Aix-Marseille Université
Anneé Universitaire 2017-2018

Séries et applications
L2 SPI

DM1 : PRÉPARATION DU TP 1 ET PROBLÈME EXTRAIT DE L'EXAMEN DE MAI 2017.

---

1 Préparation du TP 1

Exercice 1.

Étudier les intégrales suivantes : dire où sont les problèmes de convergence éventuels, et montrer que ces intégrales convergent

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx \qquad I_2 = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx \qquad I_3 = \int_0^\infty \cos(e^x)dx$$

Correction:

1. *Pour I_1 on propose une autre méthode qui ressemble à celle vue en TD mais très légèrement différente.*

   On remarque d'abord que la fonction $f_1 : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$.

   Pour étudier I_1 on la coupe donc en deux et on examine d'un côté $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx$ et de l'autre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$.

   D'un côté $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, donc la fonction f_1 a une limite en 0, et on n'a donc pas de problème de convergence en 0 car la fonction a une limite à gauche en ce point et donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx$ existe et est parfaitement définie.

   On a par contre un problème de convergence en $+\infty$. Nous allons donc étudier $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$.

   Remarquons qu'en intégrant par partie on a

$$\begin{aligned}\int_1^X \frac{\sin(x)}{x}dx &= \left[\frac{-\cos(x)}{x}\right]_1^X - \int_1^X \frac{-1}{x^2}(-\cos(x))dx \\ &= \frac{-\cos(X)}{X} + \cos(1) - \int_1^X \frac{\cos(x)}{x^2}dx \qquad (1)\end{aligned}$$

Nous voulons maintenant déterminer la limite de cette expression quand $X \to +\infty$.

— *Étudions* $\lim\limits_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{\cos(x)}{x^2}dx$

On a $|\cos(x)| \leq 1$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Donc on obtient la majoration pour tout* $x > 0$

$$\frac{|\cos(x)|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ *est une intégrale du type Riemann* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ *avec* $\alpha = 2 > 1$, *donc elle converge d'après le cours.*

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}dx$ *converge absolument, et donc converge. Donc* $\lim\limits_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{\cos(x)}{x^2}dx$ *existe.*

D'autre part on a pour tout $X > 0$ $\left|\frac{\cos(X)}{X}\right| \leq \frac{1}{X}$. *Or* $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{X} = 0$, *donc* $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\cos(X)}{X} = 0$.

Donc avec tout ce qu'on a fait on voit qu'en passant à la limite dans (4) $\lim\limits_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{\sin(x)}{x}dx$ *existe et est finie.*

Grâce à la première partie de notre travail sur $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx$, *on voit enfin que*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$$

converge.

2. *Pour* J_2 *on remarque que la fonction* $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^+$. *D'autre part pour tout* $x \geq 1$ *(cela n'est pas vrai pour* $0 \leq x < 1$, *voyez vous pourquoi ?)*

$$0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x} \qquad (2)$$

Montrons que $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ *converge. Pour cela nous faisons le calcul*

$$\begin{aligned}\int_1^X e^{-x}dx &= \left[-e^{-x}\right]_1^X \\ &= -e^{-X} + 1\end{aligned}$$

On voit que $\lim\limits_{X\to+\infty} -e^{-X}+1 = 1$ *et donc* $\lim\limits_{X\to+\infty}\int_1^X e^{-x}dx$ *existe.* *Donc l'intégrale* $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ *est convergente.*
Or d'après (2) et d'après le critère par comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives, on a donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ *qui converge et donc* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ *qui est convergente.*

3. *On étudie* $\lim\limits_{X\to+\infty}\displaystyle\int_0^X \cos(e^x)dx$.

   On commence par effectuer un changement de variables. On pose avec $X>0$

$$\left\{\begin{array}{c} t = e^x \\ dt = e^x dx \\ \frac{dt}{t} = dx \\ \text{Quand } x = 0, \qquad t = 1 \\ \text{Quand } x = X, \qquad t = e^X \end{array}\right.$$

   Cela donne donc pour $X>0$

$$\begin{aligned}\int_0^X \cos(e^x)dx &= \int_1^{e^X} \cos(t)\frac{dt}{t} \\ &= \int_1^{e^X} \frac{\cos(t)}{t}dt \qquad (3)\end{aligned}$$

   Cela ressemble beaucoup à ce qu'on a déjà fait pour J_1 *! Appliquons la même technique.*

   On fait donc une intégration par partie

$$\begin{aligned}\int_1^{e^X} \frac{\cos(x)}{x}dx &= \left[\frac{\sin(x)}{x}\right]_1^{e^X} - \int_1^{e^X} \frac{-1}{x^2}(\sin(x))dx \\ &= \frac{\sin(e^X)}{e^X} - \sin(1) + \int_1^{e^X} \frac{\sin(x)}{x^2}dx \qquad (4)\end{aligned}$$

   On va donc pouvoir travailler de la même manière que précédemment.
   Étudions $\lim\limits_{X\to+\infty}\displaystyle\int_1^{e^X} \frac{\sin(x)}{x^2}dx$.
   Quand $X\to+\infty$ *on a* $e^X\to+\infty$. *Par composition des limites il nous suffit donc de calculer pour* $T=e^X\to+\infty$ $\lim\limits_{T\to+\infty}\displaystyle\int_1^T \frac{\sin(x)}{x^2}dx$ *pour avoir notre résultat.*
   On a $|\sin(x)|\leq 1$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$. *Donc on obtient la majoration pour* $x>0$

$$\frac{|\sin(x)|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ *est une intégrale du type Riemann* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ *avec* $\alpha = 2 > 1$*, donc elle converge d'après le cours.*

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}dx$ *converge absolument, et donc converge. Donc* $\lim_{T\to+\infty} \int_1^T \frac{\sin(x)}{x^2}dx$ *existe.*

D'autre part on a pour tout $X > 0$ $\left|\frac{\sin(e^X)}{e^X}\right| \leq \frac{1}{e^X}$*. Or* $\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{e^X} = \lim_{X\to+\infty} e^{-X} = 0$*, donc* $\lim_{X\to+\infty} \frac{\sin(e^X)}{e^X} = 0$.

Donc avec tout ce qu'on a fait on voit qu'en passant à la limite dans (4) $\lim_{X\to+\infty} \int_1^{e^X} \frac{\cos(x)}{x}dx$ *existe et est finie. Ce qui combiné avec (3) nous donne le résultat.*

Exercice 2.

1. Montrer que toutes les intégrales suivantes sont correctement définies et sont bien convergentes

$$J_1 = \int_{-2\pi}^{2\pi} x^2\cos(x)dx, \quad J_2 = \int_0^{2\pi} \ln(x)\sin(x)dx, \quad J_3 = \int_{-10}^{10} \frac{x^2}{1+x^4}dx \quad J_4 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Correction:

(a) *La fonction* $x \mapsto x^2\cos(x)$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *donc intégrable sur tout intervalle borné, et en particulier sur* $[-2\pi,2\pi]$*. Donc* J_1 *est parfaitement définie.*

(b) *La fonction* $x \mapsto \ln(x)\sin(x)$ *est continue sur* $\mathbb{R}_*^+$*, donc localement intégrable sur* $]0,+\infty[$*. Remarquons qu'au voisinage de* 0 *on a* $\ln(x)\sin(x) \sim_{(0)} \ln(x)x$ *car on a* $\sin(x) \sim_{(0)} x$ *au voisinage de* 0*.*

Or $\lim_{x\to0} x\ln(x) = 0$ *donc* $\lim_{x\to0} \sin(x)\ln(x) = 0$*. La fonction* $x \mapsto \ln(x)\sin(x)$ *a donc une limite en* 0 *à gauche, et est donc localement intégrable sur l'intervalle* $[0,+\infty[$*, donc intégrable sur* $[0,2\pi]$*. Donc* J_2 *est parfaitement définie.*

(c) *La fonction* $x \mapsto \frac{x^2}{1+x^4}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *comme quotient de deux fonctions continues qui ne s'annulent pas, elle est donc intégrable sur l'intervalle* $[-10,10]$ *et* J_3 *est parfaitement définie.*

(d) *La fonction* $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *a son quotient qui s'annule en* 1 *et* -1*, et de plus* $\lim_{x\to1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$ *alors que* $\lim_{x\to-1^+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$*.*

Donc J_4 *est une intégrale généralisée. Étudions sa convergence. Nous proposons deux méthodes différentes : la deuxième est beaucoup moins rapide que l'autre mais s'adapte plus facilement à d'autres situations.*

Dans tous les cas nous remarquons que la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *est paire, donc* $\int_0^X \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-X}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$. *Donc étudier la convergence de* $\int_0^X \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ *quand* $X \to 1$ *revient à étudier la convergence pour* $X' = -X$ *de* $\int_{X'}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ *quand* $X' \to -1$.

Première méthode : *On remarque qu'une primitive de* $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *est* $\arcsin(x)$. *Donc on peut écrire pour* $1 > X > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^X \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx &= [\arcsin(x)]_0^X \\ &= \arcsin(X) - \arcsin(0) = \arcsin(X) \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{X \to 1} \arcsin(X) = \frac{\pi}{2}$. *Donc*

$$\lim_{X \to 1} \int_0^X \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2} \tag{5}$$

Donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ *converge, et donc par parité de la fonction* $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *l'intégrale* $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ *aussi. Donc* J_4 *converge.*

Deuxième méthode
Étudions donc la limite $\lim\limits_{X \to 1} \int_0^X \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.
Nous avons clairement $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}$ *pour* $0 < x < 1$
On a en faisant le changement de variable $u = 1 - x$

$$\left\{ \begin{array}{cc} u = 1 - x & \\ x = 1 - u & \\ du = -dx & \\ \textit{Quand } x = 0, & u = 1 \\ \textit{Quand } x = X, & u = 1 - X \end{array} \right.$$

Cela donne pour $0 < X < 1$

$$\begin{aligned} \int_0^X \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int_0^X \frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}dx & (6) \\ &= \int_{1-X}^1 \frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{2-u}}dx & (7) \end{aligned}$$

Avec $X \to 1$ *nous avons* $X' = 1 - X \to 0$. *Donc nous cherchons maintenant à examin er la limite* $\lim\limits_{X' \to 0} \int_{X'}^1 \frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{2-u}}dx$.

Or $\frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{2-u}} \sim_{(0)} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{u}}$. *Or l'intégrale de Riemann* $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}}du = \int_0^1 \frac{1}{u^\alpha}du$ *avec* $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ *est une intégrale convergente et les deux fonctions qui sont équivalentes sont positives. Donc d'après le critère de convergence par équivalent des intégrales généralisées de fonctions à valeurs positives* $\lim\limits_{X' \to 0} \int_{X'}^1 \frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{2-u}}dx$ *existe, et donc* $\lim\limits_{X \to 1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ *existe.*

Par parité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ l'intégrale $\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ converge aussi. Donc J_4 converge.

2. Calculer J_1 et J_4.

Correction:

— *Calculons J_1 à l'aide d'intégrations par partie.*

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_{-2\pi}^{2\pi} x^2 \cos(x) dx \\
&= \left[x^2 \sin(x)\right]_{-2\pi}^{2\pi} - \int_{-2\pi}^{2\pi} 2x \sin(x) dx \\
&= (2\pi)^2 \sin(2\pi) - (-2\pi)^2 \sin(-2\pi) - [-2x\cos(x)]_{-2\pi}^{2\pi} - \int_{-2\pi}^{2\pi} 2\cos(x) dx \\
&= 0 + 2 * (2\pi)\cos(2\pi) - 2(-2\pi)\cos(-2\pi) - [2\sin(x)]_{-2\pi}^{2\pi} \\
&= 4\pi + 4\pi - 0 = 8\pi
\end{aligned}$$

Donc $J_1 = 8\pi$.

— *Dans la question précédente on a déjà presque fait le calcul de J_4. En effet d'après (5) on a $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}$. Or*

$$J_4 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi$$

3. On pose la fonction dite de « cosinus intégral »

$$C_i(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt = \gamma + \ln(x) + \int_0^x \frac{\cos(t) - 1}{t} dt,$$

où $x > 0$ et $\gamma \sim 0.577\ldots$ est la constante d'Euler.

On ne cherchera pas à montrer la formule précédente, ni à calculer C_i ni γ qui sont évaluées grâce à des approximations numériques.

Calculer J_2 à l'aide d'une intégration par partie, en fonction de $C_i(2\pi)$, γ et $\ln(2\pi)$.

Correction:

L'énoncé suggère de faire une intégration par partie. L'idée est de dériver le logarithme et de prendre comme primitive de sin *(qui est la fonction qu'on intègre) la fonction $x \mapsto -\cos(x) + 1$, car elle s'annule en 0 et ne causera pas de divergence artificielle. Cela donne donc*

$$\begin{aligned}
J_2 &= \int_0^{2\pi} \ln(x)\sin(x) dx \\
&= [(-\cos(x) + 1)\ln(x)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{-\cos(x) + 1}{x} dx
\end{aligned}$$

Remarquons que vu qu'au voisinage de 0 $-\cos(x) + 1 \sim_{(0)} \frac{x^2}{2}$ on a donc $(-\cos(x) + 1)\ln(x) \sim_{(0)} \frac{x^2}{2}\ln(x)$ qui tend vers 0 quand $x \to 0$.

Donc cela donne

$$\begin{aligned} J_2 &= [(-\cos(x)+1)\ln(x)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{-\cos(x)+1}{x}dx \\ &= (-\cos(2\pi)+1)\ln(2\pi) - 0 + \int_0^{2\pi} \frac{\cos(x)-1}{x}dx = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(x)-1}{x}dx \end{aligned}$$

Or d'après la formule dans l'énoncé $\int_0^{2\pi} \frac{\cos(x)-1}{x}dx = C_i(2\pi) - \gamma - \ln(2\pi)$. *Cela donne donc*

$$J_2 = C_i(2\pi) - \gamma - \ln(2\pi)$$

4. On veut calculer J_3.

   Si vous savez faire ce calcul alors allez-y ! Si non on vous propose de suivre les étapes suivantes.

   L'objectif est d'abord de décomposer $\frac{x^2}{1+x^4}$ en éléments simples puis d'intégrer.

   (a) Factoriser $1+x^4$ en le produit de deux polynômes de degré 2.

   Correction:

   On remarque qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} 1+x^4 &= (1+x^2)^2 - 2x^2 \\ (\text{ en utilisant la formule} & \quad a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab \text{ pour } a,b \in \mathbb{R}) \\ 1+x^4 &= (1+x^2-\sqrt{2}x)(1+x^2+\sqrt{2}x) \\ (\text{ en utilisant la formule} & \quad a^2-b^2 = (a-b)(a+b) \text{ pour } a,b \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

   (b) Calculer a_1, a_2, b_1 et b_2 tels que

$$\frac{x^2}{1+x^4} = \frac{a_1x+b_1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{a_2x+b_2}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

   Correction:

   Retroussons nos manches et prenons une bonne respiration avant de commencer... C'est parti !

$$\frac{a_1x+b_1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{a_2x+b_2}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$
$$= \frac{(a_1x+b_1)(x^2+\sqrt{2}x+1)+(a_2x+b_2)(x^2-\sqrt{2}x+1)}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}$$
$$= \frac{a_1x^3+b_1x^2+a_1\sqrt{2}x^2+b_1\sqrt{2}x+a_1x+b_1}{x^4+1}$$
$$+\frac{a_2x^3+b_2x^2-a_1\sqrt{2}x^2-b_2\sqrt{2}x+a_2x+b_2}{x^4+1}$$
$$= \frac{(a_1+a_2)x^3+(b_1+b_2+a_1\sqrt{2}-a_2\sqrt{2})x^2+(b_1\sqrt{2}-b_2\sqrt{2}+a_1+a_2)x+b_1+b_2}{x^4+1}$$

Par identification avec $\frac{x^2}{1+x^4}$ *on obtient le système*

$$\begin{cases} a_1+a_2 &= 0 \\ b_1+b_2+a_1\sqrt{2}-a_2\sqrt{2} &= 1 \\ b_1\sqrt{2}-b_2\sqrt{2}+a_1+a_2 &= 0 \\ b_1+b_2 &= 0 \end{cases}$$

Cela donne donc le système équivalent en utilisant le fait que $a_1+a_2=0$ *et* $b_1+b_2=0$

$$\begin{cases} a_1+a_2 &= 0 \\ a_1\sqrt{2}-a_2\sqrt{2} &= 1 \\ b_1\sqrt{2}-b_2\sqrt{2} &= 0 \\ b_1+b_2 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 &= -a_2 \\ a_1\sqrt{2}+a_1\sqrt{2} &= 1 \\ b_1 &= b_2 \\ b_1 &= -b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 &= -a_2 \\ a_1 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ b_1 &= 0 \\ b_2 &= 0 \end{cases}$$

On obtient donc

$$\begin{cases} a_2 &= -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ a_1 &= \frac{\sqrt{2}}{4} \\ b_1 &= 0 \\ b_2 &= 0 \end{cases}$$

(c) Calculer $\int_{-10}^{10} \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx$ et $\int_{-10}^{10} \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx$

Correction:

Ces intégrales sont parfaitement définies car

- *les fonctions* $x \mapsto x^2-\sqrt{2}x+1$ *et* $x \mapsto x^2+\sqrt{2}x+1$ *sont continues et ne s'annulent pas sur* $\mathbb{R}$. *En effet* $1+x^4 \neq 0$ *pour tout* x *et* $1+x^4 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$ *donc aucun des facteurs ne s'annule sur* $\mathbb{R}$. *Donc ils sont de signe constant et comme* x^2 *a pour coefficient dominant un coefficient positif,* $x \mapsto x^2-\sqrt{2}x+1$ *et* $x \mapsto x^2+\sqrt{2}x+1$ *sont donc toujours strictement positives.*
- *Donc les fractions* $x \mapsto \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}$ *et* $x \mapsto \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}$ *sont continues sur* $\mathbb{R}$ *et donc intégrables sur* $[-10,10]$.

On reconnait que le numérateur est la dérivée du dénominateur dans les deux cas.

On a donc

$$\begin{aligned}\int_{-10}^{10}\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx &= \left[\ln\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\right]_{-10}^{10}\\ &= \ln\left(10^2-10\sqrt{2}+1\right)-\ln\left((-10)^2+10\sqrt{2}+1\right)\\ &= \ln\left(\frac{101-10\sqrt{2}}{101+10\sqrt{2}}\right) \qquad (8)\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\int_{-10}^{10}\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx &= \left[\ln\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\right]_{-10}^{10}\\ &= \ln\left(10^2+10\sqrt{2}+1\right)-\ln\left((-10)^2-10\sqrt{2}+1\right)\\ &= \ln\left(\frac{101+10\sqrt{2}}{101-10\sqrt{2}}\right) \qquad (9)\end{aligned}$$

(d) Trouver $a \neq 0$ et $b \neq 0$ tels que

$$x^2+\sqrt{2}x+1=(x+a)^2+b^2=b^2\left(\left(\frac{x}{b}-\frac{a}{b}\right)^2+1\right)$$

et

$$x^2-\sqrt{2}x+1=(x-a)^2+b^2=b^2\left(\left(\frac{x}{b}-\frac{a}{b}\right)^2+1\right)$$

Correction:

On peut écrire en voyant les deux premiers termes comme provenant du développement d'un carré

$$\begin{aligned}x^2+\sqrt{2}x+1 &= \left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1\\ &= \left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{2}{4}+1\\ &= \left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}\left(2\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{2}x+\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{2}x+1\right)^2+1\right)\end{aligned}$$

On voit que en changeant le signe devant le terme $\sqrt{2}x$ on a aussi le résultat

$$x^2 - \sqrt{2}x + 1 = \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{2}x - 1\right)^2 + 1\right)$$

On a donc bien ce qu'on veut avec $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(e) En déduire $\displaystyle\int_{-10}^{10} \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx$ et $\displaystyle\int_{-10}^{10} \frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx$

Correction:

— *On a*

$$\int_{-10}^{10} \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx = \int_{-10}^{10} \frac{2}{\left(\sqrt{2}x+1\right)^2+1}dx$$

On pose alors

$$\begin{cases} u = \sqrt{2}x+1 \\ du = \sqrt{2}dx \\ \frac{1}{\sqrt{2}}du = dx \\ Quand\ x = -10, \qquad u = -10\sqrt{2}+1 \\ Quand\ x = 10, \qquad u = 10\sqrt{2}+1 \end{cases}$$

Cela donne

$$\begin{aligned} \int_{-10}^{10} & \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx \\ &= \int_{-10}^{10} \frac{2}{\left(\sqrt{2}x+1\right)^2+1}dx \\ &= \int_{-10\sqrt{2}+1}^{10\sqrt{2}+1} \frac{2}{u^2+1}\,\frac{1}{\sqrt{2}}du \\ &= \sqrt{2}\int_{-10\sqrt{2}+1}^{10\sqrt{2}+1} \frac{1}{u^2+1}du \\ &= \sqrt{2}\left[\arctan(x)\right]_{-10\sqrt{2}+1}^{10\sqrt{2}+1} \\ &= \sqrt{2}\left(\arctan(10\sqrt{2}+1)-\arctan(-10\sqrt{2}+1)\right) \end{aligned} \tag{10}$$

— *De même on a*

$$\int_{-10}^{10} \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx = \int_{-10}^{10} \frac{2}{\left(\sqrt{2}x-1\right)^2+1}dx$$

On pose alors

$$\begin{cases} u = \sqrt{2}x-1 \\ du = \sqrt{2}dx \\ \frac{1}{\sqrt{2}}du = dx \\ Quand\ x = -10, \qquad u = -10\sqrt{2}-1 \\ Quand\ x = 10, \qquad u = 10\sqrt{2}-1 \end{cases}$$

Cela donne

$$\begin{aligned}
\int_{-10}^{10} & \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx \\
&= \int_{-10}^{10} \frac{2}{\left(\sqrt{2}x-1\right)^2+1}dx \\
&= \int_{-10\sqrt{2}-1}^{10\sqrt{2}-1} \frac{2}{u^2+1}\,\frac{1}{\sqrt{2}}du \\
&= \sqrt{2}\int_{-10\sqrt{2}-1}^{10\sqrt{2}-1} \frac{1}{u^2+1}du \\
&= \sqrt{2}\left[\arctan(x)\right]_{-10\sqrt{2}-1}^{10\sqrt{2}-1} \\
&= \sqrt{2}\left(\arctan(10\sqrt{2}-1)-\arctan(-10\sqrt{2}-1)\right) \qquad (11)
\end{aligned}$$

(f) Calculer J_3

Correction:

On a

$$\begin{aligned}
J_3 &= \int_{-10}^{10} \frac{x^2}{1+x^4}dx \\
&= \int_{-10}^{10} \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx - \int_{-10}^{10} \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\int_{-10}^{10} \frac{2x}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx - \frac{\sqrt{2}}{8}\int_{-10}^{10} \frac{2x}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\int_{-10}^{10} \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx - \frac{\sqrt{2}}{8}\int_{-10}^{10} \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx \\
&\quad +\frac{\sqrt{2}}{8}\int_{-10}^{10} \frac{\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx + \frac{\sqrt{2}}{8}\int_{-10}^{10} \frac{\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\int_{-10}^{10} \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx - \frac{\sqrt{2}}{8}\int_{-10}^{10} \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx \\
&\quad +\frac{1}{4}\int_{-10}^{10} \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx + \frac{1}{4}\int_{-10}^{10} \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx
\end{aligned}$$

D'après les calculs que l'on a fait précédemment on obtient donc grâce à (8), (9), (10) et (11)

$$
\begin{aligned}
J_3 &= \int_{-10}^{10} \frac{x^2}{1+x^4}dx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(\frac{101-10\sqrt{2}}{101+10\sqrt{2}}\right) - \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(\frac{101+10\sqrt{2}}{101-10\sqrt{2}}\right) \\
&+ \frac{1}{4}\sqrt{2}\left(\arctan(10\sqrt{2}-1) - \arctan(-10\sqrt{2}-1)\right) \\
&+ \frac{1}{4}\sqrt{2}\left(\arctan(10\sqrt{2}+1) - \arctan(-10\sqrt{2}+1)\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(\frac{101-10\sqrt{2}}{101+10\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(\frac{101-10\sqrt{2}}{101+10\sqrt{2}}\right) \\
&+ \frac{1}{4}\sqrt{2}\left(\arctan(10\sqrt{2}-1) + \arctan(10\sqrt{2}+1)\right) \\
& (\textit{car la fonction } \arctan \textit{ est impaire}) \\
&+ \frac{1}{4}\sqrt{2}\left(\arctan(10\sqrt{2}+1) + \arctan(10\sqrt{2}-1)\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\frac{101-10\sqrt{2}}{101+10\sqrt{2}}\right) \\
&+ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\arctan(10\sqrt{2}-1) + \arctan(10\sqrt{2}+1)\right)
\end{aligned}
$$

2 Étude de l' intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))dx$

L'objectif de cette partie est le calcul de $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))dx$ et $J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))dx$.

1. Justifier pourquoi ces intégrales sont des intégrales généralisées.

Correction:

— *La fonction* $x \mapsto \ln(\sin(x))$ *est continue sur* $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ *comme composée de fonctions continues sur cet intervalle. On remarque que* $\lim_{x\to 0^+} \ln(\sin(x)) = -\infty$ *car* $\sin(x) \to 0$ *pour* $x \to 0$ *et* $\ln(X) \to -\infty$ *quand* $X \to 0^+$*. Donc par composition des limites en posant* $X = \sin(x)$ *on a* $\lim_{x\to 0^+} \ln(\sin(x)) = -\infty$*. Donc l'intégrale* I_1 *est généralisée.*

— *La fonction* $x \mapsto \ln(\cos(x))$ *est continue sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ *comme composée de fonctions continues. On remarque que* $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \ln(\cos(x)) = -\infty$ *car* $\cos(x) \to 0$ *pour* $x \to \frac{\pi}{2}^-$ *et* $\ln(X) \to -\infty$ *quand* $X \to 0^+$*. Donc par composition des limites en posant* $X = \cos(x)$ *on a* $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \ln(\cos(x)) = -\infty$*. Donc l'intégrale* I_2 *est généralisée.*

2. On pourra sans démonstration utiliser le résultat suivant

Proposition 1

Soient u et v deux fonctions définies au voisinage d'un point x_0 et de signe positif telles que $v(x) \to 0$ quand $x \to x_0$.

Si au voisinage d'un point x_0 on a $u(x) \sim v(x)$ alors

$$\ln(u(x)) \sim \ln(v(x))$$

Montrer que I_1 est une intégrale convergente.

Correction:

Pour x au voisinage de 0 on a $x \mapsto \sin(x)$ qui est de signe constant positif. De plus $\sin(x) \to 0$ pour $x \to 0$. Enfin $\sin(x) \sim_{(0)} x$. Donc en posant $u(x) = x$ et $v(x) = \sin(x)$ on peut donc appliquer la proposition et on obtient $\ln(\sin(x)) \sim_{(0)} \ln(x)$.

Les deux fonctions $x \mapsto \ln(\sin(x))$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont de signe constant au voisinage de 0 car elles sont négatives.

Montrons que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(x)dx$ converge et utilisons ensuite le critère de convergence par équivalent.
La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc localement intégrable sur cet intervalle. On a pour $X > 0$

$$\begin{aligned}
\int_X^{\frac{\pi}{2}} \ln(x)dx &= [x\ln(x)]_X^{\frac{\pi}{2}} - \int_X^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{x}dx \\
&= \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \int_X^{\frac{\pi}{2}} 1dx \\
&= \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} + X
\end{aligned}$$

Donc cette intégrale a une limite quand $X \to 0^+$ et elle est donc convergente.

Donc par le critère par équivalent des intégrales généralisées de fonctions de signe constant l'intégrale I_1 est donc convergente.

Remarque : *Cela n'était pas demandé dans le devoir mais nous pouvons quand même chercher à démontrer la proposition.*
Supposons que u et v sont deux fonctions définies au voisinage d'un point x_0 et de signe positif telles que $v(x) \to 0$ quand $x \to x_0$.

Supposons qu'au voisinage du point x_0 on a $u(x) \sim v(x)$.
Montrons qu'alors $\frac{\ln(u(x))}{\ln(v(x))} \to 1$ pour $x \to x_0$, ce qui montrera le résultat de la proposition.

On a $u(x) \sim_{(x_0)} v(x)$ donc on a $\frac{u(x)}{v(x)} \to 1$ pour $x \to x_0$. On peut donc écrire pour tout x $\frac{u(x)}{v(x)} = 1 + \varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to x_0$.

Cela donne donc $u(x) = v(x)(1+\varepsilon(x))$. *On calcule maintenant*

$$\begin{aligned}\frac{\ln(u(x))}{\ln(v(x))} &= \frac{\ln(v(x)(1+\varepsilon(x))}{\ln(v(x))} \\ &= \frac{\ln(v(x))+\ln(1+\varepsilon(x))}{\ln(v(x))} \\ &= 1+\frac{\ln(1+\varepsilon(x))}{\ln(v(x))}\end{aligned}$$

On a $v(x) \to 0$ *pour* $x \to x_0$. *Donc* $\ln(v(x)) \to -\infty$ *et donc* $\frac{1}{\ln(v(x))} \to 0$. *Or pour* $x \to x_0$ *on a* $\varepsilon(x) \to 0$ *d'après ce qu'on a dit précédemment. Donc* $1+\varepsilon(x) \to 1$ *quand* $x \to x_0$ *et donc* $\ln(1+\varepsilon(x)) \to 0$ *quand* $x \to x_0$. *Donc* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\ln(1+\varepsilon(x))}{\ln(v(x))} = 0$

Ce qui donne donc $\lim\limits_{x\to x_0} 1+\frac{\ln(1+\varepsilon(x))}{\ln(v(x))} = 1$ *et donc* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\ln(u(x))}{\ln(v(x))} = 1$.

Donc $\ln(u(x)) \sim_{(x_0)} \ln(v(x))$.

3. Montrer que $I_1 = J_1$.

Correction:

On effectue le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$. *Cela donne donc*

$$\left\{\begin{array}{ll} u = \frac{\pi}{2} - x & \\ x = \frac{\pi}{2} - u & \\ dx = -du & \\ \textit{Quand } x = 0, & u = \frac{\pi}{2} \\ \textit{Quand } x = \frac{\pi}{2}, & u = 0 \end{array}\right.$$

Cela donne donc vu que l'on sait que $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))dx \\ &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln(\sin(\frac{\pi}{2}-u))du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(\frac{\pi}{2}-u))du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(u))du = J_1 \end{aligned}$$

4. L'objectif de cette question est le calcul de I_1.
   (a) Calculer $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(x))dx$ en fonction de I_1 à l'aide du changement de variable $t = \pi - x$.

   Correction:

   On pose $t = \pi - x$ *ce qui donne*

$$\begin{cases} u = \pi - x \\ x = \pi - u \\ dx = -du \\ \textit{Quand } x = \frac{\pi}{2}, \qquad u = \frac{\pi}{2} \\ \textit{Quand } x = \pi, \qquad u = 0 \end{cases}$$

   On a donc en utilisant le fait que $\sin(\pi - u) = \sin(u)$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(x))dx &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(\sin(\pi - u))du \\ &= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(\pi - u))du \\ &= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(u))du = I_1 \end{aligned}$$

   (b) Montrer que $I_1 + J_1 = -\frac{\pi}{2}\ln(2) + I_1$.

   On rappelle que $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

Correction:

On a

$$\begin{aligned}
I_1 + J_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)) + \ln(\cos(x))dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)\cos(x))dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)dx
\end{aligned}$$

On pose maintenant $2x = u$ *ce qui donne donc*

$$\left\{\begin{array}{cc}
u = 2x & \\
x = \frac{1}{2}u & \\
dx = \frac{1}{2}du & \\
\textit{Quand } x = 0, & u = 0 \\
\textit{Quand } x = \frac{\pi}{2}, & u = \pi
\end{array}\right.$$

On a donc en utilisant la question précédente

$$\begin{aligned}
I_1 + J_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\left(\frac{\sin(u)}{2}\right) du \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(u)) - \ln(2) du \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi} \ln(\sin(u)) du - \ln(2)\pi\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(u)) du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(x)) dx\right) - \frac{\pi}{2}\ln(2) \\
&= \frac{1}{2}\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(u)) du\right) - \frac{\pi}{2}\ln(2) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(u)) du - \frac{\pi}{2}\ln(2) \\
&= I_1 - \frac{\pi}{2}\ln(2)
\end{aligned}$$

(c) Calculer I_1.

Correction:

On a d'après ce qu'on a vu $I_1 = J_1$ donc

$$\begin{aligned}
I_1 + J_1 &= I_1 - \frac{\pi}{2}\ln(2) \\
2I_1 &= I_1 - \frac{\pi}{2}\ln(2) \\
I_1 &= -\frac{\pi}{2}\ln(2)
\end{aligned}$$

5. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \ln(\sin(nx)) dx$.

   Montrer que $I_n = -\frac{\pi}{2n}\ln(2)$ à l'aide d'un changement de variables approprié.

   Correction:

   On pose donc $t = nx$ ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{cc}
t = nx & \\
x = \frac{1}{n}t & \\
dx = \frac{1}{n}dt & \\
\textit{Quand } x = 0, & u = 0 \\
\textit{Quand } x = \frac{\pi}{2n}, & u = \frac{\pi}{2}
\end{array}\right.$$

   Cela donne donc

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \ln(\sin(nx))dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(u))\frac{1}{n}du \\
&= \frac{1}{n}I_1 \\
&= -\frac{\pi}{2n}\ln(2)
\end{aligned}
$$

D'où le résultat.