Exercices pour réviser : séries, séries entières, séries de Fourier

Séries numériques

Exercice 1.

Déterminer la nature des séries suivantes

$$(1) \sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{n^3} \qquad (2) \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n)}{n^2} \qquad (3) \sum_{n\geq 1} \frac{(n+3)\sin(n)}{n(n+1)^2}$$

$$(4) \sum_{n\geq 1} \frac{n+5}{n!(n+4)} \qquad (5) \sum_{n\geq 1} \frac{n^5}{n!} \qquad (6) \sum_{n\geq 1} \frac{(n+2)^5}{n!}$$

$$(7) \sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^3} \qquad (8) \sum_{n\geq 1} \frac{2-\cos(n)}{\sqrt{n}} \qquad (9) \sum_{n\geq 1} (e^{-n}+1)$$

$$(10) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+2^n} \qquad (11) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \tan\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (12) \sum_{n\geq 1} \ln\left(\left|\cos(\frac{2}{n})\right|\right)$$

$$(13) \sum_{n\geq 1} \frac{2^{-n}}{3^n+2} \qquad (14) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\log(n^2+n+1)} \qquad (15) \sum_{n\geq 1} (\ln(n))^{-n}$$

Exercice 2.

On fixe $\alpha \in \mathbb{R}$.

Indiquer en fonction de α si les séries suivantes convergent absolument en distinguant selon les valeurs du paramètre α.

$$(1) \sum_{n\geq 0} 2^{-n} e^{in\alpha} \qquad (2) \sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n^2 \sin^{2n}(\alpha)} \qquad (3) \sum_{n\geq 1} \frac{n}{1+n^3\alpha}$$

$$(4) \sum_{n\geq 1} e^{n(\alpha-n)} \qquad (5) \sum_{n\geq 1} n e^{-n\alpha} \qquad (6) \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha^2+n}{n^2}$$

Séries entières

Exercice 3.

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes

$$(1) \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2} \qquad (2) \sum_{n\geq 1} n^n z^n \qquad (3) \sum_{n\geq 1} z^{2n}$$

$$(4) \sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} z^n \qquad (5) \sum_{n\geq 1} n(n-1) z^n \qquad (6) \sum_{n\geq 0} \frac{2^n - 3^n}{5^n} z^n$$

Exercice 4.

Calculer le rayon de convergence R de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$. La série converge-t-elle pour $z = R$?

Exercice 5.

Calculer le rayon de convergence R de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{nz^n}{n^2-1}$. La série converge-t-elle pour $z = R$?

Exercice 6.

Calculer le rayon de convergence R de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^{3n+1}}{3n+1}$. La série converge-t-elle pour $z = R$?

Exercice 7.

On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)}$ pour $x \in \mathbb{R}$ pour lequel la série existe.

Déterminer l'ensemble de définition de f

Exercice 8.

On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2+4n-1}{n!} x^n$ pour $x \in \mathbb{R}$ pour lequel la série existe.

Déterminer l'ensemble de définition de f

Exercice 9.

On considère l'équation différentielle

$$y'(x) = \frac{2y(x)}{1-x} \qquad (E)$$

Soit y une solution développable en série entière de (E) qu'on écrit $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

1. Montrer que les b_n vérifient l'équation récurrente $(n+1)b_{n+1} - (n+2)b_n = 0$. En déduire b_n en fonction de n.
2. Montrer que $y(x) = \frac{K}{(1-x)^2}$ pour $x \in]-1,1[$.

Exercice 10.

Donner le développement en série entière de la fonction $\displaystyle\int_0^x \frac{\arctan(t)}{t} dt$ ainsi que son domaine de validité.

Séries de Fourier

Dans toute cette partie on considérera des fonctions $T = 2\pi$ périodiques. Les coefficients de Fourier s'écriront donc

— pour $n \in \mathbb{Z}$ $c_n(f) = \displaystyle\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-int\frac{2\pi}{T}}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt.$
— pour $n \geq 1$ $a_n(f) = \displaystyle\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(nt\frac{2\pi}{T})dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt$
— pour $n \geq 0$ $b_n(f) = \displaystyle\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(nt\frac{2\pi}{T})dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt$
— $a_0(f) = \displaystyle\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt.$

La série de Fourier d'ordre N de f s'écrit donc $S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{int}$ ou $S_N(f)(t) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{N} a_n(f)\cos(nt) + \sum_{n=0}^{N} b_n(f)\sin(nt)$

Exercice 11.

Pour chacune des fonctions 2π périodiques suivantes
— Tracer le graphe de la fonction f pour t dans $[-2\pi,2\pi]$.
— Montrer que $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$ est finie.
— Calculer les coefficients de Fourier de f et donner sa série de Fourier.
— A t fixé $S_N(f)(t)$ converge-t-elle vers une limite quand $N \to +\infty$ et laquelle ?
— *Pour les étudiants de St-Jérôme :* la série de Fourier de f converge-t-elle en énergie ?

On étudiera donc les fonctions f suivantes

1. f est impaire, 2π périodique et vaut 1 si $0 \leq t < \pi$ et $f(\pi) = 0$.
2. f est 2π périodique et vaut $|t|$ sur $[-\pi,\pi[$.
3. f est 2π périodique et vaut t^2 sur $[0,2\pi[$.
4. f est 2π périodique et vaut t^2 sur $[-\pi,\pi[$.
5. f est 2π périodique et vaut $|\sin(t)|$ sur $[-\pi,\pi[$.

Exercice 12.

On considère les deux fonctions suivantes 2π-périodiques (étudiées numériquement dans le TP 3.)

— $f_3(t) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{|\sin(t)|}}$ pour $t \in]-\pi,0[$ et $t \in]0,\pi[$ et $f_3(t) = 0$ pour $t = 0$, et $t = -\pi$.

— $f_4(t) = \dfrac{1}{|\sin(t)|}$ pour $t \in]-\pi,0[$ et $t \in]0,\pi[$ et $f_4(t) = 0$ pour $t = 0$, $t = -\pi$.

Sans aucun calcul de coefficients de Fourier indiquer si l'égalité de Parseval est vérifiée pour ces fonctions.

La série de Fourier de f_4 existe-t-elle ?