valeur de la stratégie de réplication. Supposons que G soit de carré intégrable et considérons la martingale :

$$M_t^G = \mathbb{E}[G/S_T^0|\mathcal{F}_t].$$

Par le théorème de représentation des martingale, il existe un processus ϕ tel que

$$\int_0^T \phi_r^2 \, dr < +\infty \text{ ps et } M_t^G = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[G/S_T^0] + \int_0^t \phi_r \, dB_r.$$

Si l'on pose

$$\theta_t^G = \operatorname{diag}(\tilde{S}_t)^{-1}\Sigma^{-1}\phi_r,$$

on peut vérifier que θ^G est une stratégie admissible qui réplique G à partir du capital initial $x = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[S/S_T^0]$. Le prix de l'actif contingent G à la date t est alors donné par

$$P_t^G = X_t^{x,\theta^G} = S_t^0\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[G/S_T^0|\mathcal{F}_t].$$

3.1.4 Application à l'évaluation des options vanille

Considérons le cas où $d = 1$. Notons par $C(S^1, K, T)_t$ le prix à la date t d'un Call sur l'actif risqué S^1 de maturité T et de prix d'exercice K. D'après ce qui précède

$$\begin{aligned} C(S^1, K, T)_t =& e^{r(t-T)}\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[(S_T - K)_+|\mathcal{F}_t] \\ =& e^{r(t-T)}\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[(se^{\sigma^2 B_T^* + (r-\sigma^2/2)T} - K)_+|\mathcal{F}_t] \\ =& S_t^1 N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \end{aligned}$$

où $\sigma^2 = \sigma_1 1$ est la volatilité de l'actif S^1, N est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \text{ et } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

De même, le prix du Put $P(S^1, K, T)_t$ est donné par

$$\begin{aligned} P(S^1, K, T)_t =& e^{r(t-T)}\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[(S_T - K)_-|\mathcal{F}_t] \\ =& Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S_t^1 N(-d_1) \end{aligned}$$

3.1.5 Equation de Black-Scholes

Plaçons nous dans le cas où l'actif contingent G est donné par $g(S_T)$ où $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une application donnée. Supposons de plus que la valeur de la stratégie de réplication de G soit de la forme $P_t^G = v(t, S_t)$ où v est une application de classe $C^{1,2}$. En utilisant le lemme d'Itô, on a :

$$\begin{aligned} dv(t,S_t) =& dX_t^{x,\theta} = d(S_t^0 \tilde{X}_t^{x,\theta}) = S_t^0 d\tilde{X}_t^{x,\theta} + \tilde{X}_t^{x,\theta} dS_t^0 \\ =& S_t^0 \theta d\tilde{S}_t + rX_t^{x,\theta} dt = -r\theta S_t\, dt + \theta dS_t + rX_t^{x,\theta} dt \\ =& r(X_t^{x,\theta} - r\theta S_t)\, dt + \theta dS_t \\ =& r(v(t,S_t) - r\theta S_t)\, dt + \theta dS_t \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} dv(t,S_t) =& \partial_t v(t,S_t)\, dt + \partial_x v(t,S_t)\, dS_t \\ &+ \frac{1}{2} \mathrm{Trace}(\Sigma \mathrm{diag}(S_t^2) \partial_{xx}^2 v(t,S_t))\, dt \end{aligned}$$

En identifiant les 2 parties de ces équation, on trouve l'équation de Black-Scholes :

$$\partial_t v + \frac{1}{2} \mathrm{Trace}(\Sigma \mathrm{diag}(x)^2 \partial_{xx}^2 v) + r\partial_x v = rv$$

et la stratégie de réplication :

$$\theta_t = \partial_x v(t, S_t).$$

3.2 Modèle de Merton pour la dette d'une firme

Le modèle de Merton présenté ci-après, est le prototype des modèles structurels. Dans ce modèle on considère une firme ayant une dette de maturité T assimilée à un seul zéro coupon de valeur faciale L.

3.2.1 Valeur de la firme et évènement de défaut

Dans la suite, on note E_t la valeur des capitaux de la firme et par D_t la valeur de sa dette à la date t. La valeur de la firme à la date t est $V_t = E_t + D_t$. Pour modéliser la valeur de la firme, on introduit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur lequel est défini un mouvement brownien standard B. On note $\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ la filtration naturelle de B et on suppose que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ satisfait les conditions usuelles. On suppose que la dynamique de la valeur de la firme est donnée par :

$$dV_t = V_t \mu\, dt + V_t \sigma\, dB_t.$$

Définition 29. Evènement de défaut. *Dans le modèle de Merton, le défaut peut avoir lieu uniquement à la date échéance de la dette T. A cette date, deux situations sont possibles :*

1. *La valeur de la firme V_T est supérieure au montant de la dette L. Les créanciers touchent L et les actionnaires $V_T - L$.*
2. *La valeur de la firme V_T est inférieure au montant de la dette. La firme fait faillite, elle est liquidée, les créanciers touchent V_T et les actionnaires 0.*

3.2.2 Evaluation de la dette de la firme

Nous voyons que, dans ce modèle, les caractéristiques de la dette de la firme sont telles que :
- l'évènement de défaut est $D = \{V_T < L\}$
- le temps de défaut : T si $V_T < L$ et ∞ sinon.
- la valeur de recouvrement de la dette est V_T.

Nous voyons également :
- la valeur terminale des actionnaires est $E_T = (V_T - L)_+$,
- la valeur terminale des créanciers est $D_T = L - (V_T - L)_- = \min(V_T, L)$.

La dette peut être interprétée comme la différence entre la valeur faciale d'un zéro-coupon sans risque de défaut et une option de vente européenne sur V_T de maturité T et de prix d'exercice L. Cette option de vente est parfois désignée par "Put-to-default".

L'interprétation de la valeur terminale des créanciers en termes d'options permet d'exploiter les résultats du modèle de Black Scholes si l'on est en mesure d'identifier V_T à la valeur terminale d'un actif échangé sur le marché. C'est justement l'hypothèse de Merton (1974)

Hypothèse 1. *La valeur de la firme est un actif échangé sur le marché.*

Merton suppose également que le marché comporte un actif sans risque S^0 pouvant être assimilé à un zéro-coupon sans risque de valeur faciale 1 et de taux d'intérêt sans risque r constant : $S_t^0 = e^{r(T-t)}$.

Dans ce cas, on peut appliquer la méthodologie d'évaluation de Black et Scholes et nous obtenons que la valeur de la dette de la firme à chaque date t est

$$D_t = Le^{-r(T-t)} - P(V_t, L, T) = V_t N(d_1^v) + Le^{-r(T-t)} N(d_2^v)$$

où

$$d_1^v = \frac{\ln(V_t/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{et} \quad d_2^v = d_1^v - \sigma\sqrt{T-t}.$$

De manière analogue, puisque $E_t = V_t - D_t$, la valeur des capitaux de la firme est donnée par la valeur d'un call :

$$E_t = C(V_t, L, T) = V_t N(d_1^v) - Le^{-r(T-t)} N(d_2^v).$$

3.2.3 Stratégie de réplication

La valeur de la dette de la firme est de la forme $D_t = u(t, V_t)$ où u est de classe $C^{1,2}$. En appliquant les résultats de la section 3.1.5, on obtient la stratégie de réplication de la dette de la firme. Cette stratégie consiste à investir à chaque date t :

-un montant d'argent égal à aV_t en valeur de la firme avec

$$a = \partial_x u(t, V_t) = N(-d_1^v),$$

-un montant d'argent égal à $b = LN(d_2^v)$ en actif sans risque S^0.

3.2.4 Spread de crédit

On définit le rendement à échéance ('yield to maturity') en t de la dette de la firme comme étant le réel $Y^d(t,T)$ tel que

$$L = D_t e^{(T-t)Y^d(t,T)}$$

soit

$$Y^d(t,T) = -\frac{\ln(D_t/L)}{T-t}.$$

Une importante caractéristique d'une dette comportant un risque de défaut est la différence entre son rendement à échéance et celui d'une obligation sans risque de défaut. Cette différence est appelée spread de crédit. Dans ce modèle où le taux sans risque est donné par la constante r, le rendement à échéance sans risque à la date t est $Y^0(t,T) = r$. Ainsi le spread de crédit associé à la dette risquée de la firme, $S^d(t,T) = Y^d(t,T) - Y^0(t,T)$ est égal à

$$\begin{aligned} S^d(t,T) &= -\frac{\ln(D_t/L)}{T-t} - r \\ &= -\frac{\ln(D_t/L \times e^{r(T-t)})}{T-t} \end{aligned}$$

Si l'on utilise dans cette relation l'expression de la valeur de la dette obtenue précédemment

$$D_t = V_t N(d_1^v) + Le^{-r(T-t)} N(d_2^v)$$

on obtient

$$S^d(t,T) = -\frac{1}{T-t} \ln\left(\frac{1}{l_t} N(d_1^v) + N(d_2^v)\right)$$

où

$$l_t = \frac{Le^{-r(T-t)}}{V_t}$$

est appelé ratio de levier de la firme. On peut montrer que

$$\lim_{t \to T} S^d(t,T) = \begin{cases} +\infty & \text{sur } \{V_T < L\} \\ 0 & \text{sur } \{V_T \geq L\} \end{cases}$$

3.3 Modèle de Zhou

On introduit un processus de Poisson N avec intensité λ sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}^*$ et une suite $(U_i)_i$ de va iid avec espérance $\nu = \mathbb{E}^*[U_i]$. On suppose que B, N, $(U_i)_i$ sont indépendants. L'équation de la dynamique de V sous la proba risque neutre $\mathbb{P}^*$ a la forme suivante :

$$dV_t = V_{t-}\big((r - \lambda\nu)\, dt + \sigma_V\, dB_t + d\pi_t\big)$$

où π est donné par :

$$\pi_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i, \quad \forall t \in [0,T].$$

La filtration considérée est celle engendrée par B, π. On définit

$$\widetilde{\pi}_t = \pi_t - \lambda\nu t$$

qui est une martingale sous $\mathbb{P}^*$ pour cette filtration. En conséquence, le processus réactualisé $V_t^* = e^{-rt}V_t$ satisfait :

$$dV_t^* = V_{t-}^*\sigma_V\, dB_t + V_{t-}^*\, d\widetilde{\pi}_t,$$

et est donc une martingale sous $\mathbb{P}^*$. Pour résoudre cette EDS, on utilise la formule d'Itô suivante :

Théorème 30. *Soit X un processus de la forme*

$$X_t = \mu_t\, dt + \sigma_t\, dB_t + h_t\, d\pi_t$$

où μ, σ, h sont des processus continus à gauche et π est un processus de Poisson composé de la forme

$$\pi_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i.$$

Soit f une fonction de classe C^2. Alors :

$$\begin{aligned} f(t, X_t) =& f(0, X_0) + \int_0^t \partial_t f(r, X_{r-})\, dr + \int_0^t \partial_x f(r, X_{r-})\sigma_t\, dB_r + \int_0^t \partial_x f(r, X_{r-})\mu_t\, dr \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \partial_{xx}^2 f(r, X_r)\sigma_r^2\, dr + \sum_{i=1}^{N_t} f(r, X_{r-} + U_i) - f(r, X_{r-}) \end{aligned}$$

En appliquant Itô à la fonction $f = \ln$, on en déduit :

$$V_t = V_0 e^{\sigma_V B_t + (r - \frac{1}{2}\sigma_V^2 - \lambda\nu)t} \prod_{i=1}^{N_t}(1 + U_i). \tag{3.1}$$

On suppose de plus que $1 + U_i$ possède une distribution lognormale sous $\mathbb{P}^*$, ie

$$\ln(1 + U_i) \sim N(\mu, \sigma).$$

Ceci implique que

$$\nu = \mathbb{E}^*[U_i] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} - 1.$$

Proposition 31. *La probabilité conditionnelle de défaut satisfait :*

$$\mathbb{P}^*(V_T < L|\mathcal{F}_t) = e^{-\lambda(T-t)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\big(\lambda(T-t)\big)^i}{i!} N(-d_{2,i}(V_t, T-t))$$

où, pour $i \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+$,

$$d_{2,i}(V, t) = \frac{\ln(V/L) + \mu_i(t)}{\sigma_i(t)}$$

avec

$$\mu_i(t) = (r - \frac{1}{2}\sigma_V^2 - \lambda\nu)t + i\mu, \quad \sigma_i^2(t) = \sigma_V^2 t + i\sigma^2.$$

Preuve. Sur l'ensemble $\{N_T - N_t = i\}$ la variable aléatoire $V_T = V_t \frac{V_T}{V_t}$ peut s'écrire

$$V_T = V_t \exp\Big(\sigma_V(B_T - B_t) + (r - \frac{1}{2}\sigma_V^2 - \lambda\nu)(T-t) + \sum_{j=1}^{i} \xi_i\Big)$$

où les $(\xi_i)_i$ sont des va iid de loi $N(\mu, \sigma)$, et sont également indépendantes du brownien. En d'autres termes, $V_T = V_t e^{\xi}$ où ξ est une va gaussienne indépendante de $\mathcal{F}_t$ avec espérance :

$$\mathbb{E}^*[\xi] = (r - \frac{1}{2}\sigma_V^2 - \lambda\nu)(T-t) + i\mu$$

et variance

$$\mathrm{Var}^*[\xi] = \sigma_V^2(T-t) + i\sigma^2.$$

Donc la proba de défaut conditionnellement à $\mathcal{F}_t$, $\{N_T - N_t = i\}$ est donnée par :

$$\mathbb{P}^*(V_T < L|\mathcal{F}_t, N_T - N_t = i) = \mathbb{P}^*\big(V_t e^{\xi} < L|\mathcal{F}_t\big)$$

Si N est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, on a alors :

$$\mathbb{P}^*(V_T < L|\mathcal{F}_t, N_T - N_t = i) = N(-d_{2,i}(V_t), t).$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}^*(V_T < L|\mathcal{F}_t) = e^{-\lambda(T-t)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\big(\lambda(T-t)\big)^i}{i!} \mathbb{P}^*(V_T < L|\mathcal{F}_t, N_T - N_t = i) \quad \square$$

3.3.1 Valeur de la dette de la firme

On définit la valeur de la dette de la firme, ou obligation avec risque de défaut, $D(t,T)$ par

$$D(t,T) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^*[L - (V_T - L)_-|\mathcal{F}_t].$$

Observer que ce prix est donnée par analogie avec le modèle de Black-Scholes mais cette expression n'est pas justifiée par le fait qu'il existe une stratégie de réplication pour cet actif.

Proposition 32. *Pour tout $t \le T$, on a*

$$\begin{aligned} D(t,T) =& L e^{-r(T-t)} \Big(1 - \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-\lambda(T-t)} \frac{\big(\lambda(T-t)\big)^i}{i!} N(-d_{2,i}(V_t, T-t)) \\ &+ \frac{V_t}{L} \sum_{i=0}^{+\infty} e^{\mu_i(T-t) + \sigma_i^2(T-t)/2 - \lambda(T-t)} \frac{\big(\lambda(T-t)\big)^i}{i!} N(-d_{1,i}(V_t, T-t))\Big) \end{aligned}$$

où, pour $i \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\mu_i(t) = (r - \frac{1}{2}\sigma_V^2 - \lambda\nu)t + i\mu, \quad \sigma_i^2(t) = \sigma_V^2 t + i\sigma^2$$

et

$$d_{2,i}(V,t) = \frac{\ln(V/L) + \mu_i(t)}{\sigma_i(t)}, \quad d_{2,i}(V,t) = d_{2,i}(V,t) + \sigma_i(t).$$

Preuve. On remarque tout d'abord que

$$L - (V_T - L)_- = L - L\mathbb{1}_{\{V_T < L\}} + V_T \mathbb{1}_{\{V_T < L\}}$$

de sorte que

$$D(t,T) = S_t^0 L - L\mathbb{P}^*(V_T < L|\mathcal{F}_t) + S_t^0 \mathbb{E}^*(V_T \mathbb{1}_{\{V_T < L\}}|\mathcal{F}_t).$$

Bibliographie

[1] Kahane, J.-P. : Sur le chaos multiplicatif, *Ann. Sci. Math. Québec*, **9** no.2 (1985), 105-150.

[2] Knizhnik, V.G., Polyakov, A.M., Zamolodchikov, A.B. : Fractal structure of 2D-quantum gravity, *Modern Phys. Lett A*, **3**(8) (1988), 819-826.