Séance 1 — $x'(t) = ax(t)$ et $x'(t) = ax(t) + b$.

Exercice 1 –

1. Résoudre $x'(t) = ax(t)$ en séparant les cas $a < 0$, $a = 0$, $a > 0$.
2. Un modèle démographique (modèle de Malthus) affirme que, entre deux instants t et $t + \delta t$ proches, le nombre de naissances et de morts dans la population considérée est proportionnel au temps δt écoulé et au nombre d'individus présents dans la population à l'instant t, noté x_t. Le nombre d'individus apparus entre t et $t + \delta t$ est $\alpha x_t \delta t$, tandis que le nombre d'individus qui ont disparu entre t et $t + \delta t$ est $\beta x_t \delta t$. On dit que α est le taux de natalité et β le taux de mortalité (un taux est un nombre par unité de temps et par unité de population).
   (a) Montrer que si $\alpha > \beta$, $\lim_{t\to+\infty} x_t = +\infty$ et que si $\alpha < \beta$, $\lim_{t\to+\infty} x_t = 0$.
   (b) Une population a un taux de natalité de 50 pour mille et un taux de mortalité de 20 pour mille (l'unité de temps est l'année). Si cette population est régie par le modèle de Malthus, au bout de combien d'années son effectif aura-t-il doublé ?

Exercice 2 –

On rappelle que la solution générale $x(t)$ de l'équation $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ est $x(t) = X(t) + x_p(t)$, où X est la solution générale de l'équation $X'(t) = a(t)X(t)$ et où x_p est une solution particulière de l'équation $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$.

1. Montrer que l'équation $x'(t) = ax(t) + b$ admet une solution particulière constante et en déduire la solution générale de l'équation $x'(t) = ax(t) + b$.
2. Résoudre l'équation (E_1) $x'(t) = 4x(t) - 20$.
   Tracer les courbes intégrales correspondant aux cas $x_0 < 5$, $x_0 = 5$, $x_0 > 5$.
3. Résoudre l'équation (E_2) $x'(t) = -4x(t) + 20$.
   Tracer les courbes intégrales correspondant aux cas $x_0 < 5$, $x_0 = 5$, $x_0 > 5$.
4. Un point c pour lequel la fonction constante $x(t) = c$ est une solution d'une équation différentielle est appelée point d'équilibre de cette équation.
   Un point d'équilibre c est dit stable si $\lim_{t\to+\infty} x(t) = c$ pour toute solution telle que $x(0)$ est proche de c. Si ce n'est pas le cas, le point d'équilibre est dit instable.
   Déterminer les points d'équilibre des équations (E_1) et (E_2) et préciser s'ils sont stables ou instables.
5. Approche graphique.
   (a) Définir les fonctions f_1, f_2 telles que l'équation (E_1) s'écrive $x'(t) = f_1(x(t))$ et l'équation (E_2) s'écrive $x'(t) = f_2(x(t))$. A partir de l'étude des fonctions f_1 et f_2 nous allons décrire l'évolution des solutions de (E_1) et (E_2) sans les calculer explicitement.
   Montrer que les points d'équilibre de (E_1) sont les points c tels que $f_1(c) = 0$. et que les points d'équilibre de (E_2) sont les points c tels que $f_2(c) = 0$.
   Tracer les courbes de f_1 et f_2 et représenter les points d'équilibre de (E_1) et (E_2).
   (b) Compléter les tableaux suivants (attention, ce ne sont pas des tableaux de variation) :
   Equation (E_1) :

$x(t)$	$-\infty$	c	$+\infty$
Signe de $x'(t)$			
Croissance ou décroissance de $x(t)$			

   Equation (E_2) :

$x(t)$	$-\infty$	c	$+\infty$
Signe de $x'(t)$			
Croissance ou décroissance de $x(t)$			

   (c) Résumer les questions 5a et 5b par un diagramme des phases. Interpréter ce diagramme.

Exercice 3 – On reprend le modèle de Malthus (exercice 1) mais en le compliquant de la sorte : on suppose qu'entre deux instants t et $t+\delta t$ un nombre d'individus proportionnel à δt intègre la population tandis qu'un nombre d'individus proportionnel à δt quitte la population. On note A le nombre d'individus intègrant la population en une unité de temps et B le nombre d'individus quittant la population en une unité de temps.

1. Montrer que le nombre d'individus présents dans la population au temps t, noté x_t, est régi par l'équation (E) $x'_t = rx_t + K$ tant que $x_t \geqslant 0$. Préciser les constantes r et K en fonction de α, β, A, B. On suppose par la suite que $r \neq 0$ et $K \neq 0$.
2. Etude graphique de (E).
   (a) Définir une fonction f telle que (E) s'écrive $x'_t = f(x_t)$. Déterminer les points d'équilibre de (E), et tracer la courbe de f dans les cas suivants :

	$r < 0$	$r > 0$
$K < 0$		
$K > 0$		

   Donner le diagramme des phases dans chacun de ces quatre cas et préciser la stabilité des poins d'équilibre.

   (b) Interprétation : pour quelles valeurs de r et de K la population s'éteint-elle de manière certaine ? la population explose-t-elle de manière certaine ? la population se stabilise-t-elle de manière certaine ?

   Application : quelle évolution prédisez-vous pour des populations suivant ce modèle telles que :

   $r = -0,001$ et $K = 10^5$?

   $r = 0,001$ et $K = -10^5$?

   (c) Donner l'allure des courbes intégrales correspondant aux cas $K < 0$ et $r < 0$; $K < 0$ et $r > 0$; $K > 0$ et $r < 0$; $K > 0$ et $r > 0$.

Séance 2 — $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$.

Exercice 1 – On rappelle que la solution générale $x(t)$ de l'équation $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ est $x(t) = X(t) + x_p(t)$, où X est la solution générale de l'équation $X'(t) = a(t)X(t)$ et où x_p est une solution particulière de l'équation $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$.

1. Résoudre l'équation $x'(t) + tx(t) = t$ (solution particulière évidente).
2. Résoudre l'équation $x'(t) + \frac{t}{t^2+1}x(t) = 3t$ (chercher la solution particulière sous la forme $x(t) = a(t^2 + 1)$.

Exercice 2 – On considère l'équation différentielle $x'(t) = \sin(x(t))$.

1. **Résolution théorique.**
   Savez-vous résoudre cette équation ?
2. **Etude graphique.**
   (a) Définir la fonction f telle que l'équation $x'(t) = \sin(x(t))$ s'écrive $x'(t) = f(x(t))$.
   (b) Tracer le graphe de f. En chaque point x, tracer sur l'axe des abscisses un vecteur indiquant le signe de $f(x)$: $\rightarrow$ si $f(x) > 0$ et $\leftarrow$ si $f(x) < 0$.
   En déduire, en fonction de $x(0)$, le comportement de la solution $x(t)$ pour $t > 0$.
   (c) Déterminer l'ensemble des points d'équilibre de l'équation $x'(t) = \sin(x(t))$. S'agit-il de points d'équilibre stables ou instables ?

Séance 3 — Equation logistique

Exercice 1 – Equation logistique (modèle de Verhulst-Pearl) : résolution théorique.

On considère l'équation différentielle (appelée équation logistique)

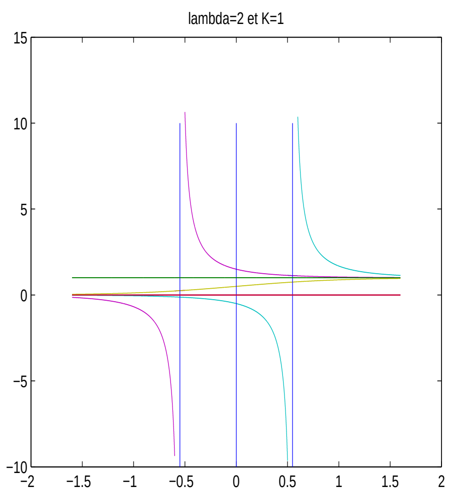
$$x'(t) = \lambda x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)$$

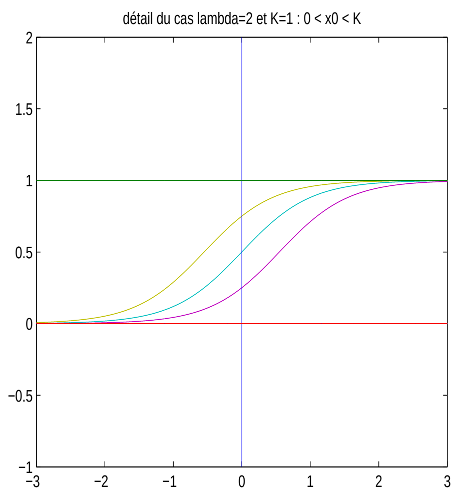
où λ et K sont des réels non nuls. En général, λ et K sont positifs.

1. Trouver les solutions constantes de cette équation.
2. Montrer que si $x(0) \neq 0$ et $x(0) \neq K$, la solution de cette équation est donnée par :

$$x(t) = \frac{Kx(0)}{x(0) + (K - x(0))e^{-\lambda t}}.$$

3. Dans cette question, on suppose $\lambda > 0$ et $K > 0$.
   On pose $g(t) = x(0) + (K - x(0))e^{-\lambda t}$ (dénominateur de la solution).
   (a) Supposons que $x(0) \in]0, K[$.
   Montrer que la fonction g ne s'annule pas.
   Calculer les limites $\lim_{t\to-\infty} x(t)$ et $\lim_{t\to+\infty} x(t)$.
   Donner enfin l'allure des courbes intégrales. (pour tracer ces courbes, on pourra calculer le point d'inflexion de la solution, c'est-à-dire le point où la dérivée seconde change de signe ; la fonction étant concave lorsque la dérivée seconde est négative, et convexe lorsqu'elle est positive. Un point d'inflexion est donc un point où la fonction change de concavité.)
   (b) Supposons que $x(0) > K$.
   Montrer que la fonction g croît de $-\infty$ à x_0 en s'annulant en un point $T < 0$.
   Calculer les limites $\lim_{t\to-\infty} x(t)$, $\lim_{t\to T^-} x(t)$, $\lim_{t\to T^+} x(t)$, $\lim_{t\to+\infty} x(t)$.
   Donner l'allure des courbes intégrales.
   (c) Supposons que $x(0) < 0$.
   Montrer que la fonction g décroît de $+\infty$ à x_0 en s'annulant en un point $T > 0$.
   Calculer les limites $\lim_{t\to-\infty} x(t)$, $\lim_{t\to T^-} x(t)$, $\lim_{t\to T^+} x(t)$, $\lim_{t\to+\infty} x(t)$.
   Donner l'allure des courbes intégrales.
   (d) Représenter sur le même repère quelques courbes intégrales dans les cas $x(0) < 0$, $x(0) = 0$, $x(0) \in]0, K[$, $x(0) = K$, $x(0) > K$.





Exercice 2 – Equation logistique (modèle de Verhulst-Pearl) : résolution graphique.

On considère l'équation logistique

$$x'(t) = \lambda x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)$$

où λ et K sont des réels non nuls.

1. Définir la fonction f telle que cette équation s'écrive $x'(t) = f(x(t))$. Déterminer les points d'équilibre de l'équation.
2. Tracer le graphe de f dans les quatre cas

   $$\lambda > 0,\ K > 0\ ;\ \lambda < 0,\ K > 0\ ;\ \lambda > 0,\ K < 0\ ;\ \lambda < 0,\ K < 0.$$

   En déduire, en fonction de $x(0)$, le comportement de la solution $x(t)$ pour $t > 0$, t restant proche de 0. Précisez, parmi les points d'équilibre, les points stables et les points instables.

   Peut-on en déduire $\lim_{t\to+\infty} x(t)$ dans tous les cas (se référer à l'exercice précédent) ?
3. Pour chacun des quatre cas, représenter sur le même repère quelques courbes intégrales (se référer à l'exercice précédent).

Exercice 3 – Pêche à la morue (traité pendant le TD en binôme).

Notons $x(t)$ le nombre de morues dans les océans au temps t (l'unité est l'année). Le nombre maximal possible de morues dans les océans est noté K (capacité biotique du milieu). En l'absence de pêche, l'évolution de $x(t)$ est décrite par l'équation logistique

$$x'(t) = \lambda x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)$$

où λ est le taux de fertilité de l'espèce ($\lambda > 0$). Nous allons étudier l'influence de la pêche sur l'évolution de $x(t)$. Pour cela, notons $p(t)$ le nombre de morues pêchées au temps t.

1. Dans un premier modèle, nous supposerons que le taux de pêche reste constant au cours du temps, c'est à dire $p(t+h) - p(t) = c \times h$ pour tout t et tout $h > 0$. La constante c est appelée quota annuel (c'est le nombre de morues pêchées en une année).
   (a) Quelle est l'équation différentielle décrivant l'évolution de $x(t)$? Définir la fonction f telle que cette équation s'écrive $x'(t) = f(x(t))$.
   (b) Tracer le graphe de f dans les cas $0 < c < \frac{\lambda K}{4}$, $c = \frac{\lambda K}{4}$ et $c > \frac{\lambda K}{4}$. Dans ce dernier cas, que peut-on prévoir comme évolution pour la population de morues ?
   (c) On suppose $0 < c \leqslant \frac{\lambda K}{4}$. Quels sont les points d'équilibre de l'équation ? Préciser leur stabilité.
   (d) Donner l'allure des courbes intégrales.
   (e) Facultatif : recherche de la solution explicite dans le cas $0 < c < \frac{\lambda K}{4}$.
   En notant a_1 et a_2 les solutions de l'équation $f(x) = 0$, montrer que l'équation $x'(t) = f(x(t))$ s'écrit

   $$x'(t) = \frac{-\lambda}{K}(x(t) - a_1)(x(t) - a_2).$$

   En posant alors $y(t) = x(t) - a_1$, montrer que $y(t)$ obéit à une équation logistique dont on précisera les paramètres, et en déduire les solutions de l'équation $x'(t) = f(x(t))$.
2. Dans un second modèle, on se donne $p \in]0,1[$ et l'on suppose que le taux de morues pêchées au temps t est proportionnel au nombre de morues dans les océans, le facteur de proportionnalité étant p (p est appelé quota relatif).
   (a) Quelle est l'équation différentielle décrivant l'évolution de $x(t)$? Définir la fonction g telle que cette équation s'écrive $x'(t) = g(x(t))$.
   (b) Tracer le graphe de g dans les cas $\lambda > p$ et $\lambda \leqslant p$. Pour chacun de ces deux cas, déterminer les points d'équilibre de l'équation, préciser leur stabilité et en déduire $\lim_{t\to+\infty} x(t)$.

(c) Donner l'allure des courbes intégrales.

(d) Facultatif : recherche de la solution explicite dans le cas $\lambda > p$.
Montrer que l'équation $x'(t) = g(x(t))$ est une équation logistique dont on précisera les paramètres, et en déduire les solutions de l'équation $x'(t) = g(x(t))$.

(e) Dans le cas $\lambda > p$, on pose $x^* = \lim_{t\to+\infty} x(t)$ et $c^* = px^*$. Que représente c^* ? Comment choisir p (en fonction des paramètres λ et K) pour obtenir la plus grande valeur possible pour c^* ? Pour cette valeur de p, calculer c^* et x^* en fonction de λ et K.

Les mathématiques font le bonheur de tous !

Séance 4

Résolution graphique d'un système de deux ED.

Exercice 1 –

1. **Description de la méthode.**
   On peut décrire l'évolution d'un système d'équations différentielles sans calculer explicitement les solutions de ce système. Considérons le système :
   $$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases}.$$
   En chaque point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ le déplacement induit par le système est le vecteur $\overrightarrow{(f(x, y), g(x, y))}$.
   Le champ des tangentes est l'application qui à un point (x, y) associe le vecteur de longueur 1
   $$\frac{\overrightarrow{(f(x, y), g(x, y))}}{\sqrt{f^2(x, y) + g^2(x, y)}}.$$
   Ici, pour simplifier, nous associerons à chaque point (x, y) de $\mathbb{R}^2$
   - le vecteur $\nearrow$ si $f(x, y) > 0$ et $g(x, y) > 0$,
   - le vecteur $\searrow$ si $f(x, y) > 0$ et $g(x, y) < 0$,
   - le vecteur $\nwarrow$ si $f(x, y) < 0$ et $g(x, y) > 0$,
   - le vecteur $\swarrow$ si $f(x, y) < 0$ et $g(x, y) < 0$,
   - le vecteur $\longrightarrow$ si $f(x, y) = 0$ et $g(x, y) > 0$,
   - le vecteur $\longleftarrow$ si $f(x, y) = 0$ et $g(x, y) < 0$,
   - le vecteur $\uparrow$ si $f(x, y) > 0$ et $g(x, y) = 0$,
   - le vecteur $\downarrow$ si $f(x, y) < 0$ et $g(x, y) = 0$.
2. **Application.** On considère le système de deux équations différentielles :
   $$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{cases}$$
   (a) On pose $z(t) = x^2(t) + y^2(t)$. Montrer que $z'(t) = 0$.
   (b) Représenter le champ des tangentes.
   (c) Déterminer les points d'équilibre et discuter de leur stabilité.
   (d) Donner l'allure des courbes intégrales.

Exercice 2 – Même exercice que le précédent pour les systèmes :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = -x(t) + y(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) \\ y'(t) = -2y(t) \end{cases}$$

Exercice 3 – **Modèle à compartiments.**

On étudie la concentration d'un médicament dans le sang à l'instant t, notée $C_S(t)$, ainsi que la concentration du même médicament dans les tissus à l'instant t, notée $C_T(t)$. A chaque instant, une proportion a de la substance active dans le sang est absorbée par les tissus, tandis qu'une proportion r de cette même substance, déjà absorbée par les tissus, est relâchée dans le sang. De plus, une proportion e de la substance est éliminée du sang à chaque instant ; et pour finir l'équipe médicale injecte le médicament à un débit constant d (d peut valoir 0).

1. Ecrire le système vérifié par le couple (C_S, C_T) et le simplifier en posant $\lambda = a + e$.
2. Ecrire les conditions sur $C_S(0)$, $C_T(0)$ et d en cas de perfusion et d'injection ponctuelle.
3. Etudier graphiquement le système.