TD Transformée de Fourier

Dans tout ce qui suit f est une fonction de $L^1(\mathbb{R}) = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

L'objectif ici est d'étudier quelques propriétés de la fonction $\hat{f}$ définie pour $\omega \in \mathbb{R}$ par

$$\hat{f}(\omega) = \int f(t)e^{-i\omega t}d\lambda(t)$$

La fonction $\hat{f}$ est appelée « Transformée de Fourier »de f.

Exercice 1. Premières propriétés

1. Montrer que $\hat{f}$ est une fonction définie sur tout $\mathbb{R}$, bornée et continue.
2. On suppose que f est de classe C^1 et que sa dérivée est aussi dans $L^1(\mathbb{R})$. Calculer $\widehat{f'}$ en fonction de $\hat{f}$. En déduire que $|\hat{f}(\omega)| \to 0$ pour $|\omega| \to +\infty$.
3. On suppose maintenant que la fonction $x \mapsto xf(x)$ est intégrable. Montrer alors que $\hat{f}$ est dérivable et calculer sa dérivée.
4. Plus généralement on suppose que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $x \mapsto x^n f(x)$ qui est intégrable. Quelle est la régularité de $\hat{f}$?

Exercice 2.

1. Montrer que si f est réelle alors pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ $\hat{f}(\omega) = \overline{\hat{f}(-\omega)}$
2. Soit $b \in \mathbb{R}$ et $g : t \mapsto g(t - b)$. Montrer que $\hat{g}(\omega) = e^{-i\omega b}\hat{f}(\omega)$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$.
3. Soit $a > 0$ et $g : t \mapsto f\left(\frac{t}{a}\right)$. Montrer que $\hat{g}(\omega) = a\hat{f}(a\omega)$.
4. Soit $\nu_0 \in \mathbb{R}$. Soit $g : t \mapsto e^{i\nu_0 t}f(t)$. Calculer $\hat{g}$ en fonction de $\hat{f}$.

Exercice 3. Exemples de transformées de Fourier

Soit $a > 0$, $b > 0$ et $c \in \mathbb{R}$. Vérifier que les fonctions suivantes sont dans $L^1(\mathbb{R})$. Tracer rapidement ces fonctions, et calculer leurs transformées de Fourier. Tracer ces dernières (ou le cas échéant leur partie réelle). Indiquer quelles sont les propriétés vues dans le premier exercice qui sont vérifiées.

1. $x \mapsto \frac{1}{2}\, \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$,
2. $x \mapsto \frac{1}{2}\, \mathbb{1}_{[c-1,c+1]}(x)$,
3. $x \mapsto f(x)$ avec $f(x) = e^{-2x}$ si $x \geq 0$ et 0 sinon.
4. $x \mapsto e^{-|x|}$
5. $x \mapsto e^{-a|x|}\sin(bx)$
6. $x \mapsto xe^{-2|x|}$

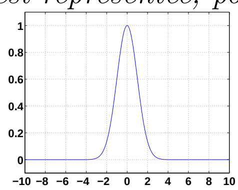
Exercice 4. Quizz des transformées de Fourier

Les figures suivantes représentent six signaux temporels réels à temps continu s_0 à s_4. Les signaux s_1 à s_4 ont été obtenus par des transformations simples du signal s_0 : modulation (multiplication par une exponentielle complexe), décalage, dilatation, ajout d'une constante...

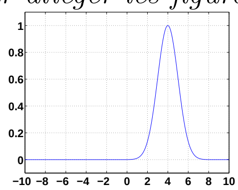
Sur la ligne suivante le signal $\widehat{s_0}$ représente la transformée de Fourier du signal s_0 qui est supposé être une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ à valeurs réelles.

Les signaux $\widehat{s}_a$ à $\widehat{s}_d$ sont les transformées de Fourier dans le désordre des signaux s_1 à s_4 !

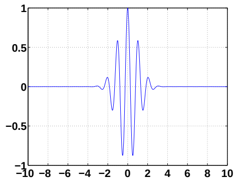
Remarque : certaines transformées de Fourier sont complexes, mais seule leur partie réelle est représentée, pour alléger les figures.



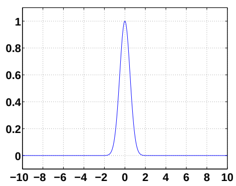
s_0



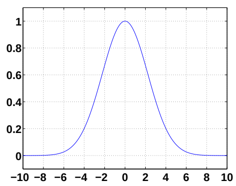
s_1



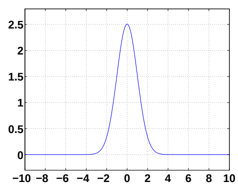
s_2



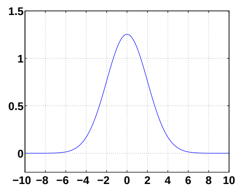
s_3



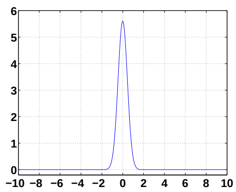
s_4



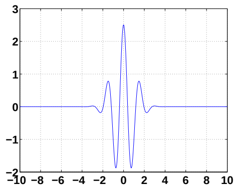
$\widehat{s_0}$



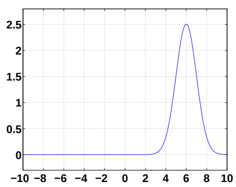
$\widehat{s_a}$



$\widehat{s_b}$



$\widehat{s_c}$



$\widehat{s_d}$

1. Identifier les transformations qui permettent de passer à chacun des signaux s_1 à s_4 à partir de s_0.
2. Reformer les couples $(s_i, \widehat{s}_j)$, c'est à dire associer à chaque signal s_i sa transformée de Fourier élément de l'ensemble $\widehat{s}_a, \widehat{s}_b, \widehat{s}_c, \widehat{s}_d$.

Exercice 5. Transformée de Fourier de la gaussienne

On considère la fonction $g : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$.

1. Montrer que $g \in L^1(\mathbb{R}) = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.
2. Montrer g est solution de l'équation
$$g'(x) = -xg(x) \tag{1}$$
3. Montrer que g est C^∞. Montrer que g' ainsi que $x \mapsto xg(x)$ sont des fonctions de $L^1(\mathbb{R})$.
4. En déduire en appliquant la transformée de Fourier sur chaque membre de (1) que $\hat{g}$ vérifie elle-aussi une équation différentielle linéaire d'ordre 1 que l'on précisera.
5. En utilisant que $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \sqrt{2\pi}$ calculer $\hat{g}$ et tracer-la en fonction de ω.
6. Un instrument de musique joue une note de fréquence fondamentale ω_0. Le signal émis au temps $t_0 > 0$ par cet instrument est modélisé par la fonction $G : t \mapsto g(t - t_0)\cos(\omega_0 t)$. Quelle est la transformée de Fourier de G ? Pourquoi dit-on que la transformée de Fourier permet une représentation fréquentielle des signaux ?