Test Intégration et transformée de Fourier.
Durée 1h

Exercice 1.

Soit (E, T, m) un espace mesuré.
Soient $\alpha \in]0, 1]$ et $1 < p < +\infty$. On considère $A \in T$ tel que $m(A) < +\infty$.

On note $\mathbb{1}_A$ la fonction indicatrice de A telle que pour tout $x \in E$ $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et 0 sinon.

1. Montrer que si f est une fonction mesurable sur E à valeurs réelles alors

$$\int |f|^\alpha \ \mathbb{1}_A dm \leq \left(\int |f|^p dm \right)^{\frac{\alpha}{p}} (m(A))^{1-\frac{\alpha}{p}}$$

2. On suppose que E est de mesure finie. Montrer que si f est une fonction mesurable sur E à valeurs réelles alors

$$\int |f|^\alpha dm \leq \left(\int |f|^p dm \right)^{\frac{\alpha}{p}} (m(E))^{1-\frac{\alpha}{p}}$$

3. En déduire que si E est de mesure finie alors $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m) \subset L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.
4. A-t-on $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m) \subset L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ si E n'est pas de mesure finie ? Justifiez votre réponse.

Exercice 2.

On note λ_2 la mesure de Lebesgue sur R^2 muni de sa tribu borélienne $Bor(\mathbb{R}^2)$.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$$

On note pour $n \in \mathbb{N}^*$ $D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 < n\pi\}$ et $I_n = \int_{D_n} f d\lambda_2 = \int \ \mathbb{1}_{D_n} f d\lambda_2$.

1. Calculer I_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. f est-elle λ_2-intégrable sur $\mathbb{R}^2$?