J. Math. pures et appl.,
54, 1975, p. 305 à 387.

SOMMES D'OPÉRATEURS LINÉAIRES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES OPÉRATIONNELLES

Par G. DA PRATO et P. GRISVARD (1)

PLAN

1. **Introduction**

Le but de ce travail est l'étude des sommes d'opérateurs non bornés sous des hypothèses fréquemment rencontrées dans les problèmes d'équations à dérivées partielles mis sous la forme d'équations différentielles opérationnelles. Les résultats abstraits sont systématiquement illustrés par des exemples d'équations différentielles opérationnelles du premier ordre (avec condition de Cauchy) et du second ordre (avec conditions de Dirichlet).

Deux méthodes d'étude des sommes d'opérateurs non bornés ont été développés dans Da Prato ([5], [6]) et Grisvard ([12], [15]). En gros, elles servent respectivement à résoudre des équations hyperboliques et paraboliques. On a cherché ici à unifier autant que possible ces deux méthodes, ce qui conduit à des simplifications importantes ainsi qu'à certains résultats nouveaux. Pour d'autres développements de la seconde méthode, on pourra consulter Dubinski ([8], [9]).

(1) Instituto Matematico G. Castelnuovo, Università degli studi, Roma et I. M. S. P., Parc Valrose, Nice.

Plus précisément, soit X un espace de Banach et soient A et B deux opérateurs linéaires fermés de domaines respectifs D_A et D_B dans X. On note L la somme de ces opérateurs, c'est-à-dire l'opérateur défini par $Lx = Ax+Bx$ pour $x \in D_L = D_A \cap D_B$. On donnera des conditions suffisantes pour que L admette une fermeture qu'on notera éventuellement $\overline{L}$ et on étudiera l'ensemble résolvant de $\overline{L}$. L'intérêt de $\overline{L}$ réside dans la notion de *solution forte* de l'équation

$$(1.1) \qquad Lx-\lambda x = y;$$

en effet, suivant Friedrichs, on dira que x est solution forte de (1.1) si il existe une suite x_n, $n = 1, 2, \ldots$ avec $x_n \in D_L$ et

$$\begin{cases} x_n \to x, \\ Lx_n-\lambda x_n \to y, \end{cases}$$

lorsque $n \to +\infty$; c'est-à-dire précisément si $x \in D_{\overline{L}}$ et $\overline{L}x-\lambda x = y$.

En conséquence l'équation (1.1) admet une solution forte unique pour tout $y \in X$ ssi λ est un point de l'ensemble résolvant de $\overline{L}$. Dans le cas très particulier où (1.1) admet une solution $x \in D_L$, on dit que c'est une *solution stricte* [ou classique ([2])].

Deux types d'hypothèses correspondant à deux méthodes différentes seront envisagées : suivant Kato [22] on dira que L est *hyperbolique* si $(A-\lambda)$ et $(B-\lambda)$ sont inversibles pour $\lambda > 0$ et

$$(1.2) \qquad \|(A-\lambda)^{-k}\| \leqq \frac{M}{\lambda^k}, \qquad \|(B-\lambda)^{-k}\| \leqq \frac{M}{\lambda^k}$$

pour $\lambda > 0$, $k = 1, 2, \ldots$ avec M indépendant de λ et k. Par contre, on dira que L est *parabolique* ([3]) si X est complexe et si $(A-\lambda)$ et $(B-\lambda)$ sont inversibles pour $\lambda \in \Sigma_A$ et Σ_B respectivement où Σ_A et Σ_B sont des secteurs de la forme

$$\{z;\ |\arg z| < \Pi-\varphi\},$$

avec $\varphi = \theta_A$ et θ_B respectivement et

$$(1.3) \qquad \theta_A+\theta_B < \Pi$$

et si de plus

$$\|(A-\lambda)^{-1}\| = O(|\lambda|^{-1}) \quad \text{et} \quad \|(B-\lambda)^{-1}\| = O(|\lambda|^{-1})$$

pour $\lambda \in \Sigma_A$ et Σ_B respectivement.

([2]) Le terme de solution faible est réservé à une solution variationnelle (ou définie par dualité).

([3]) Cette terminologie commode pour les équations abstraites a ceci d'abusif qu'elle recouvre dans les applications des équations à dérivées partielles tant paraboliques que elliptiques ou quasi-elliptiques, etc.

Dans le cas où X est complexe, on peut comparer les deux hypothèses en remarquant que si L est hyperbolique, alors $(A-\lambda)$ et $(B-\lambda)$ sont inversibles pour $\lambda \in \Sigma$ secteur

$$\left\{ z ; |\arg z| < \frac{\pi}{2} \right\}$$

et

$$\|(A-\lambda)^{-1}\| \leqq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda} \quad \text{et} \quad \|(B-\lambda)^{-1}\| \leqq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda};$$

par conséquent, le cas hyperbolique apparaît comme un cas limite du cas parabolique, où

$$\theta_A + \theta_B = \pi. \tag{1.4}$$

Dans le paragraphe 2, on donne des conditions suffisantes pour qu'un opérateur non borné L admette une fermeture : en gros, il suffit d'une « inégalité *a priori* » de la forme

$$\|x\| \leqq \frac{N}{\lambda} \|Lx - \lambda x\|$$

pour $x \in D_L$ et pour λ assez grand et de la densité de l'image de $L-\lambda$ dans X pour une valeur de λ au moins. Les résultats inédits par rapport à Da Prato [5] concernent le cas où D_L n'est pas supposé dense dans X.

Dans le paragraphe 3, on vérifie les conditions suffisantes du paragraphe 2 lorsque les résolvantes de A et B commutent. Dans le cas hyperbolique, on obtient l'inégalité *a priori* en approchant L à l'aide des opérateurs L_n définis par $L_n x = Ax + B_n x$ pour $x \in D_{L_n} = D_A$ où les B_n sont les opérateurs approchants de Yosida suivant Da Prato [6]. Dans le cas parabolique, on construit directement l'inverse de $(\bar{L}-\lambda)$ à l'aide d'intégrales de Dunford suivant Grisvard [12].

Le paragraphe 4 est l'illustration des résultats obtenus au paragraphe 3 lorsque l'un des opérateurs A ou B est la dérivation dans un espace de fonctions d'une variable réelle à valeurs dans un espace de Banach E. On résoud ainsi l'équation différentielle

$$-u'(t) + \Lambda u(t) = f(t), \tag{1.5}$$

avec la condition de Cauchy $u(0) = 0$, où Λ est un opérateur fermé dans E et u et f sont des fonctions à valeurs dans E. En variant le choix de X, on obtient des solutions dans les espaces de Sobolev ou de Hölder. L'équation (1.5) est hyperbolique en particulier lorsque Λ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu et borné, tandis qu'elle est parabolique en particulier lorsque Λ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique fortement continu. Il faut de plus signaler que lorsque l'équation est parabolique, on obtient le meilleur résultat possible de régularité, c'est-à-dire que la solution u est une fois plus dérivable que le second membre f dans les espaces de Hölder ou de Sobolev (d'exposant non entier) à valeurs dans E et aussi dans l'espace des fonctions de carré intégrable à valeurs dans E lorsque cet espace est hilbertien. Ces résultats peuvent servir de point de départ pour l'étude de certaines équations d'évolution non linéaires par linéarisation; ce type d'application sera développé dans un article ultérieur.

Le paragraphe 5 reprend l'étude faite au paragraphe 3 de l'équation hyperbolique, cette fois sans supposer que les résolvantes de A et B commutent. De même, le paragraphe 6 reprend l'étude de l'équation parabolique sans hypothèse de commutativité.

L'illustration de ces résultats non commutatifs dans le cas où l'un des opérateurs A et B est la dérivation comme au paragraphe 4 est faite dans le paragraphe 7. On résoud cette fois l'équation différentielle

$$-u'(t)+\Lambda(t)u(t)=f(t), \tag{1.6}$$

avec la condition $u(0)=0$, où pour chaque t, $\Lambda(t)$ est un opérateur fermé dans E. Si on suppose cette équation hyperbolique on retrouve des résultats analogues à ceux de Kato [22]; si par contre, on la suppose parabolique les résultats sont semblables à ceux de Kato-Tanabe [23] d'une part et de Tanabe ([33], [34]) d'autre part, simplement en échangeant les rôles de A et de B dans l'application des résultats du paragraphe 6. En outre, on prouve l'analogue dans les espaces de Sobolev des résultats de ces auteurs (qui sont relatifs aux espaces de Holder). Cependant, à la différence de ces auteurs, on n'établit pas l'existence de l'opérateur d'évolution du problème dans le cas hyperbolique, bien que cela soit possible avec les méthodes utilisées ici, comme l'a montré Iannelli [19].

Le paragraphe 8 est consacré à l'exposé d'une seconde série d'exemples afin de justifier la construction d'une théorie abstraite. On suppose cette fois que A ou B est la dérivation d'ordre 2 dans un espace de fonctions définies dans l'intervalle réel [0, 1], à valeurs dans un espace de Banach E. On résoud ainsi l'équation différentielle

$$u''(t)+\Lambda(t)u(t)-\lambda u(t)=f(t), \tag{1.7}$$

avec les conditions de Dirichlet $u(0)=u(1)=0$, où pour chaque t, $\Lambda(t)$ est un opérateur fermé dans E. Il faut essentiellement supposer que $\Lambda(t)-\lambda$ est inversible pour tout $\lambda>0$ et que $\|(\Lambda(t)-\lambda)^{-1}\|\leqq N/\lambda$ pour tout t et $\lambda>0$ où N ne dépend pas de t. Il faut remarquer que ceci n'implique pas que $\Lambda(t)$ soit un générateur infinitésimal. De plus lorsque $\Lambda(t)$ dépend effectivement de t, on doit supposer cette dépendance régulière comme dans l'étude de (1.6).

Dans les paragraphes 7 et 8 comme au paragraphe 4, on obtient les meilleurs résultats de régularités possibles améliorant ainsi ceux de Kato-Tanabe [23], Tanabe ([33], [34]) et Krein [25] (en ce qui concerne les équations d'ordre [2]).

Le court paragraphe 9 est consacré à l'étude par les mêmes méthodes, d'une équation des ondes abstraites.

La bibliographie du calcul fonctionnel et des équations différentielles abstraites est immense, c'est pourquoi on ne cite que les références indispensables.

Ce travail se termine par un appendice où pour la commodité du lecteur on a regroupé le minimum de la théorie de l'interpolation nécessaire à l'étude des équations paraboliques.

2. Théorèmes de fermeture

2.1. Dans ce paragraphe on utilisera les notations suivantes : X est un espace de Banach complexe de norme $x \to \| x \|$; $\mathscr{L}(X)$ est l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires continus dans X munie de sa norme habituelle. Si $L : D_L \to X$ est une application linéaire de domaine $D_L \subset X$; on note ρ_L (resp. σ_L) l'ensemble résolvant (resp. le spectre) de L et si $\lambda \in \rho_L$ on note $(L-\lambda)^{-1}$ la résolvante de L. Enfin, si L admet une fermeture, on note $\overline{L}$ sa fermeture. Le résultat essentiel est le

THÉORÈME 2.1. — *Soit* L *une application linéaire de domaine* D_L *dense dans* X *et telle que :*

(i) *Il existe* $N \geqq 1$ *et* $\omega_0 \geqq 0$ *tels que*

$$\| x \| \leqq \frac{N}{\lambda} \| L x - \lambda x \|, \qquad \forall \lambda > \omega_0, \quad x \in D_L ; \tag{2.1}$$

(ii) *Il existe* $\omega_1 > \omega_0$ *tel que* $(L-\omega_1)(D_L)$ *soit dense dans* X; *alors* L *admet une fermeture* $\overline{L}$ *avec* $\rho_{\overline{L}} \supset]\omega_0, +\infty[$ *et*

$$\| (\overline{L}-\lambda)^{-1} \| \leqq \frac{N}{\lambda}, \qquad \forall \lambda > \omega_0, \tag{2.2}$$

$$(L-\lambda)(D_L) \quad \textit{est dense dans } X, \qquad \forall \lambda > \omega_0. \tag{2.3}$$

Démonstration. — L'hypothèse (i) à elle seule implique l'existence de $\overline{L}$ suivant une idée de Kurtz [26] : soit $x_n \in D_L$, $n = 1, 2, \ldots$ une suite telle que $x_n \to 0$ et $L x_n \to y$; on doit vérifier que $y = 0$: pour cela, soit $z \in D_L$, d'après (2.1) on a

$$\left\| x_n + \frac{z}{\lambda} \right\| \leqq \frac{N}{\lambda} \left\| L x_n + \frac{1}{\lambda} L z - \lambda x_n - z \right\|, \qquad n = 1, 2, \ldots, \quad \lambda > \omega_0,$$

d'où à la limite lorsque $n \to +\infty$:

$$\left\| \frac{z}{\lambda} \right\| \leqq \frac{N}{\lambda} \left\| y + \frac{1}{\lambda} L z - z \right\|, \qquad \lambda > \omega_0,$$

puis lorsque $\lambda \to +\infty$:

$$\| z \| \leqq N \| y - z \|.$$

Cette dernière inégalité étant vérifiée pour tout $z \in D_L$ qui est dense dans X, on a nécessairement $y = 0$ (en considérant une suite $z_n \in D_L$, $n = 1, 2, \ldots$ telle que $z_n \to y$). Ceci prouve l'existence de $\overline{L}$.

Utilisant (ii), on va maintenant prouver que $\omega_1 \in \rho_{\overline{L}}$, c'est-à-dire que pour tout $y \in X$, il existe un unique $x \in D_{\overline{L}}$ tel que $\overline{L} x - \omega_1 x = y$: grâce à (ii), on sait qu'il existe une suite $x_n \in D_L$, $n = 1, 2, \ldots$ telle que

$$y_n = L x_n - \omega_1 x_n \to y.$$

L'inégalité (2.1) appliquée au vecteur $x_n - x_m$ donne

$$\| x_n - x_m \| \leqq \frac{N}{\omega_1} \| y_n - y_m \|$$

et par conséquent la suite x_n, $n = 1, 2, \ldots$ est de Cauchy et il existe $x \in X$ tel que $x_n \to x$ et

$$L x_n \to y + \omega_1 x;$$

par définition de $\overline{L}$ ceci signifie que $x \in D_{\overline{L}}$ et $\overline{L} x = y + \omega_1 x$. Il reste encore à prouver l'unicité de la solution; elle résulte de l'inégalité

$$\| x \| \leqq \frac{N}{\lambda} \| \overline{L} x - \lambda x \|, \qquad \forall \lambda > \omega_0, \quad x \in D_{\overline{L}}, \tag{2.4}$$

elle-même conséquence évidente de (2.1) et de l'existence de $\overline{L}$. On a ainsi prouvé que $\omega_1 \in \rho_{\overline{L}}$ et que

$$\| (\overline{L} - \omega_1)^{-1} \| \leqq \frac{N}{\omega_1}$$

grâce à (2.4).

Il faut à présent prouver que $\rho_{\overline{L}} \supset \,] \, \omega_0; +\infty[$. D'après un lemme de Dunford-Schwartz [10], on sait que la distance de ω_1 à $\sigma_{\overline{L}}$ est $> \omega_1/N$ donc $\rho_{\overline{L}} \supset \,] \, \omega_1 (1-(1/N); \omega_1 (1+(1/N)[$; mais par ailleurs l'inégalité (2.4) implique toujours

$$\| (\overline{L} - \lambda)^{-1} \| \leqq \frac{N}{\lambda}$$

pour tout $\lambda \in \,] \, \omega_1 (1-(1/N); \omega_1 (1+(1/N) \, [$.

L'utilisation itérée du lemme cité montre que

$$\rho_{\overline{L}} \supset \left] \sup\left(\omega_0; \omega_1 \left\{ 1 - \frac{1}{N} \right\}^n \right); \omega_1 \left\{ 1 + \frac{1}{N} \right\}^n \right[$$

pour tout $n = 1, 2, \ldots$ et par conséquent $\rho_{\overline{L}} \supset \,]\omega_0, +\infty[$ et (2.4) implique (2.2).

Il reste à vérifier (2.3) : soit $x' \in X'$ (le dual de X) et $\lambda > \omega_0$ tels que

$$\langle L x - \lambda x; x' \rangle = 0, \qquad \forall x \in D_L,$$

on va vérifier que $x' = 0$ ce qui d'après le théorème de Hahn-Banach impliquera le résultat : en effet l'existence de $\overline{L}$ implique que

$$\langle \overline{L} x - \lambda x; x' \rangle = 0, \qquad \forall x \in D_{\overline{L}},$$

car D_L est dense dans $D_{\overline{L}}$ pour la norme du graphe de $\overline{L}$. Comme on sait déjà que $\lambda \in \rho_{\overline{L}}$, ceci prouve que x' est orthogonal à X donc nul.

Remarque 2.2. — Ce résultat est une variante du résultat de fermabilité de Lumer-Phillips [32] qui est relatif au cas $N = 1$.

Remarque 2.3. — Dans le cas particulier où $\omega_0 = 0$, on a donc $\rho_{\overline{L}} \supset \mathbf{R}_+$; c'est aussi le cas lorsque $N = 1$ car on peut alors remplacer ω_0 par zéro dans (2.1) : en effet, si $x \in D_L$, $\lambda > 0$ et

$$L x - \lambda x = y,$$

on a aussi

$$L x - (\lambda + \omega_0) x = y - \omega_0 x,$$

d'où grâce à (2.1) :

$$\|x\| \leqq \frac{1}{\lambda+\omega_0} \|y - \omega_0 x\| \leqq \frac{1}{\lambda+\omega_0} \|y\| + \frac{\omega_0}{\lambda+\omega_0} \|x\|,$$

soit

$$\left(1 - \frac{\omega_0}{\lambda+\omega_0}\right) \|x\| \leqq \frac{1}{\lambda+\omega_0} \|y\|,$$

d'où finalement

$$\|x\| \leqq \frac{1}{\lambda} \|y\|,$$

ce qui prouve (2.1) avec ω_0 remplacé par zéro.

COROLLAIRE 2.4. — *Soit* L_n, $n = 1, 2, \ldots$ *une suite d'opérateurs linéaires de domaines respectifs* D_{L_n} *dans* X; *on définit* L (la « limite ») *en posant*

$$\text{(2.5)} \qquad \begin{cases} D_L = \{ x \in \bigcap_{n \geqq 1} D_{L_n} ; \textit{ la suite } L_n x,\ n = 1, 2, \ldots \textit{ converge dans } X \}, \\ L x = \lim_{n \to +\infty} L_n x \qquad \textit{pour} \quad x \in D_L. \end{cases}$$

On suppose en outre que :

(i) D_L *est dense dans* X;

(ii) *Il existe* $N \geqq 1$ *et* $\omega_0 \geqq 0$ *tels que* $\rho_{L_n} \supset]\omega_0, +\infty[$ *et*

$$\text{(2.6)} \qquad \|(L_n - \lambda)^{-1}\| \leqq \frac{N}{\lambda}, \qquad \forall \lambda > \omega_0, \quad n = 1, 2, \ldots;$$

(iii) *Il existe* $\omega_1 > \omega_0$ *tel que* $(L - \omega_1)(D_L)$ *est dense dans* X : *alors* L *admet une fermeture* $\overline{L}$ *avec* $\rho_{\overline{L}} \supset]\omega_0, +\infty[$ *et*

$$\text{(2.7)} \qquad \lim_{n \to +\infty} (L_n - \lambda)^{-1} = (\overline{L} - \lambda)^{-1}, \qquad \forall \lambda > \omega_0 \textit{ fortement dans } \mathscr{L}(X).$$

Démonstration. — On aura toutes les conclusions du théorème 2.1 après vérification de (2.1). Pour $x \in D_L$ on a $x \in D_{L_n}$ et d'après (2.6) :

$$\|x\| \leqq \frac{N}{\lambda}\|L_n x - \lambda x\|, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

d'où (2.1) lorsque $n \to +\infty$.

Il reste à prouver (2.7), c'est-à-dire que

$$(2.8) \qquad (L_n - \lambda)^{-1} y \to (\bar{L} - \lambda)^{-1} y$$

pour tout $y \in X$ (λ est fixé $> \omega_0$). Comme les opérateurs $(L_n - \lambda)^{-1}$ sont uniformément bornés d'après (2.6), il suffit même de vérifier (2.8) pour $y \in (L - \lambda)(D_L)$ qui est dense dans X; en somme, on doit vérifier que

$$(L_n - \lambda)^{-1}(L - \lambda) x \to x$$

pour tout $x \in D_L$, c'est évident d'après la définition de D_L car on a

$$(L_n - \lambda)^{-1}(L - \lambda) x - x = (L_n - \lambda)^{-1}(L x - L_n x),$$

d'où

$$\|(L_n - \lambda)^{-1}(L - \lambda) x - x\| \leqq \frac{N}{\lambda}\|L x - L_n x\| \to 0,$$

lorsque $n \to +\infty$.

C. Q. F. D.

Dans la suite, on aura à utiliser le théorème 2.1 dans le cas où L est de la forme suivante :

$$(2.9) \qquad \begin{cases} D_L = D_A \cap D_B, \\ L x = A x + B x \quad \text{pour} \quad x \in D_L, \end{cases}$$

où A et B sont deux opérateurs linéaires de domaines respectifs D_A et D_B dans X. Voici un résultat simple de densité de D_L :

PROPOSITION 2.5. — *On suppose que* A *et* B *sont fermés et à domaines denses dans* X *et que :*

(i) *Il existe deux nombres* N *et* ω *tels que* $\rho_A \cap \rho_B \supset]\omega, +\infty[$ *et que*

$$\|(A - \lambda)^{-1}\| \leqq \frac{N}{\lambda}, \qquad \|(B - \lambda)^{-1}\| \leqq \frac{N}{\lambda}, \qquad \forall \lambda > \omega;$$

(ii) D_A *est stable par* $(B - \lambda)^{-1}$ *pour tout* $\lambda > \omega$.

Alors $D_A \cap D_B$ *est dense dans* X.

Démonstration. — On approche un $x \in X$ quelconque à l'aide de la suite $Q_\lambda x$, $\lambda > \omega$ où

$$Q_\lambda = \lambda^2 (B - \lambda)^{-1}(A - \lambda)^{-1}, \qquad \lambda > \omega;$$

il est clair que $Q_\lambda x \in D_B$ puisque $Q_\lambda x$ est dans l'image de $(B - \lambda)^{-1}$; on a de même $Q_\lambda x \in D_A$ grâce à (ii). Enfin x est limite de $Q_\lambda x$ car grâce à (i) les opérateurs $\lambda (A - \lambda)^{-1}$ et $\lambda (B - \lambda)^{-1}$ convergent fortement vers -1 lorsque $\lambda \to +\infty$.

C. Q. F. D.

2.2. Dans ce qui suit, on va reprendre l'étude précédente dans le cas où D_L n'est plus nécessairement dense dans X. Pour cela, il est utile de rappeler quelques notions : on appelle *graphe* dans X toute partie de $X \times X$ et on identifie tout opérateur linéaire de domaine D_L dans X à son graphe G_L défini comme suit :

$$G_L = \{(x;\, y);\, x \in D_L,\, y = Lx\}.$$

Si L admet une fermeture $\bar{L}$, on vérifie aisément que $G_{\bar{L}} = \bar{G}_L$; par abus de notation, on notera encore $\bar{L}$ le graphe $\bar{G}_L$, lorsque L n'admet pas de fermeture au sens de la théorie des opérateurs. Si G est une graphe dans X, on pose

$$G^{-1} = \{(x;\, y);\, (y;\, x) \in G\},$$
$$G - \lambda = \{(x;\, y - \lambda x);\, (x;\, y) \in G\}.$$

Ces notations permettent d'introduire la notion de *valeur régulière* : λ est régulier pour G si $(G-\lambda)^{-1}$ est le graphe d'un opérateur linéaire continu partout défini dans X, c'est-à-dire si $(G-\lambda)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$ par abus de notation. *L'ensemble résolvant* ρ_G de G est l'ensemble des valeurs régulières pour G et son complémentaire σ_G est le *spectre* de G. Comme pour les opérateurs, on a l'identité de la résolvante

$$(G-\lambda)^{-1} - (G-\mu)^{-1} = (\lambda - \mu)(G-\lambda)^{-1}(G-\mu)^{-1}$$

pour λ et μ dans ρ_G et par conséquent $\lambda \to (G-\lambda)^{-1}$ est une fonction analytique définie dans ρ_G qui est ouvert, et à valeurs dans $\mathscr{L}(X)$.

Le lemme suivant est évident :

LEMME 2.6. — *Soit* G *un graphe d'ensemble résolvant* ρ_G *non vide; alors* G *est le graphe d'une application ssi* $(G-\lambda)^{-1}$ *est injectif pour une valeur* $\lambda \in \rho_G$ ([4]).

L'analogue du théorème 2.1 dans le cas où D_L n'est pas dense dans X est le

THÉORÈME 2.7. — *Soit* L *une application linéaire de domaine* D_L *dans* X *et telle que :*

(i) *Il existe* $N \geqq 1$ *et* $\omega_0 \geqq 0$ *tels que* (2.1) *ait lieu;*

(ii) *Il existe* $\omega_1 > \omega_0$ *tel que* $(L - \omega_1)(D_L)$ *soit dense dans* X.

Alors $\rho_{\bar{L}} \supset]\omega_0, +\infty[$ *et* (2.2) *et* (2.3) *sont vérifiés.*

Bien entendu, en général $\bar{L}$ est un graphe, cependant $(\bar{L}-\lambda)^{-1}$ est un opérateur pour $\lambda > \omega_0$.

Démonstration. — $\bar{L}$ existe toujours en tant que graphe. On montre d'abord que $\omega_1 \in \rho_{\bar{L}}$. Soit $y \in X$, d'après (ii) il existe une suite x_n, $n = 1, 2, \ldots$ avec $x_n \in D_L$ et

$$y_n = Lx_n - \omega_1 x_n \to y,$$

([4]) On dit d'un graphe G qu'il est injectif si $(x, y) \in G$ et $(x', y) \in G$ impliquent $x = x'$.

lorsque $n \to +\infty$. D'après (2.1) on a

$$\| x_n - x_m \| \leqq \frac{N}{\omega_1} \| y_n - y_m \|$$

et par conséquent la suite x_n, $n = 1, 2, \ldots$ est de Cauchy et il existe $x \in X$ tel que $x_n \to x$ et

$$L x_n \to y + \omega_1 x.$$

On a évidemment $(x_n; L x_n) \in G_L$ d'où $(x; y + \omega_1 x) \in \bar{L}$ soit $(x; y) \in \bar{L} - \omega_1$. Ceci prouve que pour tout $y \in X$ il existe $x \in X$ tel que $(x; y) \in \bar{L} - \omega_1$; il reste encore à prouver l'unicité de x.

D'après (2.1) on a

$$\| x \| \leqq \frac{N}{\omega_1} \| y - \omega_1 x \|, \qquad \forall (x; y) \in G_L,$$

d'où la même inégalité par passage à la limite $\forall (x; y) \in \bar{L}$ c'est-à-dire

$$\| x \| \leqq \frac{N}{\omega_1} \| y \|, \qquad \forall (x; y) \in \bar{L} - \omega_1.$$

Ceci prouve que $(\bar{L} - \omega_1)^{-1}$ est le graphe d'un élément de $\mathscr{L}(X)$, partant que $\omega_1 \in \rho_{\bar{L}}$ et de plus

$$\| (\bar{L} - \omega_1)^{-1} \| \leqq \frac{N}{\omega_1}.$$

La fin de la démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème 2.1 grâce à l'identité de la résolvante pour les graphes.

COROLLAIRE 2.8. — *Soit* L_n, $n = 1, 2, \ldots$ *une suite d'opérateurs linéaires de domaines respectifs* D_{L_n} *dans* X : *on définit* L *par* (2.5). *On suppose en outre que :*

(i) *Il existe* $N \geqq 1$ *et* $\omega_0 \geqq 0$ *tels que* $\rho_{L_n} \supset]\omega_0, +\infty[$ *avec* (2.6);

(ii) *Il existe* $\omega_1 > \omega_0$ *tel que* $(L - \omega_1)(D_L)$ *est dense dans* X : *alors* $\rho_{\bar{L}} \supset]\omega_0, +\infty[$ *et* (2.7) *a lieu.*

La démonstration paraphrase celle du corollaire 2.4.

2.3. Pour terminer, on revient à la situation particulière où L est de la forme (2.9) mais sans plus supposer que D_A et D_B sont denses dans X par contre on supposera que A et B commutent dans le sens que

$$[(A - \lambda)^{-1}; (B - \mu)^{-1}] = 0, \qquad \forall \lambda \in \rho_A \quad \text{et} \quad \mu \in \rho_B \quad (^5) \tag{2.10}$$

([5]) On suppose bien sûr que les ensembles ρ_A et ρ_B sont non vides.

et on suppose de plus que $\rho_A \cap \rho_B \supset]0, +\infty[$ et qu'il existe M_A et $M_B > 0$ tels que

$$(2.11) \qquad \|(A-\lambda)^{-1}\| \leqq \frac{M_A}{\lambda}, \qquad \|(B-\lambda)^{-1}\| \leqq \frac{M_B}{\lambda}, \qquad \forall \lambda > 0.$$

Dans cette situation, on a l'analogue du théorème 2.1 sans supposer que D_L est dense.

THÉORÈME 2.9. — *On suppose que* (2.10) *et* (2.11) *ont lieu et que :*

(i) *Il existe* $N \geqq 1$ *tel que*

$$\|x\| \leqq \frac{N}{\lambda} \|Lx - \lambda x\|, \qquad \forall \lambda > 0, \quad x \in D_L;$$

(ii) *Il existe* $\omega_1 > 0$ *tel que* $(L-\omega_1)(D_L)$ *est dense dans* X.

Alors L *admet une fermeture* $\overline{L}$ *avec* $\rho_{\overline{L}} \supset]0, +\infty[$ *et*

$$\|(\overline{L}-\lambda)^{-1}\| \leqq \frac{N}{\lambda}, \qquad \forall \lambda > 0.$$

La démonstration utilisera deux lemmes où C désignera un opérateur linéaire fermé dans X tel que $\rho_C \supset]0, +\infty[$ et il existe $N > 0$ tel que

$$(2.12) \qquad \|(C-\lambda)^{-1}\| \leqq \frac{N}{\lambda}, \qquad \forall \lambda > 0.$$

LEMME 2.10 — *On a :*

(i) $\overline{D}_C = \{ x \in X;\ x = -\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda (C-\lambda)^{-1} x \}$;

(ii) D_C *est dense dans* X *ssi* $\forall\, x \in X$ *on a*

$$x = -\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda (C-\lambda)^{-1} x.$$

Démonstration. — Le point (ii) est évidemment conséquence du point (i) que seul on démontrera : soit

$$Z = \{ x \in X;\ x = -\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda (C-\lambda)^{-1} x \}.$$

L'espace Z est fermé car grâce à (2.12) les opérateurs $\lambda (C-\lambda)^{-1}$ forment une famille équicontinue pour $\lambda > 0$; par ailleurs, on a $Z \subset \overline{D}_C$ car si $x \in Z$, x est limite des éléments $-\lambda (C-\lambda)^{-1} x \in D_C$. Enfin, on a $D_C \subset Z$ [d'où $\overline{D}_C \subset Z$ ce qui démontre (i)] car pour $x \in D_C$, on a

$$x + \lambda (C-\lambda)^{-1} x = (C-\lambda)^{-1} C x,$$

d'où grâce à (2.12) :

$$\|x + \lambda (C-\lambda)^{-1} x\| \leqq \frac{N}{\lambda} \|Cx\| \to 0,$$

lorsque $\lambda \to +\infty$.

C. Q. F. D.

Soit à présent Y un sous-espace vectoriel fermé de X; on dit que Y est *stable* par rapport à C s'il est invariant par la résolvante de C, c'est-à-dire si

$$(C-\lambda)^{-1}(Y) \subset Y, \qquad \forall \lambda > 0.$$

Dans ce cas, on notera $C_{|Y}$ la restriction de C à Y c'est-à-dire l'opérateur linéaire dans Y défini par

$$D_{C_{|Y}} = \{ y \in D_C \cap Y ;\ C y \in Y \},$$
$$C_{|Y}\, y = C y, \qquad \forall y \in D_{C_{|Y}}.$$

Il est facile de vérifier que $\rho_{C_{|Y}} \supset]0, +\infty[$ et que

$$(C_{|Y}-\lambda)^{-1} = (C-\lambda)^{-1}{}_{|Y}, \qquad \forall \lambda > 0.$$

Un exemple d'espace stable par rapport à C est $\overline{D}_C$. Ceci posé, on a le :

LEMME 2.11. — (i) *Le domaine de* $C_{|\overline{D}_C}$ *est dense dans* $\overline{D}_C$;

(ii) *Si* D_C *est dense dans* X *alors pour tout sous-espace* Y *stable par rapport à* C, *le domaine de* $C_{|Y}$ *est dense dans* Y.

Démonstration. — Le point (i) est une conséquence presque immédiate du lemme 2.10 car pour $y \in \overline{D}_C$ on a

$$y = \lim_{\lambda \to +\infty} -\lambda (C-\lambda)^{-1} y = \lim_{\lambda \to +\infty} -\lambda (C_{|\overline{D}_C}-\lambda)^{-1} y.$$

Un raisonnement analogue prouve le point (ii) car pour $y \in Y$, on a

$$y = \lim_{\lambda \to +\infty} -\lambda (C-\lambda)^{-1} y = \lim_{\lambda \to +\infty} -\lambda (C_{|Y}-\lambda)^{-1} y.$$

Démonstration du théorème 2.9. — Les hypothèses du théorème 2.7 sont vérifiées, il suffit donc de voir que $\overline{L}$ est le graphe d'une application linéaire c'est-à-dire en appliquant le lemme 2.6, de vérifier que $(\overline{L}-\lambda)^{-1}$ est injectif pour un $\lambda > 0$. Pour cela, on va utiliser les restrictions au sous-espace

$$Y = \overline{D}_A \cap \overline{D}_B,$$

qui est stable par rapport à A et à B grâce à (2.10); on pose donc

$$A_1 = A_{|Y}, \qquad B_1 = B_{|Y}$$

et on définit L_1 par

$$\begin{cases} D_{L_1} = D_{A_1} \cap D_{B_1}, \\ L_1 x = A_1 x + B_1 x \quad \text{pour} \quad x \in D_{L_1}. \end{cases}$$

D'après le lemme 2.11 point (i) le domaine de $A_{|\overline{D}_A}$ est dense dans $\overline{D}_A$ et par conséquent appliquant le point (ii) (avec X remplacé par $\overline{D}_A$) on voit que D_{A_1} est dense dans Y; de même D_{B_1} est dense dans Y. On va vérifier à présent que le théorème 2.1 est applicable à L_1 :

La densité de D_{L_1} dans Y résulte de la proposition 2.5.

L'inégalité (2.1) résulte banalement de l'hypothèse (i) du théorème 2.9 par restriction.

Enfin, pour voir la densité de $(L_1-\omega_1)(D_{L_1})$ dans Y on introduit l'ensemble

$$W = \bigcup_{\substack{\lambda>0\\ \mu>0}} (A-\lambda)^{-1}(B-\mu)^{-1}(X).$$

Grâce à (2.10) on a $W \subset D_A \cap D_B \subset Y$ et du lemme 2.10 résulte la densité de W dans Y. Pour prouver la densité de $(L_1-\omega_1)(D_{L_1})$ dans Y, il suffit de prouver l'inclusion

$$W \subset \overline{(L_1-\omega_1)(D_{L_1})}.$$

Soit donc $y \in W$ c'est-à-dire $y = (A-\alpha)^{-1}(B-\beta)^{-1}x$ avec $x \in X$; de l'hypothèse (ii) du théorème 2.9 résulte l'existence d'une suite z_n, $n = 1, 2, \ldots$ avec $z_n \in D_L$ et

$$x_n = (L-\omega_1)z_n \to x,$$

d'où

$$(A-\alpha)^{-1}(B-\beta)^{-1}x_n = (L-\omega_1)(A-\alpha)^{-1}(B-\beta)^{-1}z_n \to y,$$

du fait que

$$y_n = (A-\alpha)^{-1}(B-\beta)^{-1}z_n \in D_A \cap D_B \subset Y$$

et que $A\,y_n$ et $B\,y_n \in Y$, on a

$$y_n \in D_{L_1}$$

et

$$(L_1-\omega_1)y_n = (L-\omega_1)y_n \to y,$$

ce qui prouve que $y \in \overline{(L_1-\omega_1)(D_{L_1})}$ d'où la densité annoncée de $(L_1-\omega_1)(D_{L_1})$ dans Y.

Le théorème 2.1 implique que L_1 admet une fermeture $\overline{L}_1$ et que $\|(\overline{L}_1-\omega_1)^{-1}\| \leqq N/\omega_1$; il est de plus évident que

$$(\overline{L}_1-\omega_1)^{-1} = (\overline{L}-\omega_1)^{-1}{}_{|Y},$$

où $\overline{L}$ est pris au sens des graphes.

On est à présent en mesure de vérifier simplement l'injectivité de $(\overline{L}-\omega_1)^{-1}$: soit $x \in X$ tel que

$$(\overline{L}-\omega_1)^{-1}x = 0,$$

on a alors :

$$(A-\alpha)^{-1}(B-\beta)^{-1}x = y \in D_A \cap D_B \subset Y,$$

d'où

$$(\overline{L}_1-\omega_1)^{-1}y=(\overline{L}-\omega_1)^{-1}y=0$$

et $y=0$ vu l'injectivité de $(\overline{L}_1-\omega_1)^{-1}$; il s'ensuit que $x=0$.

3. Sommes commutatives

3.1. Dans tout ce paragraphe, on considèrera un opératvur L de la forme

$$\text{(3.1)}\qquad \begin{cases} D_L = D_A \cap D_B, \\ Lx = Ax+Bx \quad \text{pour} \quad x \in D_L, \end{cases}$$

où A et B sont deux opérateurs fermés de domaines respectifs D_A et D_B dans X et d'ensembles résolvants non vides.

On supposera que A et B *commutent* dans le sens que

$$\text{(3.2)}\qquad [(A-\lambda)^{-1}; (B-\mu)^{-1}]=0, \qquad \forall \lambda \in \rho_A \quad \text{et} \quad \mu \in \rho_B.$$

On étudiera l'équation

$$\text{(3.3)}\qquad \begin{cases} x \in D_L, \\ Lx-\lambda x = y, \end{cases}$$

avec $\lambda > 0$ successivement sous deux types d'hypothèses qui distinguent ce qu'on pourrait appeler le cas hyperbolique et le cas parabolique suivant Kato [21].

L'hypothèse du cas *hyperbolique* est la suivante : $\rho_A \cap \rho_B \supset]0, +\infty[$ et il existe $M_A \geqq 1$ et $M_B \geqq 1$ tels que

$$\text{(3.4)}\qquad \|(A-\lambda)^{-k}\| \leqq \frac{M_A}{\lambda^k}, \qquad \|(B-\lambda)^{-k}\| \leqq \frac{M_B}{\lambda_k}, \qquad \forall \lambda > 0$$

et pour $k=1, 2, \ldots$.

De plus, on suppose que D_B est dense dans X, donc d'après le théorème de Hille-Yosida (*cf. Dunford-Schwartz* [10], p. 624), B est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu d'opérateurs dans X et comme dans la démonstration du théorème de Hille-Yosida on utilisera les opérateurs approchants de Yosida :

$$B_n = -n^2(B-n)^{-1}-n = -nB(B-n)^{-1}$$

qui sont tels que pour tout $x \in D_B$ on a

$$B_n x \to Bx \quad \text{lorsque} \quad n \to +\infty;$$

ceci résulte d'ailleurs du lemme 2.10. On approchera L à l'aide des opérateurs L_n définis comme suit :

$$\text{(3.5)}\qquad \begin{cases} D_{L_n} = D_A, \\ L_n x = Ax+B_n x, \end{cases} \qquad n=1, 2, \ldots.$$

Le but qu'on se propose est d'appliquer à L le théorème 2.9 dont on vérifiera les hypothèses (*i*) et (*ii*) à l'aide de deux lemmes :

LEMME 3.1. — *Pour tout n on a* $\rho_{L_n} \supset]0, +\infty[$ *et*

$$(L_n-\lambda)^{-1} = (A-\lambda-n)^{-1}(1-n^2(B-n)^{-1}(A-\lambda-n)^{-1})^{-1}, \tag{3.6}$$

$$\|(L_n-\lambda)^{-k}\| \leqq \frac{M_A M_B}{\lambda^k}, \qquad \forall\lambda>0, \quad k=1, 2, \ldots, \quad n=1, 2, \ldots. \tag{3.7}$$

Démonstration. — On étudie l'équation

$$\begin{cases} x \in D_{L_n}, \\ L_n x - \lambda x = y, \end{cases}$$

avec $y \in X$, $\lambda > 0$, $n \geqq 1$ donnés en considérant L_n comme une perturbation de A : on doit avoir $x \in D_A$ solution de

$$A x - (\lambda+n) x - n^2 (B-n)^{-1} x = y;$$

ceci s'écrit encore :

$$\begin{cases} z - n^2 (B-n)^{-1}(A-\lambda-n)^{-1} z = y, \\ z = (A-\lambda-n) x. \end{cases} \tag{3.8}$$

Pour résoudre l'équation en z on majore la perturbation de l'identité qui apparaît. On a

$$[n^2(B-n)^{-1}(A-\lambda-n)^{-1}]^k = n^{2k}(B-n)^{-k}(A-\lambda-n)^{-k},$$

grâce à (3.2) d'où

$$\|[n^2(B-n)^{-1}(A-\lambda-n)^{-1}]^k\| \leqq n^{2k}\frac{M_A M_B}{n^k(\lambda+n)^k},$$

grâce à (3.4). Cette majoration implique la convergence de la série de terme général $n^2(B-n)^{-1}(A-\lambda-n)^{-1}$ dès que $\lambda > 0$ et par conséquent (3.8) possède une unique solution

$$\begin{aligned} z &= \{1-n^2(B-n)^{-1}(A-\lambda-n)^{-1}\}^{-1} y \\ &= \sum_{k\geqq 0} n^{2k}(B-n)^{-k}(A-\lambda-n)^{-k} y, \end{aligned}$$

On en déduit que x est unique et

$$\begin{aligned} x &= (A-\lambda-n)^{-1}\{1-n^2(B-n)^{-1} \quad (A-\lambda-n)^{-1}\}^{-1} y \\ &= \sum_{k\geqq 0} n^{2k}(B-n)^{-k}(A-\lambda-n)^{-k-1} y, \end{aligned}$$

d'où

$$\|x\| \leqq \frac{1}{\lambda+n}\sum_{k\geqq 0} M_A M_B\left(\frac{n}{\lambda+n}\right)^k \|y\| = \frac{M_A M_B}{\lambda}\|y\|,$$

ce qui prouve (3.6) et (3.7) lorsque $k=1$. Pour prouver (3.7) dans le cas général, on écrit grâce à (3.2) que

$$(\mathrm{L}_n-\lambda)^{-k}=(\mathrm{A}-\lambda-n)^{-k}\sum_{j_1,\ldots,j_k\geqq 0} n^{2(j_1+\ldots+j_k)}$$
$$\times(\mathrm{B}-n)^{-j_1-\ldots-j_k}(\mathrm{A}-\lambda-n)^{-j_1-\ldots-j_k}$$

et utilisant (3.4), on obtient :

$$\|(\mathrm{L}_n-\lambda)^{-k}\|\leqq\frac{1}{(\lambda+n)^k}\sum_{j_1,\ldots,j_k\geqq 0} n^{2(j_1+\ldots+j_k)}\frac{\mathrm{M_B\,M_A}}{[n(\lambda+n)]^{j_1+\ldots+j_k}}$$
$$=\mathrm{M_A\,M_B}\frac{1}{(\lambda+n)^k}\left\{\sum_{j\geqq 0}\left(\frac{n}{\lambda+n}\right)^j\right\}^k=\frac{\mathrm{M_A\,M_B}}{\lambda^k}.$$

LEMME 3.2. — $(\mathrm{L}-\lambda)(\mathrm{D_L})$ *est dense dans* X *pour* $\lambda>0$.

Démonstration. — On montrera $\overline{(\mathrm{L}-\lambda)(\mathrm{D_L})}\supset\mathrm{D_B}$ d'où le résultat puisque $\mathrm{D_B}$ est dense dans X : de (3.2) et (3.6) résulte que

$$[(\mathrm{L}_n-\lambda)^{-1};(\mathrm{B}-\mu)^{-1}]=0,\qquad\forall\lambda>0,\quad\mu>0,$$

donc si $x\in\mathrm{D_B}$ on a

$$(\mathrm{L}_n-\lambda)^{-1}x\in\mathrm{D_B}\qquad\text{et}\qquad\mathrm{B}(\mathrm{L}_n-\lambda)^{-1}x=(\mathrm{L}_n-\lambda)^{-1}\mathrm{B}x;$$

et comme l'image de $(\mathrm{L}_n-\lambda)^{-1}$ est $\mathrm{D}_{\mathrm{L}_n}=\mathrm{D_A}$ on a

$$(\mathrm{L}_n-\lambda)^{-1}x\in\mathrm{D_A}\cap\mathrm{D_B}=\mathrm{D_L}$$

et

$$(\mathrm{L}-\lambda)(\mathrm{L}_n-\lambda)^{-1}x=x+(\mathrm{L}-\mathrm{L}_n)(\mathrm{L}_n-\lambda)^{-1}x=x+(\mathrm{L}_n-\lambda)^{-1}(\mathrm{B}_n-\mathrm{B})x,$$

d'où

$$\|(\mathrm{L}-\lambda)(\mathrm{L}_n-\lambda)^{-1}x-x\|\leqq\frac{\mathrm{M_A\,M_B}}{\lambda}\|\mathrm{B}_n x-\mathrm{B}x\|\to 0,$$

lorsque $n\to+\infty$ puisque $x\in\mathrm{D_B}$. On a ainsi approché $x\in\mathrm{D_B}$ par des éléments de $(\mathrm{L}-\lambda)(\mathrm{D_L})$.

THÉORÈME 3.3. — *Soient* A *et* B *deux opérateurs linéaires fermés dans* X *vérifiant* (3.2) *et* (3.4); *on suppose de plus que* $\mathrm{D_B}$ *est dense dans* X, *alors* L *défini par* (3.1) *admet une fermeture* $\bar{\mathrm{L}}$ *telle que* $\rho_{\mathrm{L}}\supset\,]0;+\infty[$ *et que*

$$\text{(3.9)}\qquad\|(\bar{\mathrm{L}}-\lambda)^{-k}\|\leqq\frac{\mathrm{M_A\,M_B}}{\lambda^k},\qquad\forall\lambda>0,\quad k=1,2,\ldots.$$

De plus on a

$$(\bar{\mathrm{L}}-\lambda)^{-1}=\lim_{n\to\infty}(\mathrm{L}_n-\lambda)^{-1}\quad\textit{dans }\mathscr{L}(\mathrm{X}).$$

Enfin

$$(\bar{\mathrm{L}}-\lambda)^{-1}(\mathrm{D_A}+\mathrm{D_B})\subset\mathrm{D_L},\qquad\forall\lambda>0.$$

Démonstration. — Toutes les hypothèses du théorème 2.9 sont vérifiées : (2.10) coïncide avec (3.2), (2.11) résulte de (3.4) en faisant $k = 1$, (ii) est un cas particulier du résultat du lemme 3.2, enfin on obtient (i) en écrivant pour $x \in D_L \subset D_{L_n}$ que grâce au lemme 3.1, on a

$$\|x\| \leqq \frac{M_A M_B}{\lambda} \|L_n x - \lambda x\| \to \frac{M_A M_B}{\lambda} \|L x - \lambda x\|,$$

car $L_n x \longrightarrow L x$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$. On obtient ainsi l'existence de $\bar{L}$ avec $\rho_{\bar{L}} \supset]0, +\infty[$; on voit ensuite que $(\bar{L}-\lambda)^{-1}$ est limite des $(L_n-\lambda)^{-1}$ en appliquant le corollaire 2.8 et par conséquent (3.9) résulte de (3.7) par passage à la limite. Enfin la dernière assertion du théorème 3.3 s'obtient comme suit : soit $y \in D_A$ et $x = (\bar{L}-\lambda)^{-1} y$, on va voir que $x \in D_A \cap D_B$; en effet, on a

$$D_A \ni (L_n-\lambda)^{-1} y \to x, \quad \text{lorsque } n \to +\infty$$

et

$$A(L_n-\lambda)^{-1} y = (L_n-\lambda)^{-1} A y \to (\bar{L}-\lambda)^{-1} A y,$$

lorsque $n \longrightarrow +\infty$ et comme A est fermé, cela implique que $x \in D_A$ et $A x = (\bar{L}-\lambda)^{-1} A y$. Par ailleurs, on a

$$D_B \ni -n(B-n)^{-1}(L_n-\lambda)^{-1} y \to x,$$

orsque $n \longrightarrow +\infty$ et

$$\begin{aligned} &B\{-n(B-n)^{-1}(L_n-\lambda)^{-1} y\} \\ &\quad = B_n(L_n-\lambda)^{-1} y = (L_n-A)(L_n-\lambda)^{-1} y \\ &\quad = y+\lambda(L_n-\lambda)^{-1} y-(L_n-\lambda)^{-1} A y \to y+\lambda x-(\bar{L}-\lambda)^{-1} A y, \end{aligned}$$

lorsque $n \longrightarrow +\infty$ et comme B est fermé cela prouve que $x \in D_B$ et

$$B x = y+\lambda x-(\bar{L}-\lambda)^{-1} A y = y+\lambda x - A x,$$

c'est-à-dire $x \in D_L$ et $L x - \lambda x = y$. La démonstration est analogue pour $y \in D_B$.

Remarque 3.4. — Lorsque ni D_A ni D_B n'est dense dans X, il y a des exemples d'opérateurs vérifiant (3.2) et (3.4) et tels que $\bar{L}$ existe avec $\rho_{\bar{L}} = \varnothing$ (*cf.* Da Prato [3], appendice p. 13).

3.2. On reprend l'étude de l'équation (3.3) toujours sous l'hypothèse (3.2) en la supposant *parabolique*. Pour cela il est commode d'introduire une notation : soit P une application linéaire de domaine D_P dans X et soit $\varphi \in [0; \pi[$, on dit que P vérifie H (φ) si

(i) $\rho_P \supset \Sigma_P = \{ z \in C; -\pi+\varphi < \arg z < \pi-\varphi \}$ (6);

(6) L'espace X est désormais nécessairement complexe.

(ii) Il existe une fonction numérique paire et convexe C_P définie dans $]-\pi+\varphi\,;\ \pi-\varphi[$ telle que

$$\|(P-z)^{-1}\| \leqq \frac{C_P(\theta)}{|z|} \qquad \text{pour} \quad \arg z = \theta.$$

L'hypothèse du cas parabolique est alors la suivante : il existe θ_A et $\theta_B \geqq 0$ tels que A vérifie $H(\theta_A)$ et B vérifie $H(\theta_B)$ et

$$\theta_A + \theta_B < \pi. \tag{3.10}$$

On remarque que dans le cas où X est complexe, l'hypothèse du cas hyperbolique implique que A et B vérifient $H(\pi/2)$.

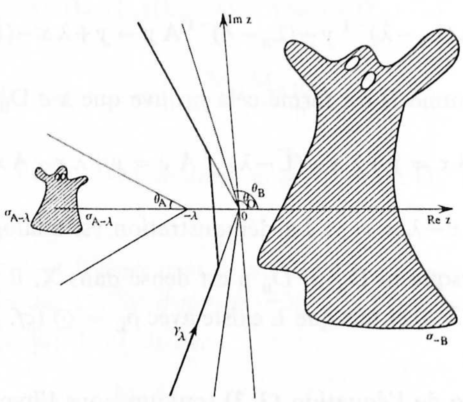
L'un des angles θ_A ou θ_B est nécessairement $< \pi/2$, ce qui implique que l'opérateur correspondant est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique (*cf.* Kato [20]) non nécessairement continu en zéro puisqu'on n'a pas fait d'hypothèse de densité des domaines D_A et D_B.

La résolution de (3.3) dans le cas présent repose sur une construction explicite de sa solution sous la forme $x = S_\lambda\, y$ où

$$S_\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}\,dz, \qquad \lambda > 0 \tag{3.11}$$

avec pour γ une courbe simple joignant $\infty\, e^{-i\theta_0}$ à $\infty\, e^{i\theta_0}$ en demeurant dans $(\Sigma_A - \lambda) \cap (\Sigma_{-B})$ avec $\theta_B < \theta_0 < \pi - \theta_A$. On prendra pour fixer les idées $\gamma = \gamma_\lambda$ frontière orientée du domaine situé à gauche des droites

$\{z\,;\ \arg z = -\theta_0\}$, $\{z\,;\ \operatorname{Re} z = -(\lambda/2)\}$, $\{z\,;\ \arg z = \theta_0\}$ en supposant $\theta_0 > \pi/2$ c'est-à-dire $\theta_A < \pi/2$ pour fixer les idées, selon la figure suivante :



LEMME 3.5. — *Il existe* $N > 0$ *tel que* $\|S_\lambda\| \leqq N/\lambda$, $\forall\, \lambda > 0$.

Démonstration. — Pour tout $z \in \gamma_\lambda$ on a $|\arg z| \geqq \theta_0$ (en comptant les arguments entre $-\pi$ et $+\pi$) d'où

$$\|(B+z)^{-1}\| \leqq \max_{-\pi+\theta_0 \leqq \theta \leqq \pi-\theta_0} \frac{C_B(\theta)}{|z|} \leqq \frac{C}{|z|}\,;$$

d'autre part, on a asusi pour tout $z \in \gamma_\lambda$, $|\arg(z+\lambda)| \leqq \theta_0$, d'où

$$\|(A-z-\lambda)^{-1}\| \leqq \max_{-\theta_0 \leqq \theta \leqq +\theta_0} \frac{C_A(\theta)}{|z+\lambda|} \leqq \frac{C}{|z+\lambda|}.$$

De ces majorations, on déduit la suivante :

$$\|S_\lambda\| \leqq \frac{C^2}{2\pi}\int_{\gamma_\lambda} \frac{|dz|}{|z|.|z+\lambda|}$$

pour tout λ avec C indépendante de λ; en effectuant le changement de variable $z \to \lambda z$, on obtient :

$$\|S_\lambda\| \leqq \frac{C^2}{2\pi\lambda}\int_{\gamma_1} \frac{|dz|}{|z|.|z+1|} = \frac{N}{\lambda}.$$

LEMME 3.6. — *On a :*

(i) $S_\lambda(Lx - \lambda x) = x$, $\forall x \in D_L$;

(ii) *Si* $x \in D_A + D_B$ *alors* $S_\lambda x \in D_L$ *et* $(L-\lambda) S_\lambda x = x$.

Démonstration. — (i) On doit calculer l'intégrale sur γ_λ de

$$\begin{aligned} u(z) &= (A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}(Lx-\lambda x) \\ &= (B+z)^{-1}(A-z-\lambda)^{-1}(Ax-\lambda x) + (A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}Bx \end{aligned}$$

grâce à (3.2).

Des identités

$$(A-z-\lambda)^{-1}(Ax-\lambda x) = x + z(A-z-\lambda)^{-1}x,$$

$$(B+z)^{-1}Bx = x - z(B+z)^{-1}x,$$

on déduit que

$$\begin{aligned} u(z) &= (B+z)^{-1}x + (A-z-\lambda)^{-1}x \\ &= \frac{1}{z}\{-(B+z)^{-1}Bx + (A-z-\lambda)^{-1}(Ax-\lambda x)\}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} S_\lambda(Lx-\lambda x) &= -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} u(z)\,dz \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(B+z)^{-1}Bx\frac{dz}{z} \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-z-\lambda)^{-1}(Ax-\lambda x)\frac{dz}{z}. \end{aligned}$$

On conclut en remarquant que la première intégrale est nulle car la fonction $[(B+z)^{-1}Bx]/z$ est holomorphe et décroît comme $1/|z|^2$ à gauche de γ_λ tandis que la seconde intégrale vaut x, le résidus en $z = 0$ de la fonction $(A-z-\lambda)^{-1}(A\,x-\lambda\,x)$ qui est holomorphe sauf en $z = 0$ et décroit comme $1/|z|^2$ à droite de γ_λ.

(ii) Les rôles de A et B étant symétriques, il suffit de considérer par exemple le cas où $x \in D_B$. De (3.2) résulte que $y = S_\lambda\,x \in D_B$ et que $B\,y = S_\lambda\,B\,x$. Pour vérifier que $y \in D_A$, on utilise l'identité

$$(B+z)^{-1}x = \frac{1}{z}\{x-(B+z)^{-1}B\,x\}$$

pour écrire

$$y = S_\lambda x = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-z-\lambda)^{-1}x\frac{dz}{z} + \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}B\,x\frac{dz}{z}$$
$$= (A-\lambda)^{-1}x + \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}B\,x\frac{dz}{z}, \tag{3.12}$$

car la première intégrale vaut $(A-\lambda)^{-1}x$ comme on le voit en déformant le contour d'intégration en un petit cercle centré à l'origine et orienté dans le sens négatif. Il est à présent clair que $y \in D_A$ et que

$$A\,y = A(A-\lambda)^{-1}x + \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}A(A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}B\,x\frac{dz}{z}$$
$$= A(A-\lambda)^{-1}x + \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(B+z)^{-1}B\,x\frac{dz}{z}$$
$$+ \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(z+\lambda)(A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}B\,x\frac{dz}{z}$$
$$= x+\lambda(A-\lambda)^{-1}x + \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}Bx\,dz$$
$$+ \frac{\lambda}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}B\,x\frac{dz}{z}$$
$$= x-B\,y+\lambda\,y;$$

la dernière identité utilise (3.12).

THÉORÈME 3.7. — *Soient* A *et* B *deux opérateurs fermés dans* X *vérifiant* (3.2), (3.10) *et tels que* D_A+D_B *soit dense dans* X; *alors l'opérateur* L *défini par* (3.1) *admet une fermeture* $\bar{L}$ *avec* $\rho_{\bar{L}} \supset\,]0, +\infty[$ *et* $(\bar{L}-\lambda)^{-1} = S_\lambda$ *pour tout* $\lambda > 0$.

Démonstration. — C'est une application du théorème 2.9 dont les hypothèses sont vérifiées ici car (2.10) coïncide avec (3.2), (2.11) résulte de (3.10), l'hypothèse (i) du théorème 2.9 résulte du lemme 3.5 et du point (i) du lememe 3.6 et enfin l'hypothèse (ii) du théorème 2.9 est vérifiée car d'après le point (ii) du lemme 3.6 on a $(L-\lambda)(D_L) \supset D_A + D_B$ qui est supposé dense dans X. Il faut seulement vérifier que $S_\lambda = (\bar{L}-\lambda)^{-1}$ pour avoir la conclusion complète, cela résulte évidemment du point (i) du lemme 3.6.

Remarque 3.8. — Une modification élémentaire de la démonstration du lemme 3.5 permet aussi de prouver que $\bar{L}$ vérifie l'hypothèse H $(\sup(\theta_A ; \theta_B))$, ce qui prouve en particulier que si A et B sont deux générateurs infinitésimaux de semi-groupes analytiques et vérifient (3.2) alors $\bar{L}$ l'est aussi. Par itération l'application de ce résultat montre que si A_k, $1 \leqq k \leqq n$ sont n opérateurs fermés à domaines denses vérifiant H (θ_A) avec $\theta_A < \pi/2$ et si toutes les résolvantes des A_k et de B commutent deux à deux, l'opérateur

$$L = A_1 + \ldots + A_n + B$$

admet une fermeture ayant les propriétés ci-dessus.

3.3. On continue l'étude de l'équation (3.3) supposant (3.2) et (3.10) vérifiés dans le but de préciser $D_{\bar{L}}$, ce qui nécessite l'utilisation de certains espaces d'interpolation introduits dans Grisvard [11] : pour $\theta \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty]$ on note $D_A(\theta; p)$ le sous-espace de X formé des x tels que

$$\| t^\theta A (A-t)^{-1} x \| \in L^p_*,$$

où L^p_* est l'espace des fonctions boréliennes de puissance p intégrable pour la mesure (invariante par multiplication) dt/t sur $]0, +\infty[$ lorsque $p \in [1, +\infty[$ et l'espace des fonctions boréliennes essentiellement bornées sur $]0, +\infty[$ lorsque $p = +\infty$ (7).

Pour $\theta = 1$ et $p \in [1, +\infty]$ on note $D_A(1; p)$ le sous-espace de X formé des x tels que

$$\| t A^2 (A-t)^{-2} x \| \in L^p_*.$$

Ces espaces vérifient les propriétés d'inclusion

$$D_A(\theta; p) \supset D_A(\theta'; q), \tag{3.13}$$

si $\theta' > \theta$ avec p et q quelconques ou si $\theta = \theta'$ avec $q \leqq p$.

Le but principal de ce paragraphe est de montrer que si $x \in D_A(\theta; p)$ [ou $D_B(\theta, p)$] alors $y = S_\lambda x \in D_L$, c'est-à-dire que le problème (3.3) admet une solution stricte unique et de plus $A y$ et $B y \in D_A(\theta, p)$ [ou $D_B(\theta, p)$] ce qui signifie que L restreint à $D_A(\theta, p)$ [ou $D_B(\theta, p)$] est fermé et non plus seulement fermable.

LEMME 3.9. — *S_λ est linéaire continu de X dans $D_A(1; \infty) \cap D_B(1; \infty)$.*

Comme on a vu que $S_\lambda = (\bar{L}-\lambda)^{-1}$, cela implique que

$$D_{\bar{L}} \subset D_A(1; \infty) \cap D_B(1; \infty) \subset D_A(\theta; p) \cap D_B(\theta, p)$$

pour tout $\theta \in]0, 1[$ et $p \in [1; \infty]$.

(7) On utilisera aussi les espaces analogues $D_B(\theta; p)$.

Démonstration. — Les opérateurs A et B jouant des rôles interchangeables, on se contentera de prouver que pour tout $y \in \mathrm{X}$, on a

$$x = \mathrm{S}_\lambda \, y \in \mathrm{D}_\mathrm{B}(1;\, \infty);$$

ceci nécessite le calcul de

$$\mathrm{B}^2(\mathrm{B}-t)^{-2}\,x.$$

On établiera l'identité

$$\mathrm{B}^2(\mathrm{B}-t)^{-2}\,x = -\frac{1}{2\,i\pi}\int_\gamma z^2(z+t)^{-2}(\mathrm{A}-z-\lambda)^{-1}(\mathrm{B}+z)^{-1}\,y\,dz; \tag{3.14}$$

en effet, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{B}^2(\mathrm{B}-t)^{-2}\,x &= \{1+t(\mathrm{B}-t)^{-1}\}^2\,x\\ &= x+2\,t(\mathrm{B}-t)^{-1}x+t^{\,2}(\mathrm{B}-t)^{-2}x\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(\mathrm{B}-t)^{-1}\,x &= -\frac{1}{2\,i\pi}\int_\gamma(\mathrm{A}-z-\lambda)^{-1}(\mathrm{B}-t)^{-1}(\mathrm{B}+z)^{-1}\,y\,dz\\ &= -\frac{1}{2\,i\pi}\int_\gamma(\mathrm{A}-z-\lambda)^{-1}(\mathrm{B}-t)^{-1}\,y\,\frac{dz}{t+z}\\ &\quad+\frac{1}{2\,i\pi}\int_\gamma(t+z)^{-1}(\mathrm{A}-z-\lambda)^{-1}(\mathrm{B}+z)^{-1}\,y\,dz\\ &= \frac{1}{2\,i\pi}\int_\gamma(t+z)^{-1}(\mathrm{A}-z-\lambda)^{-1}(\mathrm{B}+z)^{-1}\,y\,dz\end{aligned} \tag{3.15}$$

car

$$\frac{1}{2\,i\pi}\int_\gamma(\mathrm{A}-z-\lambda)^{-1}\frac{dz}{t+z} = 0$$

puisque la fonction à intégrer est holomorphe et décroit comme $1/|\,z\,|^2$ à droite du contour γ, à condition que γ passe à droite du point $z = -t\;(t > 0)$. Par la même méthode, on obtient :

$$\mathrm{B}^2(\mathrm{B}-t)^{-2}\,x = -\frac{1}{2\,i\pi}\int_{\gamma_\lambda}\{1-2\,t(z+t)^{-1}+t^{\,2}(z+t)^{-2}\}$$

$$(\mathrm{A}-z-\lambda)^{-1}(\mathrm{B}+z)^{-1}\,y\,dz,$$

Grâce à l'hypothèse (3.10), la fonction à intégrer dans (3.14) reste bornée lorsque $z \to 0$ avec $|\arg z\,| \geqq \theta_0$; ceci permet de déformer γ en γ_0 qui est un contour indépendant de $t > 0$ (on rappelle que $\gamma_0 = \{\, r\,e^{\pm i\theta_0};\; r \geqq 0\,\}$). On en déduit l'inégalité

$$\|\,t\,\mathrm{B}^2(\mathrm{B}-t)^{-2}\,x\,\| \leqq \frac{t}{2\pi}\int_{\gamma_0}\left|\frac{z^2}{(z+t)^2}\right|\frac{\mathrm{C}_\mathrm{A}(\theta_0)}{|\,z+\lambda\,|}\;\frac{\mathrm{C}_\mathrm{B}(\pi-\theta_0)}{|\,z\,|}\,|\,dz\,|.\|\,y\,\|,$$

d'où

$$\| t\,B^2(B-t)^{-2}x \| \leqq \frac{C}{2\pi}\| y \|\, t \int_{\gamma_0} \frac{|z|}{|z+t|^2\,|z+\lambda|}\,|dz|$$

$$\leqq C' \| y \| \int_{\gamma_0} \frac{t\,|dz|}{|z+t|^2} = C' \| y \| \int_{\gamma_0} \frac{|dz|}{|z+1|^2},$$

grâce au changement de variable $z \to tz$ (les constantes C et C′ ne dépendent ni de t ni de λ). Ceci prouve que

$$t \to \| t\,B^2(B-t)^{-2}x \|$$

est borné pour $t > 0$ par un nombre proportionnel à $\| y \|$ donc S_λ est linéaire continu de X dans $D_B\,(1; +\infty)$.

C. Q. F. D.

Jusqu'à présent, on n'a prouvé l'existence d'une solution classique de (3.3) que pour $y \in D_A + D_B$ (*cf.* le lemme 3.6); on peut maintenant améliorer ce résultat.

LEMME 3.10. — *Pour* $y \in D_A(\theta; p) + D_B(\theta; p)$, $\theta \in]0, 1[$, $p \in [1; \infty]$, *on a*

$$x = S_\lambda\, y \in D_L \qquad et \qquad (L-\lambda)x = y.$$

Démonstration. — Jouant toujours sur le fait qu'on peut échanger A et B, on se contentera de prouver le résultat pour $y \in D_B(\theta; p)$. Ensuite, grâce aux inclusions (3.13), il suffit de considérer le cas où $p = +\infty$; dans ce cas la fonction $|z|^\theta B(B+z)^{-1}y$ est bornée sur γ. Grâce à (3.2) il est alors évident que $x \in D_B$ et que

$$\text{(3.16)} \qquad Bx = -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1} B(B+z)^{-1} y\, dz.$$

Pour prouver que $x \in D_A$, on écrit que

$$(B+z)^{-1} y = \frac{1}{z}\{ y - B(B+z)^{-1} y \},$$

d'où

$$\text{(3.17)} \qquad x = -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1} y \frac{dz}{z} + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1} B(B+z)^{-1} y \frac{dz}{z}$$

$$= (A-\lambda)^{-1} y + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1} B(B+z)^{-1} y \frac{dz}{z},$$

en utilisant (3.10). Sur cette expression, il est évident que $x \in D_A$ et que

$$A x = A(A-\lambda)^{-1} y + \frac{1}{2 i\pi}\int_\gamma A(A-z-\lambda)^{-1} B(B+z)^{-1} y \frac{dz}{z},$$

puisque la fonction à intégrer admet une majoration en $O(|z|^{-1-\theta})$ sur γ vu l'hypothèse sur y.

Pour conclure, on écrit que

$$A(A-\lambda)^{-1} y = y+\lambda(A-\lambda)^{-1} y,$$
$$A(A-z-\lambda)^{-1} y = y+(\lambda+z)(A-z-\lambda)^{-1} y,$$

d'où

$$\begin{aligned} A x &= y+\lambda(A-\lambda)^{-1} y + \frac{1}{2 i\pi}\int_\gamma B(B+z)^{-1} y \frac{dz}{z} \\ &\quad + \frac{1}{2 i\pi}\lambda\int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1} B(B+z)^{-1} y \frac{dz}{z} \\ &\quad + \frac{1}{2 i\pi}\int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1} B(B+z)^{-1} y\, dz \\ &= y+\lambda x - B x, \end{aligned}$$

d'après (3.16) et (3.17) et puisque $1/(2 i\pi)\int_\gamma B(B+z)^{-1} y (dz/z)$ est nul comme on l'a déjà constaté. En conclusion, on a prouvé que

$$x \in D_A \cap D_B = D_L \quad \text{et} \quad A x + B x - \lambda x = L x - \lambda x = y.$$

Pour terminer, on prouve le résultat annoncé plus haut :

THÉORÈME 3.11. — *Soient* A *et* B *deux opérateurs fermés dans* X *vérifiant* (3.2) *et* (3.10); *alors, pour* $y \in D_B(\theta; p)$ [*resp.* $D_A(\theta, p)$] *avec* $\theta \in]0, 1[$ *et* $p \in [1, +\infty]$, *la solution* $x = S_\lambda y$ *de* (3.3) *vérifie* $A x$, $B x \in D_B(\theta, p)$ [*resp.* $D_A(\theta; p)$].

Démonstration. — On a vu en (3.15) que si γ passe à droite du point $z = -t$:

$$(B-t)^{-1} x = \frac{1}{2 i\pi}\int_\gamma (t+z)^{-1} (A-z-\lambda)^{-1} (B+z)^{-1} y\, dz,$$

d'où

$$\begin{aligned} B(B-t)^{-1} x &= x+t(B-t)^{-1} x \\ &= -\frac{1}{2 i\pi}\int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1} y\, dz \\ &\quad + \frac{1}{2 i\pi}\int_\gamma t(t+z)^{-1}(A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1} y\, dz. \\ &= -\frac{1}{2 i\pi}\int_\gamma \frac{z}{t+z}(A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1} y\, dz. \end{aligned}$$

En déformant comme cela est lisible grâce à (3.10), γ en γ_0, on obtient :

$$B(B-t)^{-1}x = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_0}\frac{z}{t+z}(A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}y\,dz,$$

puis grâce à (3.2) :

$$B(B-t)^{-1}Bx = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_0}\frac{z}{t+z}(A-z-\lambda)^{-1}B(B+z)^{-1}y\,dz. \tag{3.18}$$

Il s'ensuit que

$$\|B(B-t)^{-1}Bx\| \leqq K\int_0^\infty \frac{r}{r|\cos\theta_0|+t}\varphi(r)\frac{dr}{r},$$

où K ne dépend pas de t et

$$\varphi(r) = \sup\{\|B(B+re^{i\theta_0})^{-1}y\|;\ \|B(B+re^{-i\theta_0})^{-1}y\|\}.$$

L'inclusion $x\in D_B(\theta, p)$ signifie que $r^\theta\varphi(r)\in L^p_*$; en utilisant le théorème de Young (*cf.* par exemple Loomis [31]), on obtient que

$$t^\theta\|B(B-t)^{-1}Bx\|\in L^p_*$$

et même que

$$\left(\int_0^\infty t^{\theta p}\|B(B-t)^{-1}Bx\|^p\frac{dt}{t}\right)^{1/p} \leqq K\left(\int_0^\infty r^\theta\frac{dr}{r|\cos\theta_0|+t}\right)\left(\int_0^\infty r^{\theta p}\varphi(r)^p\frac{dr}{r}\right)^{1/p}.$$

Ainsi, on a prouvé que $Bx\in D_B(\theta; p)$ et comme $Ax = y+\lambda x - Bx$, cela implique que $Ax\in D_B(\theta, p)$ car $x\in D_B\subset D_B(\theta, p)$ (*cf.* l'appendice).

3.4. La dernière partie de ce paragraphe va être consacrée au cas où X est un espace de Hilbert : on peut alors dans certains cas, affirmer que L est fermé : on fera ici usage du résultat suivant du à Lions-Peetre [30].

LEMME 3.13. — *Soit* V *un espace de Banach réflexif contenu avec injection continue dans* X *espace de Hilbert; on suppose que* V *est dense dans* X *et on identifie* X *à son antidual donc à un sous-espace dense de* V* (8); *alors tout opérateur* T *linéaire continu dans* V *qui se prolonge en un opérateur linéaire continu dans* V*, *se prolonge également en un opérateur linéaire continu dans* X.

Dans ce qui suit, si B est un opérateur linéaire de domaine D_B dense dans X, on déisgne par B* l'adjoint de B au sens de la théorie des opérateurs dits non bornés. Ceci posé, on a le

THÉORÈME 3.14. — *Soient* A *et* B *deux opérateurs fermés à domaines denses dans* X *espace de Hilbert; on suppose que* A *et* B *vérifient* (3.2) *et* (3.10) *et qu'il existe* $\theta > 0$ *tel que* $D_B(\theta; 2) = D_{B^*}(\theta; 2)$; *alors* L *défini par* (3.1) *est fermé,* $\rho_L \supset]0, +\infty[$ *et* $(L-\lambda)^{-1} = S_\lambda$ *pour tout* $\lambda > 0$.

(8) V* désigne l'antidual de V.

Démonstration. — On note désormais $V = D_B(\theta; 2)$; cet espace est réflexif car hilbertien, on pourra donc appliquer le lemme 3.13 pour prouver que S_λ est linéaire continu de X dans D_B.

On sait déjà d'après le théorème 3.12 que BS_λ est linéaire continu dans V. En appliquant le théorème 3.12 à A^* et B^* qui vérifient également (3.2) et (3.10) on voit que $B^* S_\lambda^*$ est linéaire continu dans V. Par transposition on en déduit que BS_λ se prolonge en un opérateur linéaire continu dans V^* car pour $y \in D_B$ et $x \in D_{B^*}$ on a

$$\langle BS_\lambda y; x \rangle = \langle S_\lambda B y; x \rangle = \langle y; B^* S_\lambda^* x \rangle,$$

grâce à (3.2) d'où

$$\| BS_\lambda y \|_{V^*} = \sup_{\| x \|_v \leqq 1} | \langle BS_\lambda y; x \rangle | \leqq \| y \|_{V^*} \| B^* S_\lambda^* \|_{\mathscr{L}(V)}.$$

Du lemme 3.13, il résulte que BS_λ se prolonge en un opérateur linéaire continu dans X donc que S_λ est linéaire continu de X dans D_B ; de même on vérifie que AS_λ se prolonge en un élément de $\mathscr{L}$ (X) en écrivant que AS_λ coïncide avec $1 + \lambda S_\lambda - BS_\lambda$ sur V. A ce point, on sait que S_λ est continu de X dans D_L et les autres conclusions du théorème résultent du théorème 3.7.

Remarque 3.15. — L'hypothèse $D_B(\theta; 2) = D_{B^*}(\theta; 2)$ est banalement vérifiée pour $\theta \in]0, 1[$ lorsque B est normal mais dans ce cas on peut démontrer le théorème 3.14 en utilisant la diagonalisation de B. Cependant, cette hypothèse est vérifiée dans bien d'autres cas, notamment lorsque $D_B = D_{B^*}$.

4. **Applications aux équations d'évolution**

(première partie)

4.1. Dans ce paragraphe, on décrira des applications des résultats du paragraphe 3 au cas particulier où l'un des opérateurs est la dérivation dans un espace de fonctions d'une variable réelle définies dans un intervalle [0, T] à valeurs dans un espace de Banach E.

X sera l'un des espaces suivants : $L^p(0, T; E)$ espace des fonctions u mesurables à valeurs dans E et telles que $t \to \| u(t) \|_E^p$ soit intégrable dans [0, T] pour la mesure de Lebesgue, muni de la norme usuelle; C (0, T; E) espace des fonctions u continues dans [0, T] à valeurs dans E muni de la norme du maximum; $C_0(0, T; E)$ sous-espace de C (0, T; E) formé des u tels que $u(0) = 0$ [9].

Précisément, on posera

$$\begin{cases} D_P = \{ u \in X;\ u' \in X,\ u(0) = 0 \}, \\ \qquad P u = -u', \end{cases}$$

c'est-à-dire que lorsque $X = L^p(0, T; E)$ on a $D_P = W_0^{1,p}(0, T; E)$ espace de Sobolev d'ordre 1 dans [0, T] à valeurs dans E avec la condition $u(0) = 0$, tandis que lorsque

(9) L'indice zéro signifiera toujours que les éléments de l'espace vérifient $u(0) = 0$.

$X = C(0, T; E)$ on a $D_P = C_0^1(0, T; E)$ espace des fonctions continument dérivables dans $[0, T]$ à valeurs dans E avec la condition $u(0) = 0$, enfin lorsque $X = C_0(0, T; E)$, D_P est le sous-espace de $C^1(0, T; E)$ formé des fonctions qui en outre vérifient $u'(0) = 0$.

On vérifie facilement l'hypothèse (3.4) avec $M_P = 1$, et l'hypothèse $H(\pi/2)$ dans les trois cas, cependant que D_P n'est dense que lorsque $X = L^p(0, T; E)$ ou $C_0(0, T; E)$. De plus (*cf.* l'appendice) lorsque $X = L^p(0, T; E)$ on a

$$D_P(\theta; p) = W^{\theta, p}(0, T; E),$$

espace (de *Sobolev* d'ordre θ) des fonctions $u \in L^p(0, T; E)$ qui vérifient en outre la condition

$$\int_0^T \int_0^T \| u(t) - u(s) \|_E^p \frac{dt\, ds}{|t-s|^{1+\theta p}} < +\infty \qquad \text{lorsque} \quad \theta < \frac{1}{p};$$

$D_P(\theta; p) = W_0^{\theta, p}(0, T; E)$ sous-espace de $W^{\theta, p}(0, T; E)$ formé des u tels que $u(0) = 0$ lorsque $\theta > 1/p$; $D_P(\theta; p) = W_{0,0}^{\theta, p}(0, T; E)$ sous-espace de $W^{\theta, p}(0, T; E)$ formé des u tels que

$$\int_0^T \| u(t) \|_E^p \frac{dt}{t} < +\infty,$$

lorsque $\theta = 1/p$.
Ensuite lorsque $X = C(0, T; E)$ ou $C_0(0, T; E)$ on a

$$D_P(\theta; +\infty) = C_0^\theta(0, T; E),$$

espace des fonctions u holdériennes d'exposant θ dans $[0, T]$ à valeurs dans E telles que $u(0) = 0$.

Enfin, dans le cas particulier où $p = 2$ et E est hilbertien, on a

$$\begin{cases} D_{P*} = \{ u \in X;\ u' \in X,\ u(T) = 0 \}, \\ \qquad P^* u = u', \end{cases}$$

et partant pour $\theta < 1/2$, on a

$$D_P(\theta; 2) = W^{\theta, 2}(0, T; E) = D_{P*}(\theta; 2).$$

On prendra l'autre opérateur sous une forme particulière : soit Λ un opérateur fermé dans E de domaine D_Λ et d'ensemble résolvant ρ_Λ non vide, on pose

$$\begin{aligned} D_Q &= L^p(0, T; D_\Lambda) \qquad \text{lorsque} \quad X = L^p(0, T; X), \\ D_Q &= C\ (0, T; D_\Lambda) \qquad \text{lorsque} \quad X = C\ (0, T; X), \\ D_Q &= C_0(0, T; D_\Lambda) \qquad \text{lorsque} \quad X = C_0(0, T; X), \end{aligned}$$

et dans tous les cas $(Q u)(t) = \Lambda u(t)$.

L'hypothèse (3.2) est alors vérifiée dans tous les cas.

Ceci posé, on considère L défini par $L u = P u + Q u$ pour $u \in D_L = D_P \cap D_Q$; l'équation [analogue à (3.3)] $L u - \lambda u = f$ n'est autre que l'équation différentielle suivante (où $\lambda > 0$) :

$$(4.1) \qquad -u'(t) + \Lambda u(t) - \lambda u(t) = f(t), \qquad 0 < t < T,$$

et l'appartenance de u à D_L signifie qu'on considère (4.1) avec la condition initiale

$$(4.2) \qquad u(0) = 0.$$

Conformément à la terminologie introduite, dire que u est *solution stricte* de (4.1)-(4.2) signifie que $u \in D_Q \cap D_P$ donc que les fonctions $t \to u(t)$, $u'(t)$, $\Lambda u(t)$ sont dans X, tandis que dire que u est *solution forte* de (4.1)-(4.2) signifie qu'il existe une suite $u_n \in D_Q \cap D_P$, $n = 1, 2, \ldots$ telle que

$$(4.3) \qquad \begin{cases} u_n \to u, \\ -u'_n + \Lambda u_n - \lambda u_n \to f, \end{cases}$$

dans X lorsque $n \to +\infty$.

4.2. On dira que le problème (4.1)-(4.2) est *hyperbolique* si Λ vérifie l'hypothèse suivante : $\rho_\Lambda \supset]0, +\infty[$ et il existe $N \geqq 1$ tel que

$$(4.4) \qquad \|(\Lambda - \lambda)^{-k}\|_{\mathscr{L}(E)} \leqq \frac{N}{\lambda^k}, \qquad \forall \lambda > 0, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Il est clair que (4.4) implique que A vérifie (3.4) et l'application du théorème 3.3 conduit au

THÉORÈME 4.1. — *On suppose que Λ vérifie* (4.4) :

(i) *Si* $f \in L^p(0, T; E)$, *le problème* (4.1)-(4.2) *admet une solution forte unique dans* $L^p(0, T; E)$*;*

(i') *Si* $f \in W_0^{1,p}(0, T; E) + L^p(0, T; D_\Lambda)$ *la solution est stricte* [*donc*

$$u \in W_0^{1,p}(0, T; E) \cap L^p(0, T; D_\Lambda)];$$

(ii) *Si* $f \in C_0(0, T; E)$, *le problème* (4.1)-(4.2) *admet une solution forte unique dans* $C_0(0, T; E)$*;*

(ii') *Si* $f = g + h$, $g \in C_0^1(0, T; E)$, $g'(0) = 0$, $h \in C_0(0, T; D_\Lambda)$ *la solution est stricte* [*donc*

$$u \in C_0^1(0, T; E) \cap C_0(0, T; D_\Lambda)];$$

(iii) *Si* $f \in C(0, T; E)$ *et si de plus* D_Λ *est dense dans* E, *alors le problème* (4.1)-(4.2) *admet une solution forte unique dans* $C(0, T; E)$*;*

(iii') *Si* $f \in C^1(0, T; E) + C(0, T; D_\Lambda)$ *la solution est stricte* [*donc*

$$u \in C_0^1(0, T; E) \cap C_0(0, T; D_\Lambda)].$$

Pour obtenir les affirmations (i) et (ii) on utilise le théorème 3.3 avec A = Q et B = P tandis que pour (iii) on pose A = P et B = Q puisqu'alors c'est D_Q qui est dense dans X.

Remarque 4.2. — Seuls les points (iii) et (iii') résultent de la théorie usuelle des semi-groupes selon Hille-Yosida puisque Λ est générateur d'un semi-groupe borné dans E si et seulement si (4.4) a lieu et D_Λ est dense dans E.

Remarque 4.3. — On se débarrasse comme d'habitude de la restriction $\lambda > 0$ dans (4.1) en remplaçant éventuellement $u(t)$ par $e^{\lambda t} u(t)$ et $f(t)$ par $e^{\lambda t} f(t)$ (lorsque T est fini)

Remarque 4.4. — Le résultat du théorème 3.3 affirmant que

$$(L-\lambda)^{-1} = \lim_{n \to +\infty} (L_n - \lambda)^{-1},$$

signifie que u solution forte de (4.1)-(4.2) s'obtient comme limite des u_n solutions de

$$Q u_n + P_n u_n - \lambda u_n = f,$$

c'est-à-dire de

$$+n\left(\int_0^t e^{n(t-s)} u_n(s)\,ds\right)' + \Lambda u_n(t) - \lambda u_n(t) = f(t),$$

lorsque $X = L^p(0, T; E)$ ou $C_0(0, T; E)$ et de

$$-u_n' - n\Lambda(\Lambda - n)^{-1} u_n(t) - \lambda u_n(t) = f(t),$$

lorsque $X = C(0, T; E)$ [avec bien sûr $u_n(0) = 0$ dans tous les cas].

4.3. On dira que le problème (4.1)-(4.2) est *parabolique* si Λ vérifie $H(\theta_\Lambda)$ avec $\theta_\Lambda < \pi/2$. Il est alors clair que Q vérifie $H(\theta_Q)$ avec $\theta_Q = \theta_\Lambda < \pi/2$ donc que (3.10) a lieu. Le théorème 3.7 ne conduit à rien de nouveau par rapport au théorème 4.1 par contre le lemme 3.9 implique le

THÉORÈME 4.5. — *On suppose que* Λ *vérifie* $H(\theta_\Lambda)$ *avec* $\theta_\Lambda < \pi/2$:

(i) *Si* $f \in L^p(0, T; E)$, *la solution forte de* (4.1)-(4.2) *vérifie*

$$u \in W_0^{\theta, p}(0, T; E) \cap L^p(0, T; D_\Lambda(\theta; p))$$

pour tout $\theta \in]0, 1[$;

(ii) *Si* $f \in C_0(0, T; E)$, *la solution forte de* (4.1)-(4.2) *vérifie*

$$u \in C_0^\theta(0, T; E) \cap C_0(0, T; D_\Lambda(\theta; \infty))$$

pour tout $\theta \in]0, 1[$;

(iii) *Si de plus* D_Λ *est dense dans* E *et* $f \in C(0, T; E)$, *alors la solution forte de* (4.1)-(4.2) *vérifie*

$$u \in C_0^\theta(0, T; E) \cap C_0(0, T; D_\Lambda(\theta; \infty))$$

pour tout $\theta \in]0, 1[$.

On a utilisé ici les identités

$$D_Q(\theta, p) = L^p(0, T; D_\Lambda(\theta, p)),$$

lorsque

$$X = L^p(0, T; E) \quad \text{et} \quad D_Q(\theta, \infty) = C(0, T; D_\Lambda(\theta, \infty)),$$

lorsque $X = C(0, T; E)$ qui seront justifiées dans l'appendice.

Remarque 4.6. — Seul le point (iii) résulte de la théorie des semi-groupes analytiques fortement continus selon Kato [20] puisque Λ est générateur d'un tel semi-groupe si et seulement si D_Λ est dense dans E et Λ vérifie $H(\theta_\Lambda)$ avec $\theta_\Lambda < \pi/2$.

Enfin le résultat le plus fort est obtenu en appliquant le théorème 3.11 :

THÉORÈME 4.7, — *On suppose que* Λ *vérifie* $H(\theta_\Lambda)$ *avec* $\theta_\Lambda < \pi/2$ *:*

(i) *Si* $f \in W^{\theta, p}(0, T; E)$, $0 < \theta < 1/p$ *alors le problème* (4.1)-(4.2) *admet une solution stricte unique u telle que*

$$u', \quad \Lambda u \in W^{\theta, p}(0, T; E);$$

(i') *Si* $f \in L^p(0, T; D_\Lambda(\theta, p))$, $0 < \theta < 1$ *alors le problème* (4.1)-(4.2) *admet une solution stricte unique u telle que*

$$u', \quad \Lambda u \in L^p(0, T; D_\Lambda(\theta, p));$$

(ii) *Si* $f \in C_0^\theta(0, T; E)$, $0 < \theta < 1$ *alors le problème* (4.1)-(4.2) *admet une solution stricte unique u telle que*

$$u', \quad \Lambda u \in C_0^\theta(0, T; E);$$

(ii') *Si* $f \in C(0, T; D_\Lambda(\theta, \infty))$, $0 < \theta < 1$ *alors le problème* (4.1)-(4.2) *admet une solution stricte unique u telle que*

$$u', \quad \Lambda u \in C(0, T; D_\Lambda(\theta, \infty)).$$

Pour terminer, on peut signaler le résultat particulier au cas hilbertien :

THÉORÈME 4.8. — *On suppose que* Λ *vérifie* $H(\theta_\Lambda)$ *avec* $\theta_\Lambda < \pi/2$ *dans* E *espace de Hilbert et que* D_Λ *est dense dans* E *alors si* $f \in L^2(0, T; E)$ *le problème* (4.1)-(4.2) *admet une solution stricte unique u telle que*

$$u', \quad \Lambda u \in L^2(0, T; E).$$

Ce théorème est conséquence du théorème 3.14; on peut le démontrer directement en utilisant les méthodes de Lions-Magenes [28].

Remarque 4.9. — Tous les résultats concernant l'équation parabolique reposent sur la construction explicite de u sous la forme $u = S_\lambda f$ (*cf.* (3.11)] c'est-à-dire que

$$u(t) = -\int_0^t e^{(\Lambda - \lambda)(t-s)} f(s)\, ds,$$

où $t \to e^{\Lambda t}$ désigne le semi-groupe analytique de générateur infinitésimal Λ construit d'après Da Prato [4] dans le cas où D_Λ n'est pas dense (le semi-groupe n'est pas fortement continu en $t = 0$ dans ce cas).

Remarque 4.10. — Les résultats précédents sont encore valables quand $T = +\infty$ sans modification lorsque $X = L^p(0, T; E)$ et lorsque $X = C(0, T; E)$ il faut entendre par X l'espace des fonctions uniformément continues et bornées dans $[0, +\infty[$ à valeurs dans E muni de la norme du maximum.

Remarque 4.11. — On peut aussi résoudre le problème (4.1)-(4.2) dans des espaces avec poids, par exemple $X = L^p_\alpha(0, T; E)$ espace des fonctions u mesurables à valeurs dans E et telles que $t \to t^\alpha \| u(t) \|_E$ soit intégrable dans $[0, T]$ pour la mesure de Lebesgue; lorsque $\alpha \leqq 0$, P vérifie (3.4) avec $M_P = 1$ et $H(\pi/2)$, de plus D_P est dense dans X et on obtient ainsi dans cet espace des résultats analogues à ceux obtenus pour $\alpha = 0$. L'introduction de ces poids permet d'étudier le comportement de u en zéro; de même, l'introduction de poids exponentiels dans le cas $T = +\infty$ permettrait une étude du comportement asymptotique de u.

4.4. Les résultats précédents sont incomplets car on n'a pas résolu le problème (4.1) avec une condition initiale non homogène

$$u(0) = x. \tag{4.5}$$

Dans le cas hyperbolique, on utilisera le

LEMME 4.12. — (i) *L'image par $u \to u(0)$ de l'espace*

$$W(p, 0; D_\Lambda, E) = W^{1,p}(0, T; E) \cap L^p(0, T; D_\Lambda)$$

est

$$D_\Lambda\left(1 - \frac{1}{p}; p\right), \qquad 1 \leqq p < +\infty;$$

(ii) *L'image par $u \to u(0)$ de l'espace*

$$W^2(p, 0; D_{\Lambda^2}, E) = W^{2,p}(0, T; E) \cap W^{1,p}(0, T; D_\Lambda) \cap L^p(0, T; D_{\Lambda^2})$$

est

$$D_\Lambda\left(2 - \frac{1}{p}; p\right) = \left\{x \in D_\Lambda;\ \Lambda x \in D_\Lambda\left(1 - \frac{1}{p}; p\right)\right\}.$$

En effet, les espaces d'interpolations $D_\Lambda(\theta; p)$ introduits au paragraphe 3 sont aussi des espaces de traces (*cf.* l'appendice).

De ce lemme et du théorème 4.1, résulte le

THÉORÈME 4.13. — *Sous l'hypothèse* (4.4) *:*

(i) *Si $f \in L^p(0, T; E)$ et $u_0 \in D_\Lambda(1-(1/p); p)$ le problème* (4.1)-(4.5) *admet une solution forte unique dans* $L^p(0, T; E)$*;*

(ii) *Si* $f \in W(p, 0; D_\Lambda; E)$ *et* $u_0 \in D_\Lambda(2-(1/p); p)$ *la solution est stricte* [*donc* $u \in W(p, 0; D_\Lambda, E)$].

En toute rigueur, il faut aussi préciser ce qu'on entend par solution forte de (4.1)-(4.5). Il s'agira bien sûr de $u \in L^p(0, T; E)$ telle qu'il existe une suite $u_n \in W(p, 0; D_\Lambda, E)$ avec

$$\left\{\begin{array}{c} u_n \to u \text{ dans } L^p(0, T; E), \\ -u_n' + \Lambda u_n - \lambda u_n \to f \text{ dans } L^p(0, T; E), \\ u_n(0) \to x \text{ dans } E, \end{array}\right.$$

lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

Démonstration du théorème 4.13. — (i) D'après le lemme 4.12, il existe $v \in W(p, 0; D_\Lambda, E)$ avec $v(0) = x$. Si on cherche u sous la forme $v+w$, on est ramené à chercher w solution forte dans $L^p(0, T; E)$ de

$$\left\{\begin{array}{c} -w' + \Lambda w - \lambda w = f + v' - \Lambda v + \lambda v, \\ w(0) = 0, \end{array}\right.$$

ce qui est résolu par le point (i) du théorème 4.1 puisque

$$f + v' - \Lambda v + \lambda v \in L^p(0, T; E);$$

(ii) On raisonne comme en (i) mais ici, vu l'hypothèse sur x, il résulte du lemme 4.12 que

$$f + v' - \Lambda v + \lambda v \in W(p, 0; D_\Lambda, E) \subset W_0^{1, p}(0, T; E) + L^p(0, T; D_\Lambda);$$

on peut donc utiliser le point (i') du théorème 4.1.

C. Q. F. D.

On pourrait de la même façon donner des extensions au cas de la donnée initiale non homogène des résultats (ii) à (iii') du théorème 4.1, cependant les résultats de Iannelli [19] sont plus précis dans le cas hyperbolique; c'est pourquoi dans ce qui suit, on se concentrera sur le cas parabolique.

Du théorème 4.5 point (i) et du lemme 4.12 (i) on déduit que lorsque Λ vérifie $H(\theta_\Lambda)$ avec $\theta_\Lambda < \pi/2$ la solution forte obtenue au point (i) du théorème 4.13 est en fait élément de $W_0^{\theta, p}(0, T; E) \cap L^p(0, T; D_\Lambda(\theta; p))$ pour tout $\theta \in]0, 1[$. Plus intéressantes sont les extensions du théorème 4.7. Comme précédemment, il faut quelques résultats de traces :

LEMME 4.14. — *L'image par* $u \longrightarrow u(0)$ *des espaces*

$$W_1 = \{u \in L^p(0, T; D_\Lambda);\ u',\ \Lambda u \in L^p(0, T; D_\Lambda(\theta; p))\}, \qquad 0 < \theta < 1,$$

$$W_2 = \{u \in L^p(0, T; D_\Lambda);\ u,\ u',\ \Lambda u \in W^{\theta, p}(0, T; E) \cap L^p(0, T; D_\Lambda(\theta; p))\},$$

$$W_3 = \{u \in L^p(0, T; D_\Lambda);\ u',\ \Lambda u \in W^{\theta, p}(0, T; E)\}, \qquad 0 < \theta < \frac{1}{p},$$

est $D_\Lambda(\theta + 1 - (1/p); p)$.

Démonstration. — L'espace W_1 est dans les notations de Lions-Peetre [30] l'espace $W^1(p, 0; D_\Lambda(\theta+1; p), D_\Lambda(\theta; p))$; lorsque u décrit W_1, $u(0)$ décrit

$$(D_\Lambda(\theta+1; p), D_\Lambda(\theta, p))_{1-(1/p), p} = D_\Lambda\left(\theta+1-\frac{1}{p}; p\right)$$

(*cf.* également l'appendice).

L'espace image de W_2 par $u \to u(0)$ est explicité dans Grisvard [11] (chap. II, *a* 1, n° 3); c'est encore $D_\Lambda(\theta+1-(1/p); p)$.

En ce qui concerne W_3, on utilise l'inclusion (valable pour $\theta < 1/p$) :

$$W^{\theta, p}(0, T; E) \subset L^p_{-\theta}(0, T; E),$$

prouvée dans Grisvard [13]. On en déduit l'inclusion $W_3 \subset W^1(p, -\theta; D_\Lambda, E)$ (notations de Lions-Peetre [30]) d'où $u(0) \in D_\Lambda(\theta+1-(1/p); p)$ pour $u \in W_3$. On obtient la surjectivité de l'application $u \to u(0)$ de W_3 dans $D_\Lambda(\theta+1-(1/p); p)$ grâce à l'inclusion $W_2 \subset W_3$.

De ce lemme et du théorème 4.7, résulte le

THÉORÈME 4.15. — *On suppose que* Λ *vérifie* $H(\theta_\Lambda)$ *avec* $\theta_\Lambda < \pi/2$:

(i) *Si* $x \in D_\Lambda(\theta+1-(1/p); p)$ *et* $f \in W^{\theta, p}(0, T; E)$, $0 < \theta < 1/p$, *alors le problème* (4.1)-(4.5) *admet une solution stricte unique u telle que*

$$u', \quad \Lambda u \in W^{\theta, p}(0, T; E);$$

(ii) *Si* $x \in D_\Lambda(\theta+1-(1/p); p)$ *et* $f \in L^p(0, T; D_\Lambda(\theta; p))$, $0 < \theta < 1$ *alors le problème* (4.1)-(4.5) *admet une solution stricte unique u telle que*

$$u', \quad \Lambda u \in L^p(0, T; D_\Lambda(\theta; p)).$$

La démonstration est analogue à celle du théorème 4.13.

Remarque 4.16. — Si on réunit les résultats des points (i) et (ii) du théorème 4.15 lorsque $0 < \theta < 1/p$, on voit que pour

$$f \in W^{\theta, p}(0, T; E) \cap L^p(0, T; D_\Lambda(\theta; p)) \tag{4.6}$$

et pour $x \in D_\Lambda(\theta+1-(1/p); p)$, le problème (4.1)-(4.5) admet une solution stricte u dans W_2 (notations du lemme 4.14). Ce résultat est vrai en fait pour tout $\theta \in]0, 1[$. En effet, si on applique ici le théorème 3.11 avec $X = L^p(0, T; E)$ et $\theta > 1/p$, on obtient l'existence de u solution stricte dans W_2 si f est donné dans $W_0^{\theta, p}(0,T; E) \cap L^p(0, T; D_\Lambda(\theta; p))$, c'est-à-dire si f vérifie la condition initiale superflue $f(0) = 0$. On étend ce résultat au cas où $f(0)$ est quelconque en remarquant que pour $\theta > 1/p$, l'image par

$$u \to \{u(0); u'(0)\}$$

de W_2 est

$$D_\Lambda\left(\theta+1-\frac{1}{p}; p\right) \times D_\Lambda\left(\theta-\frac{1}{p}; p\right)$$

(*cf.* Grisvard [11], chap. II, § 1, n° 3) et que l'image par

$$f \to f(0)$$

de $W^{\theta,p}(0, T; E) \cap L^p(0, T; D_\Lambda(\theta; p))$ est $D_\Lambda(\theta-(1/p); p)$. Alors si $x \in D_\Lambda(\theta+1-(1/p); p)$ et f vérifiant (4.6) sont donnés, on sait qu'il existe $v \in W_2$ tel que

$$v(0) = x \qquad \text{et} \qquad v'(0) = -f(0)+\Lambda x-\lambda x$$

et on obtient u sous la forme $u = v+w$ avec $w \in W_2$ solution de

$$\begin{cases} -w'+\Lambda w-\lambda w = f+v'-\Lambda v+\lambda v = g, \\ w(0) = 0, \end{cases}$$

et on a vu plus haut que ce problème est déjà résolu puisque $g(0) = 0$ donc $g \in W_0^{\theta,p}(0, T; E) \cap L^p(0, T; D_\Lambda(\theta; p))$.

Enfin, lorsque $\theta = 1/p$, le même résultat s'obtient par interpolation.

Pour terminer, dans le cas hilbertien, l'énoncé suivant résulte du théorème 4.8 et du lemme 4.12 avec $p = 2$:

THÉORÈME 4.19. — *On suppose que* Λ *vérifie* $H(\theta_\Lambda)$ *avec* $\theta_\Lambda < \pi/2$ *dans* E *espace de Hilbert et que* D_Λ *est dense dans* E, *alors si* $f \in L^2(0, T; E)$ *et* $x \in D_\Lambda(1/2; 2)$, *le problème* (4.1)-(4.5) *admet une unique solution stricte u telle que* $u', \Lambda u \in L^2(0, T; E)$.

5. Sommes non commutatives, cas hyperbolique

5.1. On reprend l'étude faite en 3.1 mais en supprimant l'hypothèse de commutativité (3.2), c'est-à-dire qu'on étudie l'équation

$$(5.1) \qquad \begin{cases} x \in D_L, \\ Lx-\lambda x = y, \end{cases}$$

où L est de la forme

$$(5.2) \qquad \begin{cases} D_L = D_A \cap D_B, \\ Lx = Ax+Bx \qquad \text{pour} \quad x \in D_L, \end{cases}$$

en supposant que A et B sont deux opérateurs fermés dans X tels que $\rho_A \cap \rho_B \supset]0, +\infty[$ et qu'il existe $M_A \geqq 1$ et $M_B \geqq 1$ avec

$$(5.3) \qquad \|(A-\lambda)^{-k}\| \leqq \frac{M_A}{\lambda^k}, \qquad \|(B-\lambda)^{-k}\| \leqq \frac{M_B}{\lambda^k}, \qquad \forall \lambda > 0$$

pour $k = 1, 2, \ldots$

Comme en (3.1) on suppose aussi que D_B est dense dans X et on utilise les opérateurs approchants

$$B_n = -n^2(B-n)^{-1}-n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

et L_n définis par

$$(5.4)\qquad \begin{cases} D_{L_n} = D_A, \\ L_n x = A x + B_n x \quad \text{pour} \quad x \in D_{L_n}. \end{cases}$$

Concernant L_n on a le

LEMME 5.1. — *Pour tout n il existe $\omega_n \geqq 0$ tel que $\rho_{L_n} \supset]\omega_n, +\infty[$ et que pour $\lambda > \omega_n$, on ait*

$$(5.5)\qquad (L_n - \lambda)^{-1} = (A - \lambda - n)^{-1} \{1 - n^2 (B - n)^{-1} (A - \lambda - n)^{-1}\}^{-1}.$$

Démonstration. — On raisonne comme dans la démonstration de (3.6) : l'élément $x \in D_{L_n}$ est solution de $L_n x - \lambda x = y$ ssi il existe z solution de (3.8) c'est-à-dire de

$$\begin{cases} z - n^2 (B - n)^{-1} (A - \lambda - n)^{-1} z = y, \\ z = (A - \lambda - n) x, \end{cases}$$

c'est le cas dès que λ est tel que

$$\| n^2 (B - n)^{-1} (A - \lambda - n)^{-1} \| < 1,$$

donc en particulier compte tenu de (5.3) dès que

$$\frac{M_A M_B n}{\lambda + n} \leqq 1,$$

soit

$$\lambda > (M_A M_B - 1) n = \omega_n.$$

Il est clair que $\omega_n = 0$ pour tout n lorsque $M_A = M_B = 1$, par contre en général $\omega_n \to +\infty$; pour pallier à cet inconvénient, on fait l'hypothèse supplémentaire de *stabilité* au sens de Kato [22] :

Il existe $N_{A,B} \geqq 1$ tel que

$$(5.6)\qquad \| \{ (B - n)^{-1} (A - n - \lambda)^{-1} \}^k \| \leqq \frac{N_{A,B}}{[n(\lambda + n)]^k}$$

pour $n = 1, 2, \ldots, k = 1, 2, \ldots, \lambda > 0$.

On a alors le

LEMME 5.2. — *Pour tout n on a $\rho_{L_n} \supset]0, +\infty[$ et*

$$(5.7)\qquad \| (L_n - \lambda)^{-1} \| \leqq \frac{M_A N_{A,B}}{\lambda}, \qquad \lambda > 0.$$

Pour la suite, il sera utile de savoir que L est la limite de L_n dans le sens de (2.5) : pour cela, il suffit de vérifier que si $x \in D_A$ vérifie $L_n x = A x + B_n x \to y$ alors $x \in D_B$ (donc $x \in D_A \cap D_B = D_L$ et $L_n x \to L_x$) en effet, on a alors $B_n x \to y - A x$ et donc grâce au point (i) du lemme 2.1 on a

$$\begin{cases} D_B \ni -n(B-n)^{-1}x \to x, \\ B\{-n(B-n)^{-1}x\} = B_n x \to y - A x, \end{cases}$$

ce qui implique que $x \in D_B$ et $B x = y - A x$ puisque B est fermé.

5.2. On va maintenant continuer cette étude en considérant d'abord le cas où les domaines de A et B sont comparables, c'est-à-dire pour fixer les idées qu'on suppose que

$$D_B \subset D_A, \tag{5.8}$$

ce qui implique que D_A est aussi dense dans X. Le calcul précédent conduit à un résultat intéressant lorsque $M_A = M_B = 1$, c'est-à-dire lorsque A et B sont générateurs infinitésimaux de semi-groupes de contractions dans X.

PROPOSITION 5.3. — *On suppose que* (5.3) *avec* $M_A = M_B = 1$ *et* (5.8) *ont lieu et que* D_B *est dense dans* X*; on suppose de plus que*

$$\limsup_{\lambda \to +\infty} \| A(B-\lambda)^{-1} \| < 1, \tag{4.9}$$

alors L *défini par* (5.2) *est fermé,* $\rho_L \supset R_+$ *et* $\| (L-\lambda)^{-1} \| \leqq 1/\lambda$, $\forall \lambda > 0$.

Démonstration. — On choisit ω tel que $\lambda > \omega$ implique

$$\| A(B-\lambda)^{-1} \| < 1;$$

dans ce cas pour $\lambda > \omega$, si on pose

$$x = (B-\lambda)^{-1} z,$$

l'équation (5.1) équivaut à

$$z + A(B-\lambda)^{-1} z = y,$$

soit

$$z = \{ 1 + A(B-\lambda)^{-1} \}^{-1} y.$$

Ceci prouve que pour $\lambda > \omega$ on a $(L-\lambda)(D_L) = X$, ce qui, compte tenu du lemme 5.2 permet d'utiliser le corollaire 2.4; il en résulte que L admet une fermeture $\bar{L}$ avec $\rho_{\bar{L}} \supset R_+$ et $\| (\bar{L}-\lambda)^{-1} \| \leqq 1/\lambda$ pour $\lambda > 0$; il reste à voir que $L = \bar{L}$: on a en fait prouvé que pour $\lambda > \omega$,

$$(L-\lambda)(D_L) = X,$$

donc que

$$(\bar{L}-\lambda)(D_{\bar{L}}) = (L-\lambda)(D_L)$$

et comme $(\bar{L}-\lambda)$ est injectif et prolonge $(L-\lambda)$ cela implique que $D_L = D_{\bar{L}}$ d'où $\bar{L} = L$.

Remarque 5.4. — Si on pose

$$\gamma = \limsup_{\lambda \to +\infty} \| B(B-\lambda)^{-1} \|.$$

on a toujours $\gamma \leqq 2$ car on a supposé que (5.3) a lieu avec $M_B = 1$ et on a

$$B(B-\lambda)^{-1} = 1+\lambda(B-\lambda)^{-1}.$$

Si X est hilbertien et B autoadjoint, on a évidemment $\gamma = 1$. Ceci permet de vérifier (5.9) lorsque A est dominé par B au sens que

$$\|Ax\| \leqq k\|x\|+h\|Bx\|, \qquad \forall x \in D_B,$$

avec k arbitraire et $h < 1/\gamma$; donc si $h < 1/2$. Toutefois d'après Gustafson [16] on peut seulement supposer $h < 1$ et, si D_{A^*} est dense dans X^*, $h \leqq 1$ d'après Chernoff [2].

5.3. Le reste de ce paragraphe est dédié à l'étude du cas où les domaines de A et de B ne sont pas comparables. Compte tenu de l'inégalité (5.7), il faut essentiellement vérifier la densité de $(L-\lambda)(D_L)$ pour être en mesure d'utiliser les résultats du paragraphe 2 et en particulier le corollaire 2.8.

THÉORÈME 5.6. — *Soient* A *et* B *deux opérateurs linéaires fermées dans* X, *vérifiant* (5.3) *et* (5.6); *on suppose que* D_B *est dense dans* E *et en outre que :*

(i) *Il existe un espace de Banach* Y *contenu avec injection continue dans* X, Y *dense dans* X, *tel que* $Y \subset D_B$ *et il existe* $\omega \geqq 0$, $K > 0$ *tels que* $(L_n-\lambda)^{-1}(Y) \subset Y$ *et*

$$\|(L_n-\lambda)^{-1}\|_{\mathscr{L}(Y)} \leqq K, \qquad \forall \lambda > \omega; \tag{5.10}$$

(ii) *Ou bien* $B_n y \to B y$ *lorsque* $n \to +\infty$, *uniformément sur les ensembles bornés de* Y *ou bien* D_{B^*} *est dense dans* X^*. *Alors*

$$\rho_{\bar{L}} \supset]\omega, +\infty[, \qquad \|(\bar{L}-\lambda)^{-1}\| \leqq M_A N_{A,B}/\lambda, \qquad \forall \lambda > \omega$$

et

$$(L_n-\lambda)^{-1} \to (\bar{L}-\lambda)^{-1} \qquad \textit{lorsque} \quad n \to +\infty \quad (^{10}).$$

De plus, si $N_{A,B} = 1$, *alors* $\rho_{\bar{L}} \supset R_+$. *Enfin, si* D_A *est dense dans* X *et stable par* $(B-\lambda)^{-1}$ *pour* $\lambda > \omega$, *alors* L *admet une fermeture.*

Démonstration. — Grâce à l'hypothèse (i) on sait que pour $\lambda > \omega$ on a

$$(L_n-\lambda)^{-1}(Y) \subset Y \cap D_A \subset D_B \cap D_A = D_L;$$

de plus, pour $y \in Y$, on a

$$(L-\lambda)(L_n-\lambda)^{-1} y - y = (B-B_n)(L_n-\lambda)^{-1} y.$$

D'après l'inégalité (5.10), on sait que $(L_n-\lambda)^{-1} y$ demeure dans un borné de Y et par conséquent il résulte de la première hypothèse (ii) que $(B-B_n)(L_n-\lambda)^{-1} y \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, ce qui prouve que $\overline{(L-\lambda)(D_L)} \supset Y$ et par conséquent $(L-\lambda)(D_L)$ est dense dans X. Pour conclure à l'aide de la seconde hypothèse (ii), on écrit que pour $z \in D_{B^*}$

([10]) On rappelle qu'ici $\bar{L}$ désigne un graphe dans X.

on a

$$
\begin{aligned}
&\langle (\mathrm{L}-\lambda)(\mathrm{L}_n-\lambda)^{-1} y - y;\, z\rangle \\
&= \langle (\mathrm{B}-\mathrm{B}_n)(\mathrm{L}_n-\lambda)^{-1} y;\, z\rangle \\
&= \langle (\mathrm{L}_n-\lambda)^{-1} y;\, \mathrm{B}^* z - \mathrm{B}_n^* z\rangle \to 0,
\end{aligned}
$$

car les B_n^* sont les opérateurs approchants de Yosida de B^* (on sait grâce au théorème de Phillips que B^* est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu de contractions dans X^*, *cf.* Yosida [35]).

Dans tous les cas, on peut donc appliquer le corollaire 2.8. Lorsque $\mathrm{N}_{\mathrm{A},\mathrm{B}} = 1$, on a alors $\| (\overline{\mathrm{L}}-\lambda)^{-1} \| \leqq (1/\lambda)$ d'où $\omega_0 = 0$ dans l'application du corollaire 2.8. Enfin, lorsque D_A est dense dans X et est stable par $(\mathrm{B}-\lambda)^{-1}$, on peut, compte tenu de (5.3) utiliser la proposition 2.5 pour prouver que D_L est dense et par conséquent le corollaire 2.4 implique que L admet une fermeture.

Remarque 5.7. — Si X est réflexif $\mathrm{D}_{\mathrm{B}^*}$ est automatiquement dense dans X^* et partant, l'hypothèse (ii) du théorème 5.6 est vérifiée.

Remarque 5.8. — L'hypothèse (i) du théorème 5.6 est vérifiée en posant $\mathrm{Y} = \mathrm{D}_\mathrm{T}$ si T est un opérateur linéaire fermé dans X tel que :

(i) D_T est dense dans X, $\mathrm{D}_\mathrm{T} \subset \mathrm{D}_\mathrm{B}$ et $0 \in \rho_\mathrm{T}$;

(ii) D_T est stable par $(\mathrm{A}-\lambda)^{-1}$ et $(\mathrm{B}-\lambda)^{-1}$ pour $\lambda > \omega$;

(iii) Il existe α et β avec $\alpha+\beta = \omega$ tels que

$$
(5.11)\qquad \begin{cases} \| \mathrm{T}(\mathrm{A}-\lambda)^{-1}\mathrm{T}^{-1} \| \leqq \dfrac{1}{\lambda-\alpha}, & \forall \lambda > \alpha, \\[2ex] \| \mathrm{T}(\mathrm{B}-\lambda)^{-1}\mathrm{T}^{-1} \| \leqq \dfrac{1}{\lambda-\beta}, & \forall \lambda > \beta. \end{cases}
$$

En effet, on pose $\| y \|_\mathrm{Y} = \| \mathrm{T}\, y \|$, alors utilisant l'identité (5.5), on voit que $(\mathrm{L}_n-\lambda)^{-1}(\mathrm{Y}) \subset \mathrm{Y}$ et que

$$
\begin{aligned}
\| \mathrm{L}_n-\lambda)^{-1} \|_{\mathscr{L}(\mathrm{Y})} &= \| \mathrm{T}(\mathrm{L}_n-\lambda)^{-1}\mathrm{T}^{-1} \| \\
&= \| \mathrm{T}(\mathrm{A}-\lambda-n)^{-1}\mathrm{T}^{-1} \{ 1 - n^2\, \mathrm{T}(\mathrm{B}-n)^{-1}(\mathrm{A}-\lambda-n)^{-1}\mathrm{T}^{-1} \}^{-1} \| \\
&\leqq \frac{1}{\lambda+n-\alpha} \{ 1 - n^2 (n-\beta)^{-1}(n+\lambda-\alpha)^{-1} \}^{-1} \\
&= \frac{1}{\lambda-\alpha-[n\beta/(n-\beta)]} \to \frac{1}{\lambda-\alpha-\beta} = \frac{1}{\lambda-\omega}.
\end{aligned}
$$

Remarque 5.9. — Dans la situation de la remarque 5.8, l'hypothèse (ii) du théorème 5.6 a lieu dès que $\mathrm{D}_\mathrm{T} \subset \mathrm{D}_{\mathrm{B}^2}$.

Remarque 5.10. — Dans le cas particulier où B est inversible, D_B est stable par $(A-\lambda)^{-1}$ pour $\lambda > \omega$ et où

$$\| B(A-\lambda)^{-1} B^{-1} \| \leq \frac{1}{\lambda-\omega}, \qquad \forall \lambda > \omega,$$

l'hypothèse (i) du théorème 5.6 est vérifiée en appliquant la remarque 5.8 avec $T = B$. On peut aussi raisonner de la même manière en utilisant $T = B^2$.

5.4. Les raisonnements précédents permettent de construire une solution forte de l'équation $Lx-\lambda x = y$; on va chercher à présent à construire une solution stricte. Pour cela, on considère un opérateur T vérifiant toutes les hypothèses de la remarque 5.8 et on définit des opérateurs $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ comme suit :

$$D_{\tilde{A}} = \{ x \in X;\ T^{-1} x \in D_A,\ AT^{-1} x \in D_T \},$$
$$\tilde{A} x = TAT^{-1} x, \qquad \forall x \in D_{\tilde{A}},$$
$$D_{\tilde{B}} = \{ x \in X;\ T^{-1} x \in D_B,\ BT^{-1} x \in D_T \},$$
$$\tilde{B} x = TBT^{-1} x, \qquad \forall x \in D_{\tilde{B}};$$

concernant ces opérateurs, on vérifie facilement le

LEMME 5.11. — $\rho_{\tilde{A}} \supset]\alpha, +\infty[$, $\rho_{\tilde{B}} \supset]\beta, +\infty[$ *et*

(5.12) $$(\tilde{A}-\lambda)^{-1} = T(A-\lambda)^{-1} T^{-1}, \qquad (\tilde{B}-\lambda)^{-1} = T(B-\lambda)^{-1} T^{-1}.$$

On en déduit la

PROPOSITION 5.12. — *Soit* T *un opérateur vérifiant les hypothèses de la remarque* 5.8; *on suppose que* $\rho_{\tilde{L}} \supset]0, +\infty[$ *et* $\rho_{\bar{\tilde{L}}} \supset]\omega, +\infty[$ *où* $\tilde{L}$ *est défini par* $D_{\tilde{L}} = D_{\tilde{A}} \cap D_{\tilde{B}}$, $\tilde{L} x = \tilde{A} x + \tilde{B} x$ *pour* $x \in D_{\tilde{L}}$; *alors pour* $\lambda > \omega$ *et* $y \in D_T$, *on a*

$$x = (\bar{L}-\lambda)^{-1} y \in D_T \cap D_L.$$

Cela implique que x est solution stricte de $Lx-\lambda x = y$.

Démonstration. — Comme $y \in D_T$, on peut considérer

$$z = (\bar{\tilde{L}}-\lambda)^{-1} T y$$

pour $\lambda > \omega$; par définition de $\bar{\tilde{L}}$, il existe une suite z_n, $n = 1, 2, \ldots$ avec $z_n \in D_{\tilde{L}}$ et

$$\begin{cases} z_n \to z, \\ \tilde{L} z_n - \lambda z_n \to T y. \end{cases}$$

Si on pose $x_n = T^{-1} z_n$ on a $x_n \in D_L$ et

$$\begin{cases} x_n \to T^{-1} z, \\ L x_n - \lambda x_n \to y, \end{cases}$$

car T^{-1} est continu, d'où $x = T^{-1} z \in D_{\bar{L}}$ et $\bar{L}\, x - \lambda\, x = y$; comme $\bar{L} - \lambda$ est inversible, on a donc

$$x = (\bar{L} - \lambda)^{-1} y \in D_T.$$

De plus, par hypothèse on a $D_T \subset D_B$ et

$$\begin{cases} x_n \to x, \\ B x_n = BT^{-1} z_n \to BT^{-1} z = B x, \\ A x_n = L x_n - B x_n \to y + \lambda x - B x, \end{cases}$$

donc puisque A et B sont fermés, on a $x \in D_L$.

Corollaire 5.13. – *On suppose que* A *et* B *vérifient* (5.3) *avec* $M_A = M_B = 1$, *que* B *est inversible, que* D_B *est dense dans* X, *que* $\rho_{\tilde{L}} \supset]0, +\infty[$ *et de plus que* D_B *est stable par* $(A - \lambda)^{-1}$ *et que*

$$BAB^{-1} = A + Q,$$

où $Q \in \mathscr{L}(X)$; *alors pour* $\lambda > \| Q \|$ *et* $y \in D_B$ *on a*

$$x = (\bar{L} - \lambda)^{-1} y \in D_L.$$

Démonstration. – On applique les considérations précédentes avec $T = B$; on a alors $\tilde{B} = B$ et $\tilde{A} = A + Q$, donc $\tilde{L} = L + Q$ et $\bar{\tilde{L}} = \bar{L} + Q$; par conséquent, $\bar{\tilde{L}} - \lambda$ est inversible pour $\lambda > \| Q \|$ et on peut utiliser la proposition 5.12 avec $\omega = \| Q \|$.

Enfin, lorsque X est réflexif, on a le résultat suivant :

Proposition 5.14. – *Soient* A *et* B *deux opérateurs linéaires fermés dans* X *espace de Banach réflexif, vérifiant* (5.3) *et* (5.6) *avec* D_B *dense dans* X. *On suppose qu'il existe* $Y \subset D_B$, *espace de Banach réflexif dense dans* X *avec injection continue et qu'il existe* $\omega \geqq 0$, $K > 0$ *tels que*

$$(L_n - \lambda)^{-1}(Y) \subset Y$$

et

$$\| (L_n - \lambda)^{-1} \|_{\mathscr{L}(Y)} \leqq K, \qquad \forall \lambda > \omega;$$

alors si $\lambda > \omega$, *et* $y \in Y$ *on a*

$$x = (\bar{L} - \lambda)^{-1} y \in Y \cap D_L.$$

Démonstration. – On remarque pour commencer que puisque D_B est dense dans X qui est réflexif alors D_{B^*} est dense dans X^* et par conséquent toutes les hypothèses du théorème 5.6 sont vérifiées. Soit alors $y \in Y$ et $x = (\bar{L} - \lambda)^{-1} y$, on sait que $x = \lim_{n \to +\infty} x_n$ où $x_n = (L_n - \lambda)^{-1} y$; grâce à l'hypothèse (5.10) on a pour $\lambda > \omega$:

$$\| x_n \|_Y \leqq K \| y \|_Y,$$

donc puisque Y est reflexif, il existe $w \in Y$ et une suite croissante d'entiers n_k, $k = 1, 2, \ldots$ telle que $x_{n_k} \to w$ faiblement dans Y lorsque $k \to +\infty$. Nécessairement, on a $w = x$ donc

$x \in Y \subset D_B$; pour prouver que $x \in D_A$, on remarque que

$$A\,x_n = y + \lambda\,x_n - B_n\,x_n$$

et par conséquent la suite $A\,x_n$, $n = 1, 2, \ldots$ est bornée dans X; en extrayant au besoin une nouvelle sous-suite, on a

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n_k} \to x, \\ A\,x_{n_k} \to u, \end{array}\right.$$

faiblement dans X lorsque $k \to +\infty$; comme A est fermé cela implique $x \in D_A$ donc $x \in D_A \cap D_B = D_L$.

5.5. Pour terminer ce paragraphe, on indique brièvement comment on peut utiliser d'autres opérateurs que les approchants de Yosida : soit B_n, $n = 1, 2, \ldots$ une suite d'opérateurs linéaires fermés à domaines denses dans X, approchant B dans le sens que $D_B \subset D_{B_n}$ $\forall\, n$ et $B_n\,x \to B\,x$ lorsque $n \to +\infty$, $\forall\, x \in D_B$; on définit L_n en posant

$$\left\{\begin{array}{l} D_{L_n} = D_A \cap D_{B_n}, \\ L_n\,x = A\,x + B_n\,x, \qquad \forall\, x \in D_{L_n} \end{array}\right.$$

et on suppose que

(5.13) $\qquad L_n$ est fermable pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(5.14) $\qquad \rho_{\bar{L}_n} \supset\,]0, +\infty[\quad$ et $\quad \|(\bar{L}_n - \lambda)^{-1}\| \leqq \dfrac{1}{\lambda}, \qquad \forall\, \lambda > 0.$

Dans ce cas, l'analogue du théorème 5.4 est le

THÉORÈME 5.15. — *Soient* A *et* B *deux opérateurs fermés dans* X *vérifiant* (5.3) *avec* $M_A = M_B = 1$; *on suppose en outre que :*

(i) *Il existe un espace de Banach* Y *contenu avec injection continue dans* X, Y *dense dans* X, *tel que* $Y \subset D_{B_n}$ *pour tout n et il existe* $\omega \geqq 0$ $K > 0$ *tels que*

$$(\bar{L}_n - \lambda)^{-1}(Y) \subset Y \quad \textit{et} \quad \|(\bar{L}_n - \lambda)^{-1}\|_{\mathscr{L}(Y)} \leqq K, \qquad \forall\, \lambda > \omega, \quad n = 1, 2, \ldots;$$

(ii) $(\bar{L}_n - \lambda)^{-1}\,(Y) \subset Y \cap D_A$, $n = 1, 2, \ldots$;

(iii) $B_n\,y \to B\,y$ *lorsque* $n \to +\infty$, *uniformément sur les ensembles bornés de* Y.

Alors

$$\rho_{\bar{L}} \supset\,]0, +\infty[, \quad \|(\bar{L} - \lambda)^{-1}\| \leqq \frac{1}{\lambda}, \quad \forall\, \lambda > 0 \quad \textit{et} \quad (\bar{L} - \lambda)^{-1} = \lim_{n \to +\infty} (\bar{L}_n - \lambda)^{-1}.$$

Enfin, si D_A *est dense dans* X *et stable par* $(B - \lambda)^{-1}$ *pour* $\lambda > \omega$, L *est fermable.*

La démonstration est identique à celle du théorème 5.4.

6. Sommes non commutatives, cas parabolique

6.1. On reprend maintenant l'étude faite en 3.2 sans l'hypothèse de commutativité (3.2) c'est-à-dire qu'on étudie toujours l'équation

$$(6.1)\qquad \begin{cases} x \in D_L, \\ Lx - \lambda x = y, \end{cases}$$

où L est de la forme

$$(6.2)\qquad \begin{cases} D_L = D_A \cap D_B, \\ Lx = Ax + Bx \quad \text{pour} \quad x \in D_L, \end{cases}$$

en supposant que A et B sont deux opérateurs fermés dans X vérifiant $H(\theta_A)$ et $H(\theta_B)$ respectivement ([11]), avec

$$(6.3)\qquad \theta_A + \theta_B < \pi.$$

L'hypothèse de commutativité est remplacé par l'hypothèse plus faible $H(A, B, \varphi)$ qui est destinée à permettre de construire la solution (forte) de (6.1) sous la forme d'une intégrale de Dunford analogue à (3.11) : on dit que A et B vérifient $H(A, B, \varphi)$ si

$$(6.4)\qquad (A-\lambda)^{-1}(D_B) \subset D_B, \qquad \forall \lambda \in \rho_A$$

et si il existe deux fonctions numériques C et φ définies dans

$$]-\pi+\theta_A; \pi-\theta_A[\times]-\pi+\theta_B; \pi-\theta_B[\qquad \text{et} \qquad]0, +\infty[\times]0, +\infty[$$

respectivement, avec C convexe et paire dans les deux variables et telles que

$$(6.5)\qquad \begin{cases} \displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \int_\gamma \varphi(|z+\lambda|; |z|)\, d|z| = 0, \\ \|[B; (A-z')^{-1}](B-z'')^{-1}\| \leqq C(\theta'; \theta'')\varphi(|z'|; |z''|) \end{cases}$$

pour $\theta' = \arg z'$, $\theta'' = \arg z''$, $|\theta'| < \pi - \theta_A$, $|\theta''| < \pi - \theta_B$.

On rappelle que comme en 3.2, γ est une courbe simple joignant $\infty e^{-i\theta_0}$ à $\infty e^{i\theta_0}$ en demeurant dans $(\Sigma_A - \lambda) \cap (\Sigma_B)$ avec $\theta_B < \theta_0 < \pi - \theta_A$.

Ceci permet de considérer l'opérateur S_λ défini comme en (3.11) par

$$(6.6)\qquad S_\lambda = -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}\, dz, \qquad \lambda > 0.$$

Dans le cas commutatif, on a prouvé en (3.2) que $S_\lambda = (\overline{L}-\lambda)^{-1}$, ici grâce à (6.5) on aura

$$(\overline{L}-\lambda) S_\lambda = 1 + R_\lambda,$$

avec R_λ petit (dans un sens précisé plus loin) pour λ assez grand.

([11]) *c.f.* le paragraphe 3, n° 3.2 pour la signification de $H(\theta_A)$ et $H(\theta_B)$.

LEMME 6.1. — *Pour* $y \in D_B$ *on a* $x = S_\lambda y \in D_L$ *et* $L x - \lambda x = y + R_\lambda y$ *où* R_λ *est défini par*

$$R_\lambda = -\frac{1}{2 i \pi}\int_\gamma [B; (A-z-\lambda)^{-1}](B+z)^{-1}\,dz. \tag{6.7}$$

Démonstration. — Grâce à (6.4) on a

$$(A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}\,y \in D_B$$

et

$$\begin{aligned} &B(A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}\,y \\ &\quad = (A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}\,B\,y + [B; (A-z-\lambda)^{-1}](B+z)^{-1}\,y; \end{aligned}$$

cette fonction est intégrable grâce à $H(\theta_A)$, $H(\theta_B)$ et $H(A,\ B;\ \varphi)$ et comme B est fermé, il en résulte que $x = S_\lambda y \in D_B$ et que

$$\begin{aligned} B x = &-\frac{1}{2 i \pi}\int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}\,B\,y\,dz \\ &-\frac{1}{2 i \pi}\int_\gamma [B; (A-z-\lambda)^{-1}](B+z)^{-1}\,y\,dz. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Ensuite on transforme l'intégrale définissant x en raisonnant comme dans la démonstration du lemme 3.6 : on a

$$x = S_\lambda y = (A-\lambda)^{-1}\,y + \frac{1}{2 i \pi}\int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}\,B\,y\,\frac{dz}{z},$$

donc $x \in D_A$ et

$$A x = A(A-\lambda)^{-1}\,y + \frac{1}{2 i \pi}\int_\gamma A(A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}\,B\,y\,\frac{dz}{z}, \tag{6.9}$$

car l'intégrale écrite converge; il en résulte que

$$\begin{aligned} A x &= y + \lambda(A-\lambda)^{-1}\,y + \frac{1}{2 i \pi}\int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}\,B\,y\,dz \\ &\quad + \lambda\frac{1}{2 i \pi}\int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}\,B\,y\,\frac{dz}{z} \\ &= y + \lambda x + \frac{1}{2 i \pi}\int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}\,B\,y\,dz \\ &= y + \lambda x - B x - \frac{1}{2 i \pi}\int_\gamma [B; (A-z-\lambda)^{-1}](B+z)^{-1}\,y\,dz \end{aligned}$$

grâce à (6.8). On a donc prouvé que

$$A x + B x - \lambda x = y + R_\lambda y.$$

C. Q. F. D.

De ce lemme résulte donc l'inclusion

$$(6.10)\qquad (L-\lambda)(D_L) \supset (1+R_\lambda)(D_B).$$

Ayant en vue d'utiliser les résultats du paragraphe 2, on déduira de (6.10) que $(L-\lambda)(D_L)$ est dense dans X toutes les fois où :

(i) D_B est dense dans X

(ii) $1+R_\lambda$ est inversible.

Le moyen le plus simple pour vérifier l'inversibilité de R_λ est d'obtenir la majoration $\| R_\lambda \| < 1$ qui assure la convergence de la série de Neuman : grâce à $H(A, B, \varphi)$, il est clair que

$$\| R_\lambda \| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_\gamma K\varphi(|z+\lambda|, |z|)\, d|z|, \qquad \lambda > 0,$$

où K ne dépend pas de λ, et par conséquent il existe ω_1 tel que $\| R_\lambda \| < 1$ pour tout $\lambda < \omega_1$. Si donc D_B est dense dans X, on a vérifié l'hypothèse (ii) du corollaire 2.8.

Pour pouvoir appliquer le corollaire cité, il faut encore obtenir une inégalité *a priori* pour des opérateurs L_n approchants L [hypothèse (i) du corollaire 2.8]. Ayant supposé D_B dense dans X, on utilise l'approximation de Yosida de B comme précédemment, c'est-à-dire les

$$B_n = -nB(B-n)^{-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

et on pose

$$D_{L_n} = D_A, \qquad L_n x = Ax + B_n x \quad \text{pour } x \in D_{L_n}.$$

L'estimation *a priori* résultera du fait que B_n vérifie $H(\theta_B)$ et $H(A, B_n, \varphi)$ uniformément par rapport à n, c'est-à-dire que $\rho_{B_n} \supset \Sigma_B$ et il existe une fonction numérique convexe C'_B définie dans $]-\pi+\theta_B\,;\,\pi-\theta_B[$ telle que

$$(6.11)\qquad \| (B_n - z)^{-1} \| \leqq \frac{C'_B(\theta)}{|z|}$$

pour $\arg z = \theta$, $n = 1, 2, \ldots$ et il existe une fonction numérique C' définie dans

$$]-\pi+\theta_A;\,\pi-\theta_A[\times]-\pi+\theta_B;\,\pi-\theta_B[$$

telle que

$$(6.12)\qquad \| [B_n;(A-z')^{-1}](B_n-z'')^{-1} \| \leqq C(\theta';\theta'')\psi(|z'|;|z''|)$$

pour $\theta' = \arg z'$, $\theta'' = \arg z''$, $|\theta'| < \pi-\theta_A$, $|\theta''| < \pi-\theta_B$, $n = 1, 2, \ldots$, où ψ désigne une fonction numérique définie dans $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ telle que

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_\gamma \psi(|z+\lambda|;|z|)\, d|z| = 0.$$

La vérification de ces assertions repose sur l'identité élémentaire

$$(6.13)\qquad (B_n-z)^{-1} = -\frac{1}{n+z}\left\{1-\frac{n^2}{n+z}\left(B-\frac{nz}{n+z}\right)^{-1}\right\}$$

pour $nz/(n+z)\in\rho_B$ et donc en particulier pour $z\in\Sigma_B$ [car alors $nz/(n+z)\in\Sigma_B$]; on a donc $\rho_{B_n}\supset\Sigma_B$ et de plus

$$\begin{aligned}\|(B_n-z)^{-1}\| &\leqq \frac{1}{|n+z|}\left\{1+\frac{n^2}{|n+z|}C_B(\omega)\frac{|n+z|}{n|z|}\right\}\\ &= \frac{1}{|n+z|}\left\{1+\frac{n}{|z|}C_B(\omega)\right\} = \frac{1}{|z|}\left\{\frac{|z|+nC_B(\omega)}{|n+z|}\right\},\end{aligned}$$

où $\arg nz/(n+z)=\omega$; comme on a $|\omega|\leqq|\arg z|$, C'_B tel que (6.11) ait lieu existe. Ensuite, de (6.13) résulte l'identité

$$\begin{aligned}&[B_n;(A-z')^{-1}](B_n-z'')^{-1}\\ &\quad = -n^2[(B-n)^{-1};(A-z')^{-1}](B_n-z'')^{-1}\\ &\quad = +n^2(B-n)^{-1}[B;(A-z')^{-1}](B-n)^{-1}(B_n-z'')^{-1}\\ &\quad = -\frac{n^2}{n+z''}(B-n)^{-1}[B;(A-z')^{-1}]\left(B-\frac{nz''}{n+z''}\right)^{-1}\end{aligned}$$

pour $z'\in\rho_A$ et $nz''/(n+z'')\in\rho_B$; en utilisant $H(A, B;\varphi)$ on obtient la majoration

$$\begin{aligned}&\|[B_n;(A-z')^{-1}](B_n-z'')^{-1}\|\\ &\quad\leqq \frac{n^2}{|n+z''|}\,\frac{C_B(0)}{n}C(\theta';\omega)\varphi\left(|z'|;\frac{n|z''|}{|n+z''|}\right),\end{aligned}$$

où $\theta'=\arg z'$ et $\omega=\arg nz''/(n+z'')$; on a $|\omega|\leqq|\theta''|$ avec $\theta''=\arg z''$ d'où l'existence de ψ tel que (6.12) ait lieu.

Ceci étant, pour chaque n on considère les opérateurs analogues à S_λ et R_λ, soient

$$S_{n,\lambda} = -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1}(B_n+z)^{-1}\,dz,\qquad \lambda>0,$$

$$R_{n,\lambda} = -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma [B_n;(A-z-\lambda)^{-1}](B_n+z)^{-1}\,dz.$$

Le lemme 6.1 appliqué à A et B_n montre que pour $y\in X$ on a $S_{n,\lambda}\,y\in D_{L_n}$ et

$$(6.14)\qquad (L_n-\lambda)S_{n,\lambda} = 1+R_{n,\lambda},\qquad \lambda>0.$$

Par ailleurs de $H(\theta_A)$, (6.9) et (6.10) on déduit les majorations

$$(6.15)\qquad \|S_{n,\lambda}\|\leqq\frac{N}{\lambda},$$

où N ne dépend pas de n ni de λ (*cf.* la démonstration du lemme 3.5) et

$$\|R_{n,\lambda}\| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_\gamma K\psi(|z+\lambda|, |z|)\,d|z|, \qquad \lambda > 0, \tag{6.16}$$

où K ne dépend ni de n ni de λ.

Ceci nous conduit au

LEMME 6.1. — *Il existe* $\omega \geqq 0$ *et* $M > 0$ *tels que* $\rho_{L_n} \supset]\omega, +\infty[$ *et que*

$$\|(L_n-\lambda)^{-1}\| \leqq \frac{M}{\lambda}, \qquad \forall \lambda > \omega, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{6.17}$$

Démonstration. — L_n est une perturbation de A par l'opérateur continu B_n dont la norme est $\leqq n(1+C_B(0))$; partant si

$$\lambda > \omega_n = n\,C_A(0)(1+C_B(0)),$$

on a $\lambda \in \rho_{L_n}$ et

$$(L_n-\lambda)^{-1} = \{1+(A-\lambda)^{-1}B_n\}^{-1}(A-\lambda)^{-1},$$

car

$$\|(A-\lambda)^{-1}B_n\| \leqq \frac{\omega_n}{\lambda} < 1.$$

Par ailleurs, d'après (6.16) il existe $\omega \geqq 0$ tel que pour $\lambda > \omega$ on ait $\|R_{n,\lambda}\| < 1/2$ donc grâce â (6.14) on a

$$(L_n-\lambda)^{-1} = S_{n,\lambda}(1+R_{n,\lambda})^{-1} \tag{6.18}$$

pour $\lambda > \sup\{\omega, \omega_n\}$; cependant le terme de droite de cette identité est une fonction analytique définie pour $\lambda > \omega$ à valeurs dans $\mathscr{L}(X)$ donc par prolongement analytique on voit que $\rho_{L_n} \supset]\omega, +\infty[$ et que (6.18) a lieu pour tout $\lambda > \omega$; la majoration (6.17) résulte alors de (6.15) car $\|(1+R_{n,\lambda})^{-1}\| \leqq 2$.

Tous les éléments sont réunis pour prouver le

THÉORÈME 6.3. — *On suppose que* A *et* B *sont deux opérateurs fermés dans* X *vérifiant* $H(\theta_A)$ *et* $H(\theta_B)$ *respectivement avec* (6.3) *et vérifiant* $H(A, B; \varphi)$. *On suppose de plus que* D_B *est dense dans* X; *alors il existe* $\omega \geqq 0$ *tel que* $\rho_{\bar{L}} \supset]\omega, +\infty[$ *et* $(\bar{L}-\lambda)^{-1} = S_\lambda(1+R_\lambda)^{-1}$ *pour* $\lambda > \omega$. *Si de plus* D_A *est dense dans* X, L *admet une fermeture. Enfin si* $C_A(0) = C_B(0) = 1$ *on a* $\omega = 0$.

Démonstration. — Grâce à (6.10) et (6.17), on peut appliquer le corollaire 2.8, ce qui prouve que $\rho_{\bar{L}} \supset]\omega, +\infty[$ et que

$$(\bar{L}-\lambda)^{-1} = \lim_{n\to+\infty}(L_n-\lambda)^{-1} = S_\lambda(1+R_\lambda)^{-1}.$$

Lorsqu'en plus D_A est dense dans X la proposition 2.5 montre que D_L est dense également et alors le corollaire 2.4 est applicable, ce qui prouve que L est fermable. Enfin, lorsque $C_A(0) = C_B(0) = 1$ les hypothèses (5.3) et (5.6) sont vérifiées et d'après (5.7) on a $\rho_{L_n} \supset]0, +\infty[$ et

$$\|(L_n-\lambda)^{-1}\| \leqq \frac{1}{\lambda}, \qquad \lambda > 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

donc $\omega_n = \omega = 0$ dans ce qui précède.

Ce théorème est une extension au cas non commutatif du théorème 3.7.

6.2. A présent comme en 3.3 on va préciser $D_{\bar{L}}$ en utilisant les espaces d'interpolation. L'équivalence du lemme 3.9 est le

LEMME 6.4. — S_λ *est linéaire continu de* X *dans* $D_A(1, \infty) \cap D_B(1, \infty)$.

Puisque $S_\lambda(1+R_\lambda)^{-1} = (L-\lambda)^{-1}$, on aura donc

$$D_{\bar{L}} \subset D_A(1, \infty) \cap D_B(1, \infty) \subset D_A(\theta, p) \cap D_B(\theta, p)$$

pour tout $\theta \in]0, 1[$ et $p \in [1, \infty]$.

Démonstration. — Soit $y \in X$ et $x = S_\lambda y$; on montre d'abord que $x \in D_B(1, \infty)$: il faut expliciter $B^2(B-t)^{-2}x$: on a

$$\begin{aligned}(6.19)\qquad B^2(B-t)^{-2}x = &-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma B^2(B-t)^{-2}(A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}y\,dz\\ &-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1}B^2(B-t)^{-2}(B+z)^{-1}y\,dz\\ &-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma [B^2(B-t)^{-2}; (A-z-\lambda)^{-1}](B+z)^{-1}y\,dz.\end{aligned}$$

La première intégrale se transforme comme suit (on applique le même procédé que dans la démonstration du lemme 3.9) :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1}B^2(B-t)^{-2}(B+z)^{-1}y\,dz\\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1}\{1+2t(B-t)^{-1}+t^2(B-t)^{-2}\}(B+z)^{-1}y\,dz\\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}y\,dz\\ &\quad+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma 2t(A-z-\lambda)^{-1}\frac{(B-t)^{-1}-(B+z)^{-1}}{t+z}y\,dz\\ &\quad+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma t^2(A-z-\lambda)^{-1}(B-t)^{-1}\frac{(B-t)^{-1}-(B+z)^{-1}}{t+z}y\,dz\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}y\,dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma 2t(t+z)^{-1}(A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}y\,dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma t^2(t+z)^{-1}(A-z-\lambda)^{-1}(B-t)^{-1}(B+z)^{-1}y\,dz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}y\,dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma 2t(t+z)^{-1}(A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}y\,dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma t^2(t+z)^{-1}(A-z-\lambda)^{-1}\frac{(B-t)^{-1}-(B+z)^{-1}}{t+z}y\,dz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \{1-2t(t+z)^{-1}+t^2(t+z)^{-2}\}(A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}y\,dz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma z^2(t+z)^{-2}(A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}y\,dz,
\end{aligned}
$$

en tenant compte de H (θ_A) et en supposant que γ passe « à droite » du point $z=-t$. Dans la dernière intégrale, on peut déformer γ en γ_0 puisque $z(B+z)^{-1}$ reste borné entre γ et γ_0; l'intégrale obtenue est alors majorée par

$$
\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{|z|^2}{|z+t|^2}\,\frac{C_A(\theta_0)\,C_B(\pi-\theta_0)}{|z+\lambda|.|z|}\,d|z|.\|y\|,
$$

c'est-à-dire par C/t comme on l'a vu dans la démonstration du lemme 3.9.

Il faut encore majorer la seconde intégrale dans (6.19) : on a

$$
\begin{aligned}
&[B^2(B-t)^{-2};(A-z-\lambda)^{-1}] \\
&\quad = B(B-t)^{-1}[B(B-t)^{-1};(A-z-\lambda)^{-1}] \\
&\qquad + [B(B-t)^{-1};(A-z-\lambda)^{-1}]B(B-t)^{-1} \\
&\quad = tB(B-t)^{-1}[(B-t)^{-1};(A-z-\lambda)^{-1}] \\
&\qquad + t[(B-t)^{-1};(A-z-\lambda)^{-1}]B(B-t)^{-1} \\
&\quad = tB(B-t)^{-2}[B;(A-z-\lambda)^{-1}](B-t)^{-1} \\
&\qquad + t(B-t)^{-1}[B;(A-z-\lambda)^{-1}]B(B-t)^{-2},
\end{aligned}
$$

d'où grâce à H (θ_B) et H (A, B; φ),

$$
\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma [B^2(B-t)^{-2};(A-z-\lambda)^{-1}](B+z)^{-1}y\,dz\right\| \\
&\quad \leqq 2\frac{C_B(0)^2(1+C_B(0))}{t}\int_\gamma \varphi(|z+\lambda|;|z|)\,d|z|.\|y\|.
\end{aligned}
$$

On a ainsi prouvé que $t\,B^2\,(B-t)^{-2}\,x$ est borné pour $t > 0$ par un nombre proportionnel à $\|y\|$ donc S_λ est linéaire continu de X dans $D_B\,(1;\,\infty)$.

Maintenant, il faut encore prouver que $x \in D_A\,(1;\,\infty)$ car contrairement à la situation du lemme 3.9, on ne peut plus échanger les rôles de A et B car l'hypothèse H (A, B; φ) n'est pas symétrique en A et B. Il faut donc expliciter

$$A^2(A-t)^{-2}x = -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma A^2(A-t)^{-2}(A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}\,y\,dz.$$

On calcule d'abord

$$\begin{aligned}(A-t)^{-1}x &= -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A-t)^{-1}(A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}\,y\,dz\\ &= -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{(A-t)^{-1}-(A-z-\lambda)^{-1}}{t-z-\lambda}(B+z)^{-1}\,y\,dz\\ &= -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (z+\lambda-t)^{-1}(A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}\,y\,dz,\end{aligned}$$

compte tenu de H (θ_B) et à condition que γ passe à gauche du point $z = t-\lambda$. On a donc

$$\begin{aligned}A(A-t)^{-1}x &= x+t(A-t)^{-1}x\\ &= -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \{1+t(z+\lambda-t)^{-1}\}(A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}\,y\,dz\\ &= -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (z+\lambda)(z+\lambda-t)^{-1}(A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}\,y\,dz\end{aligned}$$

et en itérant ce procédé de calcul, on obtient l'identité

$$(6.20)\quad A^2(A-t)^{-2}x = -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (z+\lambda)^2(z+\lambda-t)^{-2}(A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}\,y\,dz.$$

En tenant compte de H (θ_A) on peut déformer le contour d'intégration en $\gamma_0-\lambda$ et en posant $\varepsilon = z+\lambda$ dans (6.20), on obtient :

$$A^2(A-t)^{-2}x = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_0} \varepsilon^2(\varepsilon-t)^{-2}(A-\varepsilon)^{-1}(B+\varepsilon-\lambda)^{-1}\,y\,d\varepsilon,$$

d'où

$$\begin{aligned}\|A^2(A-t)^{-2}x\| &\leqq \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_0} \frac{|\varepsilon|^2}{|\varepsilon-t|^2}\,\frac{C_A(\theta_0)}{|\varepsilon|}\,\frac{C_B(\pi-\theta_0)}{|\varepsilon-\lambda|}\|y\|\,d|\varepsilon|\\ &\leqq C\int_{\gamma_0}\frac{d|\varepsilon|}{|\varepsilon-t|^2}\|y\| = \frac{C}{t}\int_{\gamma_0}\frac{d|\varepsilon|}{|\varepsilon-1|^2}\|y\|,\end{aligned}$$

où C ne dépend pas de t; la fonction $t\,A^2\,(A-t)^{-2}\,x$ est donc bornée pour $t > 0$ par une constante proportionnelle à $\|y\|$ et par conséquent S_λ est linéaire continu de X dans $D_A\,(1;\,+\infty)$.

LEMME 6.5. — *S_λ est linéaire continu de $D_B(\theta; p)$ dans D_L pour tout $\theta \in]0, 1[$ et tout $p \in [1, \infty]$; de plus, pour $y \in D_B(\theta, p)$, on a $(L-\lambda) S_\lambda y = y + R_\lambda y$.*

Démonstration. — Pour $y \in D_B(\theta; p)$ on a $x = S_\lambda y \in D_B$ car les intégrales dans (6.8) sont convergentes : en effet, on a

$$\|(A-z-\lambda)^{-1} B(B+z)^{-1} y\| \leqq \frac{C_A(\theta_0)}{|z+\lambda|} f(|z|),$$

où $t \to t^\theta f(t)$ est de puissance p intégrable pour la mesure dt/t car $y \in D_B(\theta; p)$ et on a

$$\|[B; (A-z-\lambda)^{-1}](B+z)^{-1} y\| \leqq \varphi(|z+\lambda|; |z|),$$

grâce à H (A, B; φ).

Ensuite on a $x \in D_A$ et $A x = -B x + \lambda x + y + R_\lambda x$ car l'intégrale dans (6.9) converge puisque

$$\|A(A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1} B y\| \leqq \{1 + C_A(\theta_0)\} f(|z|).$$

LEMME 6.6. — *Si on suppose que $R_\lambda(D_B(\theta; p)) \subset D_B(\theta; p)$ alors pour $y \in D_B(\theta; p)$ on a $AS_\lambda y$ et $BS_\lambda y \in D_B(\theta; p)$.*

Démonstration. — On sait déjà que $x = S_\lambda y \in D_L$ et que (6.8) a lieu donc on a

$$B x = -\frac{1}{2 i \pi} \int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1} B(B+z)^{-1} y \, dz + R_\lambda y$$

et

$$A x = -B x + \lambda x + y + R_\lambda y.$$

Il suffit donc de prouver que $V_\lambda y \in D_B(\theta; p)$ où

$$V_\lambda y = -\frac{1}{2 i \pi} \int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1} B(B+z)^{-1} y \, dz. \tag{6.21}$$

On doit majorer

$$\begin{aligned} & B(B-t)^{-1} V_\lambda y \\ &= -\frac{1}{2 i \pi} \int_\gamma [B(B-t)^{-1}; (A-z-\lambda)^{-1}] B(B+z)^{-1} y \, dz \\ &\quad - \frac{1}{2 i \pi} \int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1} B(B-t)^{-1} B(B+z)^{-1} y \, dz \\ &= -\frac{1}{2 i \pi} \int_\gamma t(B-t)^{-1} [B; (A-z-\lambda)^{-1}](B-t)^{-1} B(B+z)^{-1} y \, dz \\ &\quad - \frac{1}{2 i \pi} \int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1} \{1 + t(B-t)^{-1}\} B(B+z)^{-1} y \, dz. \end{aligned}$$

La dernière intégrale vaut

$$-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}(A-z-\lambda)^{-1}\left\{B(B+z)^{-1}+tB\frac{(B-t)^{-1}-(B+z)^{-1}}{t+z}\right\}y\,dz$$

$$=-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\{1-t(t+z)^{-1}\}(A-z-\lambda)^{-1}B(B+z)^{-1}y\,dz,$$

à condition que γ passe « à droite » du point $z=-t$. On a donc

$$B(B-t)^{-1}V_{\lambda}y$$

$$=-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}t(B-t)^{-1}[B;(A-z-\lambda)^{-1}](B+z)^{-1}B(B-t)^{-1}y\,dz$$

$$-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_0}z(t+z)^{-1}(A-z-\lambda)^{-1}B(B+z)^{-1}y\,dz,$$

compte tenu du comportement de $z\,B\,(B+z)^{-1}\,y$ au voisinage de l'origine; de cette identité résulte la majoration

$$t^{\theta}\|B(B-t)^{-1}V_{\lambda}y\|\leqq t^{\theta}\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma}C_B(0)\varphi(|z+\lambda|;|z|)f(t)\,d|z|$$

$$+t^{\theta}\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{r}{r|\cos\theta_0|+t}\,\frac{C_A(\theta_0)}{|r\,e^{i\theta_0}-\lambda|}f(r)\,dr$$

$$\leqq C\,t^{\theta}\left\{f(t)+\int_0^{+\infty}\frac{r}{r|\cos\theta_0|+t}f(r)\frac{dr}{r}\right\},$$

grâce à H (A, B; φ); la dernière expression est de puissance p sommable pour la mesure dt/t car $t^{\theta}f$ a cette propriété du fait que $y\in D_B(\theta;p)$ et l'intégrale a la même propriété grâce au théorème de Young sur la convolution multiplicative (Loomis [31]). Ceci achève de prouver que $V_{\lambda}\,y\in D_B(\theta;p)$.

C. Q. F. D.

Une manière d'obtenir l'hypothèse supplémentaire du lemme 6.6, c'est-à-dire l'inclusion $R_{\lambda}(D_B(\theta;p))\subset D_B(\theta;p)$ est de supposer que

(6.22) $$\|[B;(A-z')^{-1}](B-z'')^{-1}\|_{\mathscr{L}(D_B(\theta;p))}\leqq C(\theta';\theta'')\varphi(|z'|;|z''|)$$

pour $\theta'=\arg z'$, $\theta''=\arg z''$, $|\theta'|<\pi-\theta_A$, $|\theta''|<\pi-\theta_B$ [12].

On peut maintenant énoncer le théorème final.

THÉORÈME 6.7. — *Soient* A *et* B *deux opérateurs fermés dans* X *vérifiant respectivement* H (θ_A) *et* H (θ_B) *avec* (6.3), *vérifiant* H (A, B; φ) *et* (6.22) *alors il existe* $\omega\geqq 0$ *tel que pour* $y\in D_B(\theta;p)$ *le problème* (6.1) *admet une unique solution stricte* x *telle que* Ax, $Bx\in D_B(\theta,p)$, $\forall\lambda\geqq\omega$.

Démonstration. — On a la solution sous la forme

$$x=S_{\lambda}(1+R_{\lambda})^{-1}y;$$

[12] C et φ ont la même signification qu'en (6.5).

grâce à (6.22), on a $(1+R_\lambda)^{-1}\, y \in D_B(\theta; p)$ pour λ assez grand; on conclut en utilisant le lemme 6.6.

6.3. On termine ce paragraphe par un résultat particulier au cas hilbertien, analogue au théorème 3.14 : on suppose donc que X est un espace de Hilbert :

THÉORÈME 6.8. — *Soient* A *et* B *deux opérateurs fermés à domaines denses dans* X *espace de Hilbert; on suppose que* A *et* B *vérifient respectivement* $H(\theta_A)$ *et* $H(\theta_B)$ *avec* (6.3) *et* $H(A, B; \varphi)$ *et* (6.22) *avec* $p = 2$ *et* $\varphi(|z+\lambda|, |z|) = O(|z|^{-1})$ *pour* λ *fixé; on suppose de plus que* D_B *est dense dans* X *et* $D_B(\theta; 2) = D_{B^*}(\theta; 2)$*; alors* L *défini par* (6.2) *est fermé et il existe* $\omega > 0$ *tel que* $\rho_L \supset]\omega; +\infty[$ *et* $(L-\lambda)^{-1} = S_\lambda(1+R_\lambda)^{-1}$.

Démonstration. — On pose $V = D_B(\theta; 2)$. Il faut essentiellement prouver que BS_λ (qui est défini sur V d'après le lemme 6.5) se prolonge en un opérateur linéaire continu dans X; pour cela, on utilisera le lemme 3.13, c'est-à-dire qu'on va vérifier que BS_λ est linéaire continu dans V et se prolonge par continuité en un opérateur linéaire continu dans V^*. La première affirmation résulte du lemme 6.5; la seconde revient à dire que $S_\lambda^* B^*$ (qui est défini sur D_{B^*}) se prolonge par continuité à V. Soit donc $y \in V = D_{B^*}(\theta; 2)$; on a pour $\theta_0 \leqq |\arg z| \leqq \pi$ l'inégalité

$$\|B^*(B^*+z)^{-1} y\| \leqq f(|z|),$$

où $t \to t^\theta f(t)$ est de carré intégrable pour la mesure dt/t et on a pour $y \in D_{B^*}$:

$$\begin{aligned}
&B^*(B^*-t)^{-1} S_\lambda^* B^* y \\
&\quad = -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma B^*(B^*-t)^{-1}(B^*+\bar{z})^{-1}(A^*-\bar{z}-\lambda)^{-1} B^* y\, d\bar{z} \\
&\quad = -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma B^*(B^*-t)^{-1}(B^*+z)^{-1}(A^*-z-\lambda)^{-1} B^* y\, dz \\
&\quad = -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma B^*\frac{(B^*-t)^{-1}-(B^*+z)^{-1}}{t+z}(A^*-z-\lambda)^{-1} B^* y\, dz \\
&\quad = +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (t+z)^{-1} B^*(B^*+z)^{-1}(A^*-z-\lambda)^{-1} B^* y\, dz,
\end{aligned}$$

pourvu que γ passe « à droite » du point $z = -t$ et tenant compte de $H(\theta_A)$ (qui est vérifié aussi par A^*). On a aussi

$$\begin{aligned}
&B^*(B^*-t)^{-1} S_\lambda^* B^* y \\
&\quad = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (t+z)^{-1}\{1-z(B^*+z)^{-1}\}(A^*-z-\lambda)^{-1} B^* y\, dz \\
&\quad = -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{z}{t+z}(B^*+z)^{-1}(A^*-z-\lambda)^{-1} B^* y\, dz \\
&\quad = -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{z}{t+z}(A^*-z-\lambda)^{-1} B^*(B^*+z)^{-1} y\, dz \\
&\qquad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{z}{t+z}[(B^*+z)^{-1}; (A^*-z-\lambda)^{-1}] B^* y\, dz.
\end{aligned}$$

On a donc

$$(6.23) \qquad B^*(B^*-t)^{-1} S_\lambda^* B^* y = a(t)+b(t),$$

avec

$$a(t) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_0} \frac{z}{z+t}(A^*-z-\lambda)^{-1} B^*(B^*+z)^{-1} y\,dz$$

et

$$b(t) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} \frac{z}{z+t}[(B^*+z)^{-1}; (A^*-z-\lambda)^{-1}] B^* y\,dz.$$

On majore a comme suit :

$$\|a(t)\| \leqq \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{r}{r|\cos\theta_0|+t}\,\frac{C_A(\theta_0)}{|r e^{i\theta_0}+\lambda|} f(r)\,dr$$

$$\leqq C\int_0^{+\infty} \frac{r}{r|\cos\theta_0|+t} f(r)\frac{dr}{r}$$

et par conséquent $t^\theta\, \|a(t)\|$ est de carré sommable pour la mesure dt/t grâce au théorème de Young déjà cité. Ensuite, on majore $b(t)$ comme suit : on écrit que

$$[(B^*+z)^{-1}; (A^*-z-\lambda)^{-1}] B^* = \{B[(A-\bar z-\lambda)^{-1}; (B+\bar z)^{-1}]\}^*,$$

où

$$B[(A-\bar z-\lambda)^{-1}; (B+\bar z)^{-1}] = -B(B+\bar z)^{-1}[B; (A-\bar z-\lambda)^{-1}](B+\bar z)^{-1},$$

il en résulte que

$$[(B^*+z)^{-1}; (A^*-z-\lambda)^{-1}] B^* = \{[B; (A-\bar z-\lambda)^{-1}](B+\bar z)^{-1}\}^* B^*(B^*+z)^{-1},$$

d'où grâce à H (A, B; φ) :

$$\|b(t)\| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{|z|}{|t+z|}\varphi(|z+\lambda|; |z|) f(|z|)\,|dz|$$

et

$$t^\theta\|b(t)\| \leqq \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^\theta r^{2-\theta}}{t+r|\cos\theta_0|}\varphi(|r e^{i\theta_0}+\lambda|; r) r^\theta f(r)\frac{dr}{r}$$

$$= \int_0^\infty K(t; r) r^\theta f(r)\frac{dr}{r},$$

où

$$K(t; r) = \frac{1}{\pi}\,\frac{t^\theta r^{2-\theta}}{t+r|\cos\theta_0|}\varphi(|r e^{i\theta_0}+\lambda|; r).$$

Par hypothèse $r^\theta f(r)$ est de carré intégrable pour la mesure dr/r et d'après un résultat de Schur (*cf.* par exemple Hardy-Littlewood-Polya [17], chap. VIII) $t^\theta\, \|b(t)\|$ est aussi de carré intégrable pour la mesure dt/t, dès que

$$\int_0^{+\infty} |K(t, r)| \frac{dr}{r} \leqq C, \qquad \forall t > 0, \tag{6.24}$$

$$\int_0^{+\infty} |K(t, r)| \frac{dt}{t} \leqq C, \qquad \forall r > 0. \tag{6.25}$$

La vérification de (6.24) et (6.25) est élémentaire car

$$\int_0^{+\infty} |K(t, r)| \frac{dr}{r} \leqq \frac{1}{\pi} \max_{r>0} \frac{t^\theta r^{1-\theta}}{t+r|\cos\theta_0|} \int_0^{+\infty} \varphi(|r e^{i\theta_0}+\lambda|\,;\, r)\, dr,$$

par hypothèse l'intégrale comportant φ converge et le maximum qui est en facteur est évidemment indépendant de t; ensuite

$$\int_0^{+\infty} |K(t, r)| \frac{dt}{t} \leqq \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{t^\theta}{t+r|\cos\theta_0|} \frac{dt}{t} r^{2-\theta} \varphi(|r e^{i\theta_0}+\lambda|\,;\, r)$$
$$\leqq L r \varphi(|r e^{i\theta_0}+\lambda|\,;\, r)$$

et on obtient la majoration (6.25) grâce à l'hypothèse supplémentaire sur φ.

En conclusion, on a prouvé que

$$t^\theta B^*(B^*-t)^{-1} S_\lambda^* B^* y$$

est de carré intégrable pour la mesure dt/t et même que

$$\int_0^{\infty} \| t^\theta B^*(B^*-t)^{-1} S_\lambda^* B^* y \|^2 \frac{dt}{t} \leqq C \int_0^{+\infty} | r^\theta f(r) |^2 \frac{dr}{r} \leqq C \| y \|_V^2$$

pour tout $y \in D_{B^*}$; comme D_{B^*} est dense dans V, cela prouve que $S_\lambda^* B^*$ se prolonge en un opérateur linéaire continu dans V, d'où la continuité de BS_λ dans X comme il a été expliqué au début de la démonstration. On en déduit la continuité de AS_λ dans X car on a

$$AS_\lambda = -BS_\lambda + \lambda S_\lambda + 1 + R_\lambda$$

sur D_B qui est dense dans X (*cf.* le lemme 6.5).

7. Application aux équations d'évolution

(seconde partie)

7.1. Ce paragraphe est consacré à l'application des résultats des paragraphes 5 et 6 dans le cas particulier où l'un des opérateurs est la dérivation dans un espace de fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles dans E comme au paragraphe 4. Les notations utilisées ici seront conformes à celles du paragraphe 4 : X sera donc l'un des espaces

$L^p(0, T; E)$, $1 \leqq p < +\infty$, ou $C(0, T; E)$ et P sera défini par

$$\begin{cases} D_P = (u \in X;\ u' \in X,\ u(0) = 0\}, \\ \qquad Pu = -u'. \end{cases}$$

L'autre opérateur sera de la forme suivante : soit $t \to \Lambda(t)$ une famille d'opérateurs linéaires fermés dans E, définis pour $t \in [0, T]$ (chacun de ces opérateurs a donc un domaine $D_{\Lambda(t)} \subset X$ et on ne suppose pas ce domaine indépendant de t, sauf dans certains énoncés particuliers). On suppose que $\rho_{\Lambda(t)} \supset]0, +\infty[$ et qu'il existe $K > 0$ tel que

$$\|(\Lambda(t)-\lambda)^{-1}\|_{\mathscr{L}(E)} \leqq \frac{K}{\lambda}, \qquad \forall \lambda > 0 \tag{7.1}$$

pour tout $t \in [0, T]$. A l'aide de cette famille d'opérateurs, on définira un opérateur dans $X = L^p(0, T; E)$ seulement sous l'hypothèse additionnelle suivante :

(7.2) L'application $t \to (\Lambda(t)-\lambda)^{-1} y$ est mesurable dans $[0, T]$ à valeurs dans E, $\forall \lambda > 0$, $\forall y \in E$.

On pose alors

$$\begin{cases} D_Q = \{u \in X;\ u(t) \in D_{\Lambda(t)}\ \text{p. p.},\ t \to \Lambda(t)u(t) \text{ est dans } X\}, \\ \qquad (Qu)(t) = \Lambda(t)u(t), \end{cases} \tag{7.3}$$

et on a la

PROPOSITION 7.1. — (i) *Sous les hypothèses* (7.1) *et* (7.2) *l'opérateur* Q *défini dans* $X = L^p(0, T; E)$, *par* (7.3) *est fermé, vérifie* $\rho_Q \supset]0, +\infty[$ *et*

$$\|(Q-\lambda)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leqq \frac{K}{\lambda}, \qquad \forall \lambda > 0;$$

(ii) *Si de plus* $D_{\Lambda(t)}$ *est dense dans* E *pour tout* $t \in [0, T]$ *alors* D_Q *est dense dans* X;

(iii) *Enfin si* $\Lambda(t) \in \mathscr{L}(E)$ *pour tout* t *et si* $\{\Lambda(t), t \in [0, T]\}$ *est borné dans* $\mathscr{L}(E)$ *alors* $Q \in \mathscr{L}(X)$.

Démonstration. — (i) Soient $v \in X$ et $\lambda > 0$, l'équation $Qu - \lambda u = v$, où $u \in D_Q$ équivaut à $\Lambda(t)u(t) - \lambda u(t) = v(t)$ p. p. c'est-à-dire à $u(t) = (\Lambda(t)-\lambda)^{-1} v(t)$ p. p. Il faut vérifier que pour $v \in X$ donné la fonction $t \to u(t) = (\Lambda(t)-\lambda)^{-1} v(t)$ est automatiquement dans D_Q : d'après (7.1) on a $u(t) \in D_{\Lambda(t)}$, $\forall t$ et on a

$$\|(\Lambda(t)-\lambda)^{-1} v(t)\|_E \leqq K\lambda^{-1} \|v(t)\|_E,$$

cette dernière majoration implique que $u \in X$ et $\|u\|_X \leqq K\lambda^{-1} \|v\|_X$ à condition de vérifier que u est mesurable : par définition de la mesurabilité selon Bochner, il existe une suite v_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ de fonctions simples qui convergent presque partout vers v lorsque $\nu \to +\infty$. Pour ν fixé, on peut écrire :

$$v_\nu(t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t) x_j,$$

où les φ_j sont des fonctions numériques mesurables et $x_j \in \mathrm{E}$, $j = 1, 2, \ldots, n$; on en déduit que

$$v_\nu(t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t)(\Lambda(t)-\lambda)^{-1} x_j$$

et par conséquent grâce à (7.2), v_ν est mesurable pour tout ν et u est donc mesurable puisque limite presque partout de la suite v_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ Le point (i) est ainsi prouvé;

(ii) Soit $u \in \mathrm{X}$, on pose

$$u_n(t) = -n(\Lambda(t)-n)^{-1} u(t)$$

pour tout t, alors

$$u_n \in \mathrm{D_Q}, \qquad \|u_n(t)\|_{\mathrm{E}} \leqq \mathrm{K}\,\|u(t)\|_{\mathrm{E}}$$

et

$$u_n(t) \to u(t) \qquad \text{lorsque} \quad n \to +\infty \text{ p. p.} \quad (\textit{cf.} \text{ le lemme } 2.10)$$

on en déduit que $u_n \to u$ dans X lorsque $n \to +\infty$ en appliquant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue;

(iii) Le point (iii) est une évidence.

C. Q. F. D.

Ensuite, à l'aide de la famille d'opérateurs considérés plus haut, on définira un opérateur dans $\mathrm{X} = \mathrm{C}(0, \mathrm{T}; \mathrm{E})$ sous l'hypothèse supplémentaire.

(7.4) L'application $t \to (\Lambda(t)-\lambda)^{-1} y$ est continue dans $[0, \mathrm{T}]$ à valeurs dans E, $\forall \lambda > 0$, $\forall y \in \mathrm{E}$.

On pose alors :

$$(7.5) \qquad \begin{cases} \mathrm{D_Q} = \{u \in \mathrm{X};\ u(t) \in \mathrm{D}_{\Lambda(t)},\ \forall t \in [0, \mathrm{T}],\ t \to \Lambda(t)u(t) \text{ est dans X}\}, \\ (\mathrm{Q}u)(t) = \Lambda(t)u(t) \end{cases}$$

et on a la

PROPOSITION 7.2. — (i) *Sous les hypothèses* (7.1) *et* (7.4), *l'opérateur* Q *défini dans* $\mathrm{X} = \mathrm{C}(0, \mathrm{T}; \mathrm{E})$ *par* (7.5) *est fermé, vérifie* $\rho_{\mathrm{Q}} \supset \,]0, +\infty[$ *et*

$$\|(\mathrm{Q}-\lambda)^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathrm{X})} \leqq \frac{\mathrm{K}}{\lambda}, \qquad \forall \lambda > 0;$$

(ii) *Si de plus* $\mathrm{D}_{\Lambda(t)}$ *est dense dans* E *pour tout* $t \in [0, \mathrm{T}]$ *et si* $-n(\Lambda(t)-n)^{-1} y \to y$, $\forall y \in \mathrm{E}$, *uniformément dans* $[0, \mathrm{T}]$, *lorsque* $n \to +\infty$, *alors* $\mathrm{D_Q}$ *est dense dans* X.

(iii) *Enfin si* $\Lambda(t) \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *pour tout* t *et si* $\{\Lambda(t);\ t \in [0, \mathrm{T}]\}$ *est borné dans* $\mathscr{L}(\mathrm{E})$, *alors* $\mathrm{Q} \in \mathscr{L}(\mathrm{X})$.

Démonstration. — Les points (i) et (iii) sont évidents. Pour démontrer le point (ii) il suffit d'approcher par des éléments de $\mathrm{D_Q}$ les fonctions de la forme $t \to \varphi(t)x$ avec $\varphi \in \mathrm{C}(0, \mathrm{T}; \mathbf{C})$ et $x \in \mathrm{E}$, car ces fonctions forment un système total dans $\mathrm{C}(0, \mathrm{T}; \mathrm{E})$: une telle fonction est limite dans C (0, T; E) des fonctions (éléments de D_Q) :

$$t \to -n\varphi(t)(\Lambda(t)-n)^{-1}x$$

lorsque $n \to +\infty$.

7.2. On va décrire ici les applications du paragraphe 5 dans le cas où A = P et B = Q définis ci-dessus; si $Lx = Ax+Bx$ pour $x \in D_L = D_A \cap D_B$, l'équation $Lu-\lambda u = f$ avec $u \in D_L$ signifie que

$$-u'(t)+\Lambda(t)u(t)-\lambda u(t) = f(t), \qquad 0<t<T, \tag{7.6}$$

avec la condition initiale

$$u(0)=0. \tag{7.7}$$

Lorsque u est solution stricte de (7.6)-(7.7) dans X, on a donc u et $u' \in X$ et lorsque u est solution forte de (7.6)-(7.7) dans X, il existe une suite u_n, $n = 1, 2$, avec u_n et $u'_n \in X$, $u_n \to u$ dans X, $u_n(0) = 0$ et $f_n \to f$ dans X, où

$$f_n(t) = -u'_n(t)+\Lambda(t)u_n(t)-\lambda u_n(t).$$

Pour vérifier l'hypothèse (5.3), on suppose en outre que

$$\|(\Lambda(t)-\lambda)^{-k}\|_{\mathscr{L}(E)} \leqq \frac{K}{\lambda^k}, \qquad \forall\lambda>0, \quad k=1, 2, \ldots \tag{7.8}$$

pour tout $t \in [0, T]$. Dans ce cas, on dira que le problème (7.6)-(7.7) est *hyperbolique*. Il est clair qu'alors

$$\|(Q-\lambda)^{-k}\|_{\mathscr{L}(X)} \leqq \frac{K}{\lambda^k}, \qquad \forall\lambda>0, \quad k=1, 2, \ldots. \tag{7.9}$$

Pour vérifier l'hypothèse de stabilité (5.6), on utilise le

LEMME 7.3. — *On suppose en outre qu'il existe* $K' > 0$ *tel que*

$$\|(\Lambda(t_1)-\lambda)^{-1}\ldots(\Lambda(t_k)-\lambda)^{-1}\|_{\mathscr{L}(E)} \leqq \frac{K'}{\lambda^k}, \qquad \forall\lambda>0 \tag{7.10}$$

pour toute famille de nombres $t_1, \ldots, t_k$ *avec* $T \geqq t_1 \geqq t_2 \geqq \ldots \geqq t_k \geqq 0$ *et pour tout* $k \in \mathbb{N}$; *alors le couple d'opérateurs* P, Q *vérifie* (5.6).

Démonstration. — On utilise l'identité

$$\{(P-\mu)^{-1}u\}(t) = -\int_0^t e^{-\mu(t-s)}u(s)\,ds,$$

d'où

$$\{(Q-n)^{-1}(P-n-\lambda)^{-1}u\}(t) = -\int_0^t e^{-(\lambda+n)(t-s)}(\Lambda(t)-n)^{-1}u(s)\,ds \tag{7.11}$$

et

$$[(Q-n)^{-1}(P-n-\lambda)^{-1}]^k u(t)$$
$$= (-1)^k \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \ldots \int_0^{s_{k-1}} e^{-(\lambda+n)(t-s_k)}$$
$$\times (\Lambda(t)-n)^{-1}(\Lambda(s_1)-n)^{-1} \ldots (\Lambda(s_{k-1})-n)^{-1} u(s_k)\, ds_k.$$

On a donc grâce à (7.10) :

$$\|[(Q-n)^{-1}(P-n-\lambda)^{-1}]^k u(t)\|_E$$
$$\leqq \frac{K'}{n^k} \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \ldots \int_0^{s_{k-1}} e^{-(\lambda+n)(t-s_k)} \|u(s_k)\|_E\, ds_k$$
$$= \frac{K'}{n^k} \int_0^t \frac{(t-s)^k}{k!} e^{-(\lambda+n)(t-s)} \|u(s)\|_E\, ds,$$

d'où (5.6) dans tous les cas.

C. Q. F. D.

On suppose maintenant que $X = L^p(0, T; E)$ avec $1 < p < +\infty$ et E réflexif. On sait (*cf.* par exemple Dieudonné [7] qu'alors X est réflexif et que $X^* = L^{p^*}(0, T; E^*)$ avec $p^* = p/(p-1)$. En vue d'appliquer le théorème 5.6, on introduit l'hypothèse suivante :

(7.12) Il existe un espace de Banach F contenu avec injection continue dans E, F dense dans E, tel que $F \subset D_{\Lambda(t)}$ et $(\Lambda(t)-\lambda)^{-1}(F) \subset F$, $\forall \lambda > 0$ pour tout t et il existe $\omega \geqq 0$ tel que $\|(\Lambda(t)-\lambda)^{-1}\|_{\mathscr{L}(F)} \leqq 1/(\lambda-\omega)$, $\forall \lambda > \omega$. On a alors le

THÉORÈME 7.4. — *On suppose que* E *est réflexif,* $1 < p < +\infty$ *et que* (7.1), (7.2), (7.10) *et* (7.12) *ont lieu; alors pour tout* $f \in L^p(0, T; E)$, *le problème* (7.6)-(7.7) *admet une solution forte unique* $u \in L^p(0, T; E)$, $\forall \lambda \in \mathbf{C}$. *Si de plus* $f \in L^p(0, T; F)$, *alors u est solution stricte* [*c'est-à-dire* $u \in W_0^{1,p}(0, T; E)$] *et* $u \in L^p(0, T; F)$.

Démonstration. — On applique donc le théorème 5.6 avec $A = P$ et $B = Q$; il suffit d'en vérifier l'hypothèse (i) si on tient compte de la remarque 5.7. Pour cela, on pose $Y = L^p(0, T; F)$, il est clair que $Y \subset D_Q$ et que Y est dense dans X et s'injecte continûment dans X. Ensuite, on a (7.11) d'où

$$\|(Q-n)^{-1}(P-n-\lambda)^{-1}\|_{\mathscr{L}(Y)} \leqq \frac{1}{(n-\omega)(\lambda+n)} \leqq \frac{1}{n(\lambda+n-\omega)}$$

et grâce à (5.5), Y est stable par $(L_n-\lambda)^{-1}$ et

$$\|(L_n-\lambda)^{-1}\|_{\mathscr{L}(Y)} \leqq \frac{1}{\lambda-\omega}$$

pour $\lambda > \omega$, ce qui prouve (5.10). Du théorème 5.6, on déduit que $\rho_{\bar{L}} \supset]\omega, +\infty[$, ce qui prouve l'existence d'une solution forte unique de (7.6)-(7.7) pour $\lambda > \omega$; cependant, on lève cette restriction sur λ en raisonnant comme dans la remarque 4.3. Le résultat de régularité dans le cas où $f \in L^p(0, T; F)$, résulte de l'application de la proposition 5.14.

Remarque 7.5. — Ceci démontre le résultat central de l'article de Kato [22] consacré à l'équation d'évolution hyperbolique.

Remarque 7.6. — Si outre (7.1), (7.2) et (7.10), on suppose qu'il existe un opérateur linéaire fermé N dans E, inversible à domaine D_N dense dans E et tel que $D_N \subset D_{\Lambda(t)}$ pour tout t, $(\Lambda(t)-\lambda)^{-1}(D_N) \subset D_N$, $\forall \lambda > 0$ pour tout t et il existe $\omega \geqq 0$ tel que

$$(7.13) \qquad \| N(\Lambda(t)-\lambda)^{-1} N^{-1} \|_{\mathscr{L}(E)} \leqq \frac{1}{\lambda-\omega}, \qquad \forall \lambda > \omega;$$

alors si on pose

$$(T u)(t) = N . u(t) \qquad \text{pour} \quad u \in D_T = L_p(0, T; D_N),$$

l'opérateur T vérifie les hypothèses de la remarque 5.8 et par conséquent les résultats du théorème 7.4 sont valables.

Remarque 7.7. — Dans le cas plus particulier où $D_{\Lambda(t)}$ est constant et où il existe $\omega \geqq 0$ avec

$$(7.14) \qquad \| \Lambda(t)\Lambda(s)^{-1} - 1 \|_{\mathscr{L}(E)} \leqq \omega \, | t-s |,$$

alors on a $(P-\lambda)^{-1}(D_Q) \subset D_Q$ et

$$\{ Q(P-\lambda)^{-1} Q^{-1} u \}(t) = -\int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \Lambda(t)\Lambda(s)^{-1} u(s)\, ds,$$

d'où

$$\| Q(P-\lambda)^{-1} Q^{-1} u(t) \|_E \leqq \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \| u(s) \|_E \, ds + \int_0^t \omega \, e^{-\lambda(t-s)} (t-s) \| u(s) \|_E \, ds$$

et

$$\| Q(P-\lambda)^{-1} Q^{-1} u \|_X \leqq \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{\omega}{\lambda^2} \right) \| u \|_X \leqq \frac{1}{\lambda-\omega} \| u \|_X.$$

Les hypothèses de la remarque 5.10 sont alors réalisées dans le cas réflexif et par conséquent les résultats du théorème 7.4 sont valables [en supposant toujours par ailleurs que (7.1), (7.2) et (7.10) ont lieu].

Dans le cas où E n'est pas réflexif, l'application du théorème 5.6 conduit à remplacer l'hypothèse (7.12) par la suivante :

(7.15) Il existe un espace de Banach F contenu avec injection continue dans E, F dense dans E, tel que $F \subset D_{\Lambda(t)^2}$ et $(\Lambda(t)-\lambda)^{-1}(F) \subset F$, $\forall \lambda > 0$ pour tout t et il existe $\omega \geqq 0$ tel que

$$\| (\Lambda(t)-\lambda)^{-1} \|_{\mathscr{L}(F)} \leqq \frac{1}{\lambda-\omega}, \qquad \forall \lambda > \omega.$$

On a alors les

THÉORÈME 7.8. — *On suppose que* (7.1), (7.2), (7.10) *et* (7.15) *ont lieu; alors pour tout* $f \in L^p(0, T; E)$, $1 \leqq p < +\infty$, *le problème* (7.6)-(7.7) *admet une solution forte unique* $u \in L^p(0, T; E)$.

THÉORÈME 7.9. — *On suppose que* (7.1), (7.4), (7.10) *et* (7.15) *ont lieu et que* $D_{\Lambda(t)}$ *est dense dans* E *pour tout* t *et*

$$-n(\Lambda(t)-n)^{-1}y \to y, \qquad \forall y \in E$$

uniformément dans $[0, T]$; *alors le problème* (7.6)-(7.7) *admet pour tout* $f \in C(0, T; E)$, *une solution forte unique* $u \in C_0(0, T; E)$.

On utilise la remarque 5.9 pour vérifier l'hypothèse (ii) du théorème 5.6; la densité de $D_B = D_Q$ dans X résulte de la densité de $L^p(0, T; F)$ dans $L^p(0, T; E)$ lorsque $X = L^p(0, T; E)$, $1 \leqq p < +\infty$ et résulte des hypothèses additionnelles lorsque $X = C(0, T; E)$.

Remarque 7.10. — Les conclusions du théorème 7.8 sont vraies si outre (7.1)-(7.2) et (7.10), on suppose qu'il existe un opérateur linéaire fermé inversible N dans E, à domaine D_N dense dans E et tel que $D_N \subset D_{\Lambda(t)^2}$ pour tout t, $(\Lambda(t)-\lambda)^{-1}(D_N) \subset D_N$, $\forall \lambda > 0$, $t \in [0, T]$ et tel que (7.13) ait lieu. On peut faire la même remarque concernant le théorème 7.9 en remplaçant (7.2) par (7.4).

Toutes ces affirmations reposent sur la remarque 5.8.

Remarque 7.11. — Dans le cas plus particulier où $D_{\Lambda(t)^2}$ est constant et où il existe $\omega \geqq 0$ tel que

$$\|\Lambda(t)^2\Lambda(s)^{-2}-1\|_{\mathscr{L}(E)} \leqq \omega|t-s|, \tag{7.16}$$

alors (7.15) a lieu.

Remarque 7.12. — Dans ce qui précède, on a obtenu $\rho_{\bar{L}} = \mathbf{C}$. Soit $t \to M(t)$ une famille d'opérateurs linéaires continus dans E vérifiant (7.2) lorsque $X = L^p(0, T; E)$ et (7.4) lorsque $X = C(0, T; E)$. On associe à cette famille un opérateur R dans X comme en (7.3) et (7.5) respectivement. Ceci posé, on peut appliquer la proposition 5.3 à $\bar{L}$ et R et par conséquent le problème

$$\begin{cases} -u'(t)+\Lambda(t)u(t)+M(t)u(t)=f(t), \\ u(0)=0, \end{cases}$$

admet une unique solution forte avec $u \in D_{\bar{L}}$.

Pour terminer, il convient de signaler ceci : dans le cas où E n'est pas réflexif, les conclusions des théorèmes 7.8 et 7.9 restent vraies même si on remplace (7.15) par (7.12). Pour cela, on utilise d'autres approximations de B que les opérateurs approchants de Yosida, comme cela a été mentionné dans le théorème 5.15 : on se borne à considérer ici le cas où $X = L^p(0, T; E)$ sous les hypothèses (7.1), (7.2), (7.10) et (7.12) : l'inclusion $F \subset D_{\Lambda(t)}$ implique que $\Lambda(t) \in \mathscr{L}(F; E)$ grâce au théorème du graphe fermé. On suppose en outre que :

(7.17) L'application $t \to \Lambda(t)$ de $[0, T]$ dans $\mathscr{L}(F; E)$ est continue. On pose alors :

$$\Lambda_n(t) = \Lambda\left(\frac{T}{n}\left[\frac{nt}{T}\right]\right) \text{ [13]}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

[13] Les crochets désignent ici la partie entière.

et

$$(7.18)\qquad \begin{cases} D_{Q_n} = \{u \in X;\ u(t) \in D_{\Lambda_n(t)} \text{ p. p.},\ t \to \Lambda_n(t)u(t) \text{ est dans } X\}, \\ (Q_n u)(t) = \Lambda_n(t)u(t). \end{cases}$$

Le lemme suivant est évident.

LEMME 7.13. — *Si* (7.10), (7.12) *et* (7.17) *ont lieu, alors* $Q_n u \to Q u$ *lorsque* $n \to +\infty$ *pour tout* $u \in Y = L^p(0, T; F)$, *uniformément sur tout borné de* Y.

On pose maintenant $L_n u = P u + Q_n u$ pour $u \in D_{L_n} = D_P \cap D_{Q_n}$ et on a le

LEMME 7.14. — *Sous les hypothèses du lemme* 7.13, L_n *est fermable et pour tout* $f \in Y$, *on a* $(\overline{L}_n - \lambda)^{-1} f \in D_P \cap Y$ *et*

$$\|(\overline{L}_n - \lambda)^{-1}\|_{\mathscr{L}(Y)} \leq \frac{1}{\lambda - \omega}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Démonstration. — Pour vérifier que L_n est fermable, on va vérifier les hypothèses du théorème 2.1 puisque D_{L_n} est dense dans X; on considère donc l'équation $L_n u - \lambda u = f$ avec $u \in D_{L_n}$; elle signifie que $u \in W_0^{1,p}(0, T; E)$ et

$$(7.19)\qquad -u'(t) + \Lambda\left(k\frac{T}{n}\right)u(t) - \lambda u(t) = f(t), \qquad \frac{k}{n}T < t \leq \frac{k+1}{n}T$$

pour $k = 0, 1, \ldots$ Comme par hypothèse $\Lambda(t)$ est un générateur infinitésimal de semi-groupe fortement continu dans E, on a nécessairement

$$(7.20)\qquad \begin{cases} u(t) = -\displaystyle\int_0^t e^{(t-s)(\Lambda(0)-\lambda)} f(s)\,ds, & 0 \leq t \leq \dfrac{T}{n} \\ u(t) = -e^{(t-k(T/n))(\Lambda(kT/n)-\lambda)}\, u\left(k\dfrac{T}{n}\right) & \\ \qquad - \displaystyle\int_{kT/n}^t e^{(t-s)(\Lambda(kT/n)-\lambda)} f(s)\,ds, & \dfrac{kT}{n} < t < \dfrac{k+1}{n}T. \end{cases}$$

pour tout k.

Grâce à (7.10) la famille des $\Lambda(k(T/n))$, $k = 0, 1, \ldots$ est stable et par conséquent du lemme 5.2 on déduit que

$$\|u\|_X \leq \frac{K'}{\lambda}\|L_n u - \lambda u\|_X$$

lorsque $u \in D_{L_n}$.

Ensuite, pour $f \in Y = L^p(0, T; F)$ la fonction u définie par (7.19) est solution stricte de (7.20) car grâce à (7.12), on a $f \in L^p(0, T; D_{\Lambda(kT/n)})$ pour tout k et d'autre part, les $\Lambda(k\,T/n)$ sont générateurs de semi-groupes fortement continus aussi dans F grâce à (7.12). On a donc

$$u \in W_0^{1,p}\left(0, \frac{T}{n}; E\right) \cap L^p\left(0, \frac{T}{n}; F\right) \cap C\left(0, \frac{T}{n}; F\right),$$

en écrivant que dans $[0, T/n]$ on a

$$u'(t) = -\int_0^t e^{(t-s)(\Lambda(0)-\lambda)}(\Lambda(0)-\lambda)f(s)\,ds - f(t),$$

donc $u' \in L^p(0, T/n; E)$ et on a aussi

$$\|u(t)\|_F \leqq \int_0^t e^{(\omega-\lambda)(t-s)}\|f(s)\|_F\,ds,$$

donc $u \in L^p(0, T/n; F)$ et enfin u est continue à valeurs dans F car convolution de $f \in L^p(0, T/n; F)$ avec $t \to e^{t(\Lambda(0)-\lambda)}$ fonction bornée à valeurs dans $\mathscr{L}(F)$. Il en résulte que $u(k\,T/n) \in F \subset D_{\Lambda(T/n)}$ et on en déduit aussitôt par les mêmes raisonnements que

$$u \in W_0^{1,p}\left(0, 2\frac{T}{n}; E\right) \cap L^p\left(0, 2\frac{T}{n}; F\right) \cap C\left(0, 2\frac{T}{n}; F\right).$$

Après un nombre fini d'étapes analogues, on obtient le résultat annoncé c'est-à-dire $u \in D_P \cap Y$. Ceci prouve entre autres que $(L_n - \lambda)(D_{L_n}) \supset Y$ donc $(L_n - \lambda)(D_{L_n})$ est dense dans X, d'où l'existence de $\overline{L}_n$ grâce au théorème 2.1.

Pour terminer la majoration de $(\overline{L}_n - \lambda)^{-1}$ dans $\mathscr{L}(Y)$ s'obtient de nouveau en appliquant le lemme (5.2) et la stabilité de la famille des $\Lambda(k\,T/n)$ dans Y, qui résulte de l'hypothèse (7.12).

C. Q. F. D.

En conclusion, toutes les hypothèses du théorème 5.15 sont vérifiées dès que (7.1), (7.2), (7.10), (7.12) et (7.17) ont lieu et par conséquent on a les conclusions du théorème 7.8 [en supposant que $K = 1$ dans (7.1) ce qui implique automatiquement (7.10) avec $K' = 1$].

Remarque 7.15. — On a vu ci-dessus dans la démonstration du lemme 7.14, que dans (7.12) la majoration $\|(\Lambda(t)-\lambda)^{-1}\|_{\mathscr{L}(F)} \leqq 1/(\lambda-\omega)$, $\lambda > \omega$, n'a servi que pour prouver que $\Lambda(t)$ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe dans F ainsi que la stabilité de la famille des $\Lambda(t)$ dans F. Par conséquent le lemme 7.14 est encore vrai si on remplace (7.12) par :

(7.21) Il existe un espace de Banach F contenu avec injection continue dans E, F dense dans E, tel que $F \subset D_{\Lambda(t)}$ et il existe $M > 0$ et $\omega \geqq 0$ tels que $(\Lambda(t)-\lambda)^{-1}(F) \subset F$ pour $\lambda > \omega$ et

$$\|(\Lambda(t_1)-\lambda)^{-1}\ldots(\Lambda(t_k)-\lambda)^{-1}\|_{\mathscr{L}(F)} \leqq \frac{M}{(\lambda-\omega)^k}$$

pour toute famille de nombres $t_1, \ldots, t_k$ avec $T \geqq t_1 \geqq t_2 \geqq \ldots \geqq t_k \geqq 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$.

Suivant les mêmes idées, on obtient dans $X = C(0, T; E)$ le

THÉORÈME 7.16. — *On suppose que* (7.1), (7.4), (7.10), (7.12) *et* (7.21) *ont lieu, que* $D_{\Lambda(t)}$ *est dense dans* E *pour tout* t *et que*

$$-n(\Lambda(t)-n)^{-1}y \to y, \qquad \forall y \in E,$$

uniformément dans $[0, T]$; *alors le problème* (7.6)-(7.7) *admet pour tout* $f \in C(0, T; E)$ *une solution forte unique* $u \in C_0(0, T; E)$.

Remarque 7.17. — *a.* L'hypothèse (7.21) est facile à vérifier lorsqu'on est dans les hypothèses de la remarque 7.7, en prenant pour F le domaine commun aux $\Lambda(t)$.

b. Si (7.14) a lieu alors :

$$\|(\Lambda(t_1)-\lambda)^{-1} \ldots (\Lambda(t_k)-\lambda)^{-1}\|_{\mathscr{L}(F)} \leqq \frac{M}{(\lambda-\omega)^k}$$

pour toute famille de nombres $t_1, \ldots, t_k$ avec $T \geqq t_1 \geqq \ldots \geqq t_k \geqq 0$ et pour tout $k \in \mathbf{N}$. En effet, pour tout $s_1, \ldots, s_k$ on a

$$\begin{aligned} \|e^{s_1 \Lambda(t_1)} \ldots e^{s_k \Lambda(t_k)}\|_{\mathscr{L}(F)} &= \|\Lambda(0) e^{s_1 \Lambda(t_1)} \ldots e^{s_k \Lambda(t_k)} \Lambda^{-1}(0)\|_{\mathscr{L}(E)} \\ &= \|\Lambda(0)\Lambda^{-1}(t_1) e^{s_1 \Lambda(t_1)} \Lambda(t_1)\Lambda^{-1}(t_2) \ldots e^{s_k \Lambda(t_k)} \Lambda(t_k)\Lambda^{-1}(0)\|_{\mathscr{L}(E)}. \\ &\leqq C e^{\omega T}, \end{aligned}$$

d'où la conclusion par transformation de Laplace.

c. Supposons que (7.14) ait lieu et que l'application

$$[0, T] \to \mathscr{L}(E) : \quad t \mapsto \Lambda(t)\Lambda(0)^{-1} y$$

soit dérivable pour tout $y \in E$, alors on a

$$\begin{cases} QPQ^{-1} = P+R, \\ (Ru)(t) = \Lambda'(t)\Lambda(t)^{-1} u(t), \quad R \in \mathscr{L}(E, E) \qquad (\textit{cf. } \text{remarque } 7.12). \end{cases}$$

R étant borné, on a $\rho_{\overline{Q+QPQ^{-1}}} = \rho_{\overline{Q+P+R}} = C$ et grâce au corollaire 5.13 le problème (7.6)-(7.7) admet pour tout $f \in L^p(0, T; D)$ où $D = D_{\Lambda(t)}$, une solution stricte (*cf.* Kato [22]).

7.3. On va décrire ici les applications du paragraphe 6 dans le cas où $A = Q$ et $B = P$ puis en invertissant les rôles des deux opérateurs. L'hypothèse essentielle à vérifier sera (6.5) et il faudra donc dans les deux cas expliciter $[B; (A-z')^{-1}](B-z'')^{-1}$: Pour cela, on utilisera les identités (formelles pour le moment) :

$$\{[P; (Q-z)^{-1}](P-z'')^{-1} u\}(t) = \left\{\frac{d}{dt}(\Lambda(t)-z')^{-1}\right\} \int_0^t e^{-z''(t-s)} u(s)\, ds \tag{7.22}$$

et

$$\{[Q; (P-z')^{-1}](Q-z'')^{-1} u\}(t) = -\int_0^t e^{-z'(t-s)} (\Lambda(s)-\Lambda(t))(\Lambda(s)-z'')^{-1} u(s)\, ds. \tag{7.23}$$

Dans une première partie, on exploitera la formule (7.22); pour cela on fait les hypothèses suivantes :

(7.24) Il existe $\theta_\Lambda \in [0, \pi/2[$ tel que $\Lambda(t)$ vérifie $H(\theta_\Lambda)$ avec une fonction $C_\Lambda(\theta)$ indépendante de $t \in [0, T]$ ([14]).

(7.25) Si $X = L^p(0, T; E)$ [resp. $X = C(0, T; E)$], la fonction $t \to (\Lambda(t) - \lambda)^{-1} y$ est élément de $W^{1,\infty}(0, T; E)$ [resp. $C^1(0, T; E)$] pour tout $y \in E$ et tout $\lambda \in \Sigma_{\theta_\Lambda}$ ([2]).

(7.26) Il existe $\alpha \in]0,1]$ tel que

$$\left\|\frac{d}{dt}(\Lambda(t)-\lambda)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(E)} \leqq \frac{C_\Lambda(\theta)}{|\lambda|^\alpha}$$

pour tout $\lambda \in \Sigma_{\theta_\Lambda}$, $\theta = \arg \lambda$.

On en déduit facilement que Q défini par (7.3) et (7.5) respectivement, vérifie $H(\theta_\Lambda)$. On sait par ailleurs que P vérifie $H(\pi/2)$, donc (6.3) a lieu. Ensuite, de (7.25) on déduit que $(Q - z')^{-1}(D_p) \subset D_p$ pour tout $z' \in \Sigma_\theta$ et enfin de (7.26) et (7.22) résulte la majoration

$$\|[P; (Q-z')^{-1}](P-z'')^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leqq \frac{K}{|\cos\theta''|}\frac{1}{|z'|^\alpha|z''|},$$

où $\arg z'' = \theta''$, pour $z' \in \Sigma_{\theta_\Lambda}$ et $z'' \in \Sigma_{\pi/2}$, et par conséquent l'hypothèse $H(A, B; \varphi)$ (du paragraphe 6) a lieu. L'application du théorème 6.3 et du lemme 6.4 conduit au

THÉORÈME 7.18. — *Sous les hypothèses* (7.24)-(7.25) *et* (7.26), *le problème* (7.6)-(7.7) *admet une solution forte unique* $u \in X$ *pour tout* $f \in X$ *et tout* $\lambda \in \mathbf{C}$, *où* X *est soit* $L^p(0, T; E)$, $1 \leqq p < +\infty$, *soit* $C_0(0, T; E)$. *De plus, si* $X = C_0(0, T; E)$, *on a* $u \in C_0^\alpha(0, T; E)$, $\forall \alpha \in [0, 1[$ *et si* $X = L^p(0, T; E)$, *on a* $u \in W_0^{\theta, p}(0, T; E)$, $\forall \theta \in]0, 1[$.

Remarque 7.19. — En fait, on a prouvé que L admet une fermeture quand $X = L^p(0, T; E)$ et $D_{\Lambda(t)}$ est dense dans E pour tout $t \in [0, T]$; dans le cas général, on a prouvé que $\rho_{\bar{L}} = \mathbf{C}$.

Remarque 7.20. — Les hypothèses faites ici sont celles de Kato-Tanabe [23] dont on retrouve ici l'essentiel des résultats [qui ne concernent que $C(0, T; E)$].

Ensuite l'utilisation du théorème 6.7 nécessite l'introduction d'une hypothèse supplémentaire :

Il existe $\eta \in]0, 1[$ tel que

$$(7.27)\qquad \left\|\frac{d}{dt}(\Lambda(t)-\lambda)^{-1} - \frac{d}{ds}(\Lambda(s)-\lambda)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(E)} \leqq \frac{C_\Lambda(\theta)|t-s|^\eta}{|\lambda|^\alpha}$$

pour $\lambda \in \Sigma_{\theta_\Lambda}$ avec $\theta = \arg \lambda$.

([14]) Σ_{θ_Λ} est toujours le secteur $\{ z \in \mathbf{C};\ -\pi + \theta_\Lambda < \theta < \pi - \theta_\Lambda \}$.

([15]) Dans ce cas, on dira que le problème (7.6)-(7.7) est *parabolique*.

THÉORÈME 7.21. — *Sous les hypothèses* (7.24), (7.25), (7.26) *et* (7.27), *le problème* (7.6)-(7.7) *admet une solution stricte unique* u, *pour tout* $f \in C_0^\eta(0, T; E)$ [*resp.* $W^{\theta, p}(0, T; E)$, $\theta < \eta$, $0 < \theta < 1/p$] *et tout* $\lambda \in \mathbf{C}$; *de plus* u, $u' \in C_0^\eta(0, T; E)$ [*resp.* $W^{\theta, p}(0, T; E)$].

Voici comment on vérifie (6.22) [dans $W^{\theta, p}(0, T; E)$ pour fixer les idées] : On pose $v = (P-z'')^{-1} u$ avec $u \in W^{\theta, p}(0, T; E)$. Alors on a

$$\begin{aligned}
&\| [P; (Q-z'')^{-1}] v \|_{W^{\theta, p}}^p \\
&= \int_0^T \left\| \left\{ \frac{d}{dt} (\Lambda(t)-z')^{-1} \right\} v(t) \right\|_E^p dt \\
&+ \int_0^T \int_0^T \left\| \left\{ \frac{d}{dt} (\Lambda(t)-z')^{-1} \right\} v(t) - \left\{ \frac{d}{ds} (\Lambda(s)-z')^{-1} \right\} v(s) \right\|_E^p \frac{dt\, ds}{|t-s|^{1+\theta p}} \\
&\leqq \left(\frac{K}{|z'|^\alpha} \right)^p \int_0^T \| v(t) \|_E^p dt + \left(\frac{K}{|z'|^\alpha} \right)^p \int_0^T \int_0^T \frac{\| v(t) \|_E^p}{|t-s|^{1+p(\theta-\eta)}} dt\, ds \\
&+ \left(\frac{K}{|z'|^\alpha} \right)^p \int_0^T \int_0^T \| v(t) - v(s) \|_E^p \frac{dt\, ds}{|t-s|^{1+\theta p}} \\
&\leqq \left(\frac{K'}{|z'|_\alpha} \right)^p \| v \|_{W^{\theta, p}}^p,
\end{aligned}$$

grâce à (7.26) et (7.27) et au fait que $\theta < \eta$. Il en résulte que

$$\| [P; (Q-z'')^{-1}] (P-z')^{-1} u \|_{W^{\theta, p}} \leqq \frac{K''}{|\cos \theta''| \cdot |z'|^\alpha |z''|} \| u \|_{W^{\theta, p}},$$

où $\theta'' = \arg z''$ pour $z' \in \Sigma_{\theta_\Lambda}$ et $\operatorname{Re} z'' > 0$. On remarque que H (A, B; φ) et (6.26) sont donc vérifiés avec

$$\varphi(|z'|; |z''|) = 0\left(\frac{1}{|z'|^\alpha |z''|} \right)$$

et par conséquent on peut aussi appliquer le théorème 6.8 dans le cas particulier où E est de Hilbert :

THÉORÈME 7.22. — *On suppose que les hypothèses* (7.24), (7.25), (7.26) *et* (7.27) *ont lieu dans* E *espace de Hilbert; alors pour tout* $f \in L^2(0, T; E)$ *et pour tout* λ *le problème* (7.6)-(7.7) *admet une unique solution stricte* $u \in W_0^{1,2}(0, T; E)$.

On va maintenant exploiter la formule (7.23); pour cela on suppose toujours que (7.24) et (7.25) sont vérifiées et on suppose de plus que :

(7.28) $D_{\Lambda(t)}$ ne dépend pas de t et il existe $K > 0$, $\alpha \in]0, 1]$ et $z_0 \in \Sigma_{\theta_\Lambda}$ tels que

$$\| (\Lambda(t) - z_0)(\Lambda(s) - z_0)^{-1} - 1 \|_{\mathscr{L}(E)} \leqq K |t-s|^\alpha, \qquad t, s \in [0, T].$$

On en déduit que $(P-z')^{-1}(D_Q) \subset D_Q$ et de (7.28) résulte la majoration

$$\begin{aligned}&\|\{[Q;(P-z')^{-1}](Q-z'')^{-1}\,u\}(t)\|_E\\&\leq \int_0^t e^{-\operatorname{Re} z'(t-s)}K|t-s|^\alpha\left\{1+C_\Lambda(\theta'')\frac{|z''-z_0|}{|z''|}\right\}\|u(t)\|_E\,dt,\end{aligned}$$

où $\theta'' = \arg z''$ d'où

$$\begin{aligned}&\|[Q;(P-z')^{-1}](Q-z'')^{-1}\|_{\mathscr{L}(E)}\\&\leq K\left\{1+C_\Lambda(\theta'')\frac{|z''-z_0|}{|z''|}\right\}\int_0^{+\infty}e^{-\operatorname{Re} z't}t^\alpha\,dt\\&= K'\left\{1+C_\Lambda(\theta'')\frac{|z''-z_0|}{|z''|}\right\}\frac{1}{(\operatorname{Re} z')^{\alpha+1}}\end{aligned}$$

et l'hypothèse H (P, Q; φ) est vérifiée avec

$$\varphi(|z'|;|z''|) = O\left(\frac{1}{|\operatorname{Re} z'|^{\alpha+1}}\right).$$

On est donc en mesure d'appliquer le théorème 6.3 et le lemme 6.4 avec $A = P$ et $B = Q$. On obtient le

THÉORÈME 7.23. — *On suppose que* (7.24), (7.25) *et* (7.28) *ont lieu; on suppose en plus que* $D_{\Lambda(t)}$ *est dense dans* E *pour tout* t. *Alors pour tout* $\lambda \in \mathbf{C}$ *et tout* $f \in L^p(0, T; E)$ [*resp.* $C(0, T; E)$], *le problème* (7.6)-(7.7) *admet une unique solution forte* $u \in L^p(0, T; D_{\Lambda(0)}(\theta; p))$ [*resp.* $C(0, T; D_{\Lambda(0)}(\theta; \infty))$] *pour tout* $\theta \in]0, 1[$.

Remarque 7.24. — Les hypothèses faites ici sont celles de Tanabe ([33], [34]).

Pour utiliser le théorème 6.8, on serait conduit à supposer que

$$\|(\Lambda(t)-z_0)(\Lambda(s)-z_0)^{-1}-1\|_{\mathscr{L}(F)} \leq K|t-s|^\alpha, \tag{7.29}$$

avec $F = D_{\Lambda(0)}(\theta; p)$; on construirait alors une solution stricte du problème (7.6)-(7.7). Cependant, on peut aussi obtenir une solution stricte sans hypothèse supplémentaire en partant des résultats du théorème 4.15 et en raisonnant par perturbation (artifice de Korn) comme suit : soit $G_\lambda : \{x, f\} \to u$ l'opérateur de Green du problème

$$\begin{cases} -u'(t)+\Lambda(0)u(t)-\lambda u(t) = f(t), & 0<t<T,\\ u(0) = x. \end{cases}$$

D'après le théorème 4.15, c'est un opérateur linéaire continu de

$$D_{\Lambda(0)}\left(\theta+1-\frac{1}{p};p\right)\times W^{\theta,p}(0, T; E)$$

dans

$$W_3 = \{u \in L^p(0, T; D_{\Lambda(0)}); u, u \in W^{\theta,p}(0, T; E)\} \qquad \text{pour } 0<\theta<\frac{1}{p}.$$

Si on cherche la solution du problème (7.6) avec la condition initiale

$$u(0) = x, \tag{7.30}$$

sous la forme $u = G_\lambda(x; h)$, on voit que h doit être solution de

$$h(t) + \{\Lambda(t) - \Lambda(0)\} G_\lambda(x; h)(t) = f(t), \qquad 0 < t < T,$$

c'est-à-dire de

$$h(t) + \{(\Lambda(t) - z_0)(\Lambda(0) - z_0)^{-1} - 1\} (\Lambda(0) - z_0) G_\lambda(x; h)(t) = f(t).$$

Cette équation est de la forme $h + \Gamma h = f$ où l'opérateur Γ est affine en h et admet dans $Y = W^{\theta, p}(0, T; E)$ la majoration

$$\| \Gamma h - \Gamma k \|_Y = O(T^{\alpha - \theta}) \| (\Lambda(0) - z_0) \{ G_\lambda(x; h) - G_\lambda(x; k) \} \|_Y,$$

à condition que $\theta < \alpha$, grâce à (7.28). Il existe donc T_0 tel que pour $T \leqq T_0$, Γ soit une contraction stricte et par conséquent l'équation $h + \Gamma h = f$ admet une solution unique. Ceci prouve que pour $x \in D_{\Lambda(0)}(\theta + 1 - (1/p); p)$ et $f \in W^{\theta, p}(0, T; E)$ donnés, le problème (7.6)-(7.7) admet une solution unique dans $[0, T_0]$ vérifiant :

$$u \in L^p(0, T_0; D_{\Lambda(0)}) \qquad \textit{et} \qquad u, u' \in W^{\theta, p}(0, T_0; E).$$

Grâce au lemme 4.14, on a alors $u(T_0) \in D_{\Lambda(0)}(\theta + 1 - (1/p); p)$, ce qui permet d'appliquer de nouveau le raisonnement précédent dans $[T_0, 2T_0]$ avec x remplacé par $u(T_0)$. Après un nombre fini d'étapes, on obtient le

THÉORÈME 7.25. — *On suppose que* (7.24), (7.25) *et* (7.28) *ont lieu et que* $D_{\Lambda(t)}$ *est dense dans* E. *Alors pour tout* $\lambda \in \mathbf{C}$, *tout* $f \in W^{\theta, p}(0, T; E)$ *et tout* $x \in D_\Lambda(\theta + 1 - (1/p); p)$ *le problème* (7.6)-(7.7) *admet une unique solution stricte* u *telle que* $u, u', \Lambda(t) u \in W^{\theta, p}(0, T; E)$, *à condition que* $0 < \theta < \inf\{\alpha; 1/p\}$.

8. Application aux équations d'ordre 2

8.1. Dans ce paragraphe, on appliquera les résultats des paragraphes 3 et 6 au cas où l'un des opérateurs est la dérivation d'ordre 2 dans un espace de fonctions à valeurs vectorielles. Précisément X sera comme précédemment l'un des espaces $L^p(0, 1; E)$, $1 \leqq p < +\infty$, $C(0, 1; E)$ et P sera défini par

$$\begin{cases} D_P = \{u \in X;\ u', u'' \in X,\ u(0) = u(1) = 0\}, \\ \qquad P u = u''. \end{cases} \tag{8.1}$$

L'autre opérateur Q sera le même qu'au paragraphe 7, soit en bref, $(Q u)(t) = \Lambda(t) u(t)$, où la famille d'opérateurs $\Lambda(t)$ vérifie (7.1) et soit (7.2) soit (7.4) selon le choix de X.

Si on pose $L u = P u + Q u$ pour $u \in D_p \cap D_Q$, l'équation $L u - \lambda u = f$ signifie alors que

$$u''(t) + \Lambda(t) u(t) - \lambda u(t) = f(t), \tag{8.2}$$

$$u(0) = u(1) = 0, \tag{8.3}$$

Il s'agit donc d'un problème de Dirichlet pour l'équation (8.2); une autre définition des conditions aux limites dans D_P conduirait à la résolution d'autres problèmes aux limites pour (8.2) (par exemple problème de Neuman ou problème avec conditions périodiques).

Avant tout il est indispensable de préciser les propriétés spectrales de P :

LEMME 8.1. — P *vérifie* H (π) *et si de plus* $X = L^p(0, 1; E)$, D_p *est dense dans* X.

Il suffira donc que Q vérifie H (φ) pour un $\varphi > 0$, pour que l'hypothèse (6.3) soit vérifiée et c'est pourquoi on considèrera cette équation comme parabolique (au sens des paragraphes 3 et 6) et non comme hyperbolique (au sens des paragraphes 3 et 5) ce qui conduirait à supposer que Q vérifie H ($\pi/2$) et serait donc plus restrictif.

Démonstration. — L'étude de ρ_P repose sur la résolution de l'équation

$$(8.4)\qquad \begin{cases} u''(t)-\lambda u(t)=f(t), \\ u(0)=u(1)=0, \end{cases}$$

où les fonctions sont à valeurs dans E. Si on pose $\rho = \sqrt{\lambda}$ et si $\operatorname{Re}\rho > 0$, on voit que l'unique solution de (8.4) s'écrit :

$$u(t) = \int_0^1 K_\rho(t, s) f(s)\, ds,$$

où

$$K_\rho(t; s) = -\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}\rho(1-t)\operatorname{sh}\rho s}{\rho \operatorname{sh}\rho}, & 0 \leqq s \leqq t, \\[2mm] \dfrac{\operatorname{sh}\rho t \operatorname{sh}\rho(1-s)}{\rho\operatorname{sh}\rho}, & t < s \leqq 1. \end{cases}$$

Il est facile de voir que pour $f \in X$, u ainsi défini est dans D_p ce qui prouve que ρ_P contient l'ouvert défini par $\operatorname{Re}\sqrt{\lambda} > 0$; il faut encore majorer $(P-\lambda)^{-1}$. Comme on a $|K_\rho(t; s)| = |K_\rho(s; t)|$, il résulte de l'inégalité de Schur citée au paragraphe 6 que

$$\|(P-\lambda)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leqq \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \int_0^1 |K_\rho(t; s)|\, ds,$$

lorsque $X = L^p(0, 1; E)$ [la même égalité est élémentaire lorsque $X = C(0, 1; E)$]. On a

$$|K_\rho(t; s)| \leqq \begin{cases} \dfrac{\operatorname{ch}(\operatorname{Re}\rho)(1-t)\operatorname{ch}(\operatorname{Re}\rho)s}{|\rho\operatorname{sh}\rho|}, & 0 \leqq s \leqq t, \\[2mm] \dfrac{\operatorname{ch}(\operatorname{Re}\rho)t\operatorname{ch}(\operatorname{Re}\rho)(1-s)}{|\rho\operatorname{sh}\rho|}, & t \leqq s \leqq 1, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 |K_\rho(t;s)|\,ds \\
&\leqq \frac{\operatorname{ch}(\operatorname{Re}\rho)(1-t)}{|\rho\operatorname{sh}\rho|}\int_0^t \operatorname{ch}(\operatorname{Re}\rho)s\,ds + \frac{\operatorname{ch}(\operatorname{Re}\rho)t}{|\rho\operatorname{sh}\rho|}\int_t^1 \operatorname{ch}(\operatorname{Re}\rho)(1-s)\,ds \\
&= \frac{\operatorname{ch}(\operatorname{Re}\rho)(1-t)\operatorname{sh}(\operatorname{Re}\rho)t + \operatorname{ch}(\operatorname{Re}\rho)t\operatorname{sh}(\operatorname{Re}\rho)(1-t)}{|\rho\operatorname{sh}\rho|\operatorname{Re}\rho} \\
&= \frac{\operatorname{sh}(\operatorname{Re}\rho)}{|\rho\operatorname{sh}\rho|\operatorname{Re}\rho} \leqq \frac{1}{|\rho|\operatorname{Re}\rho} = \frac{1}{|\lambda|\cos\theta/2}.
\end{aligned}$$

Lorsque $\theta = \arg\lambda$ et $\lambda \notin\,]-\infty, 0]$. On a donc

$$\|(P-\lambda)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leqq \frac{1}{|\lambda|\cos\theta/2}.$$

8.2. Ici on utilise le paragraphe 6 en posant $A = Q$ et $B = P$. On suppose donc que la famille $\Lambda(t)$ vérifie (7.1) et soit (7.2) soit (7.4); d'après les propositions 7.1 et 7.2 on a donc $\rho_Q \supset\,]0, +\infty[$ et

$$\|(Q-\lambda)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leqq \frac{K}{\lambda}, \qquad \forall \lambda > 0;$$

un raisonnement élémentaire basé sur l'identité classique (*cf.* Dunford-Schwartz [10]) :

$$(Q-\lambda)^{-1} = \sum_{k\geqq 0} (\lambda-\mu)^k (Q-\mu)^{-k-1} \tag{8.5}$$

pour $|\lambda-\mu|$ assez petit, implique que ρ_Q contient le secteur défini par $\arg\lambda = \theta$ et $|\operatorname{tg}\theta| < 1/K$ et que dans ce secteur, on a

$$\|(Q-\lambda)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leqq \frac{K}{|\lambda|(\cos\theta - K\sin\theta)}; \tag{8.6}$$

ceci prouve que Q vérifie H (arc tg (1/K)) et par conséquent on a (6.3).

Pour vérifier H (A, B; φ) on suppose que

(8.7) Si $X = L^p(0, 1; E)$ [resp. $X = C(0, 1; E)$], la fonction $t \to (\Lambda(t)-\lambda)^{-1}$ y est élément de $W^{2,\infty}(0, 1; E)$ [resp. $C^2(0, 1; E)$] pour tout $y \in E$ et tout $\lambda > 0$ [16].

(8.8) Il existe $\alpha \in\,]0, 1/2]$ et $N \geqq 0$ tels que

$$\left\|\frac{d}{dt}(\Lambda(t)-\lambda)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(E)} \leqq \frac{N}{\lambda^{(1/2)+\alpha}}, \qquad \forall\lambda > 0,$$

$$\left\|\frac{d^2}{dt^2}(\Lambda(t)-\lambda)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(E)} \leqq \frac{N}{\lambda^{\alpha}}, \qquad \forall\lambda > 0 \quad [17].$$

---

[16] A l'aide de (8.5) on vérifie aisément que (8.6) est vraie aussi pour tout $\lambda \in \Sigma_{\operatorname{arc\,tg}(1/K)}$.

[17] Toujours à l'aide de (8.5), on en déduit l'existence d'une fonction $\theta \to C_\Lambda(\theta)$ numérique convexe paire définie dans $]-\operatorname{arc\,tg}(1/K), +\operatorname{arc\,tg}(1/K)[$ telle que pour $\lambda \in \Sigma_{\operatorname{arc\,tg}(1/K)}$, $\theta = \arg\lambda$, on ait

$$\sqrt{|\lambda|}\left\|\frac{d}{dt}(\Lambda(t)-\lambda)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(E)} + \left\|\frac{d^2}{dt^2}(\Lambda(t)-\lambda)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(E)} \leqq \frac{C_\Lambda(\theta)}{|\lambda|^\alpha}.$$

Dans ces conditions, H (A, B; φ) a lieu avec

$$\varphi(|z'|;|z''|)=\frac{1}{|z'|^{(1/2)+\alpha}|z''|^{1/2}}+\frac{1}{|z'|^{\alpha}|z''|},$$

car

$$\begin{aligned}&\{[P;(Q-z')^{-1}]_i v\}(t)\\&=\left\{\frac{d^2}{dt^2}(\Lambda(t)-\lambda)^{-1}\right\}v(t)+2\left\{\frac{d}{dt}(\Lambda(t)-\lambda)^{-1}\right\}v'(t).\end{aligned}$$

Le théorème 6.3 et le lemme 6.4 impliquent le

THÉORÈME 8.2. — *On suppose que* (7.1), (7.2), *et* (8.8) *ont lieu, alors il existe* ω *tel que pour tout* $f \in L^p(0, 1; E)$ *le problème* (8.2)-(8.3) *avec* $\lambda > \omega$, *admette une solution forte unique* $u \in L^p(0, 1; E)$; *de plus, on a* $u \in W^{\theta+1,p}(0, 1; E)$ *pour tout* $\theta \in]0, 1[$. *Enfin, si* K = 1 *dans* (7.1), ω = 0.

Remarque 8.3. — On a prouvé que L admet une fermeture avec $\rho_{\overline{L}} \supset]0, +\infty[$ (lorsque K = 1). Il est intéressant de savoir quand $\overline{L}$ est inversible de façon à résoudre le problème (8.2)-(8.3) lorsque λ = 0. C'est possible dans certains cas :

(i) On suppose pour commencer que E est hilbertien et $p = 2$: il est alors facile de voir que $\rho_P \supset]-\pi^2; +\infty[$ et que pour $\mu \in]0, \pi^2[$, $P-\mu$ vérifie aussi H (π) (en effet P est auto-adjoint et son spectre est formé des points $-k^2\pi^2$ avec $k = 1, 2, \ldots$). Par conséquent, du théorème 6.3, on déduit lorsque K = 1 que $\omega = -\pi^2$, ce qui permet de résoudre le problème (8.2)-(8.3) avec λ = 0.

(ii) On suppose toujours que E est hilbertien, mais que $p \geqq 2$. Pour

$$f \in L^p(0, 1; E) \subset L^2(0, 1; E),$$

on sait déjà que le problème (8.2)-(8.3) avec λ = 0 admet une solution forte u dans $L^2(0, 1; E)$ qui vérifie en outre $u \in W^{1+\theta,2}(0, 1; E)$ donc $u \in L^p(0, 1; E)$ (grâce au fait que u est continue). Ceci permet de récrire (8.2) sous la forme

$$u''(t)+\Lambda(t)u(t)-\lambda u(t)=f(t)-\lambda u(t), \tag{8.9}$$

avec λ > 0; comme $f-\lambda u \in L^p(0, 1; E)$, on voit en utilisant le théorème 8.2 que u est l'unique solution forte dans $L^p(0, 1; E)$ et que $u \in W^{1+\theta,p}(0, 1; E)$ pour tout $\theta \in]0, 1[$.

(iii) On suppose maintenant que E est de Banach, toujours avec $p \geqq 2$, mais de plus on suppose que E est contenu avec injection continue dans un espace de Hilbert H, que les hypothèses (7.1), (7.2), (8.7) et (8.8) ont lieu à la fois dans E et dans H et enfin que $D_{Q_H}(\theta; p) \subset L^p(0, 1; E)$ pour un $\theta \in]0, 1[$, où Q_H est l'opérateur formé dans $L^p(0, 1; H)$ à l'aide de la famille $\Lambda(t)$ (*cf.* prop. 7.1) ([18]) : alors pour $f \in L^p(0, 1; E) \subset L^p(0, 1; H)$ il existe une unique $u \in D_{Q_H}(\theta; p)$ solution forte dans $L^p(0, 1; H)$ de (8.2)-(8.3) avec $\lambda = 0$. On a donc $u \in L^p(0, 1; E)$ et écrivant de nouveau (8.2) sous la forme (8.9) avec $\lambda > 0$, on peut appliquer le théorème 8.2 pour prouver que u est solution forte dans $L^p(0, 1; E)$ car $f - \lambda u \in L^p(0, 1; E)$.

Ensuite, pour appliquer le théorème 6.7, on suppose en outre que :

(8.10) Il existe $\eta \in]0, 1[$ tel que

$$\left\| \frac{d}{dt}(\Lambda(t)-\lambda)^{-1} - \frac{d}{ds}(\Lambda(s)-\lambda)^{-1} \right\|_{\mathscr{L}(E)} \leqq \frac{N\,|t-s|^\eta}{\lambda^{(1/2)+\alpha}}, \qquad \forall \lambda > 0,$$

$$\left\| \frac{d^2}{dt^2}(\Lambda(t)-\lambda)^{-1} - \frac{d^2}{ds^2}(\Lambda(s)-\lambda)^{-1} \right\|_{\mathscr{L}(E)} \leqq \frac{N\,|t-s|^\eta}{\lambda^{\alpha}}, \qquad \forall \lambda > 0.$$

Dans ces conditions, puisque $D_B(\theta, p) = W^{2\theta, p}(0, 1; E)$ pour $2\theta < 1/p$, l'hypothèse (6.22) est vérifiée pourvu que $2\theta < \eta$ et $2\theta < 1/p$.

Du théorème 6.7 résulte le

THÉORÈME 8.4. — *Sous les hypothèses* (7.1)-(7.2) [*resp.* (7.4)], (8.7)-(8.8) *et* (8.10), *il existe* ω *tel que le problème* (8.2)-(8.3) *admet une solution stricte unique* $u \in W^{2+\theta, p}(0, 1; E)$ [*resp.* $u \in C^{2+\eta}(0, 1; E)$] *pour tout* $f \in W^{\theta, p}(0, 1; E)$ [*resp.* $f \in C^\eta(0, 1; E)$ *avec* $f(0) = f(1) = 0$], $\theta < 1/p$ *et* $\theta < \eta$, *pour* $\lambda > \omega$.

Remarque 8.5. — Dans le cas où $f \in W^{\theta, p}(0, 1; E)$, $p > 1$, on peut lever la restriction sur λ : grâce à la remarque 8.3, le résultat du théorème 8.5 est vrai pour tout $\lambda \geqq 0$, dans certains cas.

Dans le cas particulier où E est de Hilbert, on déduit du théorème 6.8 le

THÉORÈME 8.6. — *Sous les hypothèses du théorème* 8.4 *et si* E *est de Hilbert le problème* (8.2)-(8.3) *admet une unique solution stricte* $u \in W^{2,2}(0, 1; E)$ *pour tout* $f \in L^2(0, 1; E)$ *et tout* $\lambda > \omega$, *où* $\omega = -\pi^2$ *si* $K = 1$.

Remarque 8.7. — Dans le cas particulier où $\Lambda(t)$ ne dépend pas de t, nos hypothèses se résument en l'unique hypothèse : Λ est un opérateur fermé dans E, $\rho_\Lambda \supset]0, +\infty]$ et il existe $K > 0$ tel que

$$\|(\Lambda-\lambda)^{-1}\|_{\mathscr{L}(E)} \leqq \frac{K}{\lambda}, \qquad \forall \lambda > 0.$$

([18]) Cette hypothèse est vérifiée dans la pratique par exemple si $E = L^p(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$ avec Ω ouvert borné de R^n, assez régulier, et $\Lambda(t)$ est un opérateur elliptique d'ordre $2m$; si le domaine de $\Lambda(t)$ est défini par des conditions aux limites vérifiant la condition de Shapiro-Lopatinski, alors

$$D_{Q_H} \subset L^p(0, 1; H^{2m}(\Omega)) \qquad \text{donc} \quad D_{Q_H}(\theta; p) \subset L^p(0, 1; H^{2m(1-\theta)-\varepsilon}(\Omega))$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et partant $D_{Q_H}(\theta; p) \subset L^p(0, 1; E)$ si $(1/2) - (1/p) < [2m(1-\theta)]/n$ grâce au théorème de Sobolev.

C'est précisément l'hypothèse faîte par Krein [25] (chap. III, § 2) dans son étude du problème (8.2)-(8.3) avec $\Lambda(t)$ indépendant de t. Cette hypothèse est d'ailleurs nécessaire, au moins dans le cas hilbertien, pour que le résultat de régularité du théorème 8.6 soit vrai (cette assertion se vérifie aisément en développant les fonctions en séries de sinus).

8.3. Pour terminer, on reprend l'étude précédente en intervertissant les rôles des deux opérateurs. On utilisera donc le paragraphe 6 en posant $A = P$ et $B = Q$. On sait que P vérifie $H(\pi)$ et que Q vérifie $H(\operatorname{arc\,tg}(1/K)$ et pour vérifier $H(A, B; \varphi)$, on suppose que

(8.11) $D_{\Lambda(t)}$ ne dépend pas de t et il existe $N > 0$ et $\alpha \in]0, 1]$ tels que

$$\|(\Lambda(t)-1)(\Lambda(s)-1)^{-1}-1\|_{\mathscr{L}(E)} \leqq N|t-s|^{\alpha}$$

pour $t, s \in [0, 1]$.

On a alors $D_Q = L^p(0, 1; D_{\Lambda(0)})$ ou $C(0, 1; D_{\Lambda(0)})$ selon que $X = L^p(0, 1; E)$ ou $C(0, 1; E)$ et par conséquent $(P-\lambda)^{-1}(D_Q) \subset D_Q$ pour $\lambda \in \rho_P$ et de plus on a

$$\begin{aligned}
&\{[Q; (P-z')^{-1}](Q-z'')^{-1}u\}(t)\\
&= \int_0^1 K_{\rho'}(t, s)(\Lambda(t)-\Lambda(s))(\Lambda(s)-z'')^{-1}u(s)\,ds\\
&= \int_0^1 K_{\rho'}(t; s)\{(\Lambda(t)-1)(\Lambda(s)-1)^{-1}-1\}(\Lambda(s)-1)(\Lambda(s)-z'')^{-1}u(s)\,ds,
\end{aligned}$$

où $\rho' = \sqrt{z'}$; grâce à (8.11) et à l'inégalité de Shur on en déduit que

$$\begin{aligned}
&\|[Q; (P-z')^{-1}](Q-z'')^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)}\\
&\leqq N\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 |K_{\rho'}(t; s)|\,|t-s|^{\alpha}\,ds\right)\left(1+\frac{K|z''-1|}{(\cos\theta''-K\sin\theta'')|z''|}\right)\\
&= O\left(\sup_{0\leqq t\leqq 1}\int_0^1 |K_{\rho'}(t; s)|\,.\,|t-s|^{\alpha}\,ds\right),
\end{aligned}$$

où $\theta'' = \arg z''$, grâce à (8.6).

On a

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 |K_{\rho}(t; s)|\,.\,|t-s|^{\alpha}\,ds\\
&\leqq \frac{\operatorname{ch}(\operatorname{Re}\rho)(1-t)}{|\rho\operatorname{sh}\rho|}\int_0^t [\operatorname{ch}(\operatorname{Re}\rho)s](t-s)^{\alpha}\,ds\\
&\quad+\frac{\operatorname{ch}(\operatorname{Re}\rho)t}{|\rho\operatorname{sh}\rho|}\int_t^1 [\operatorname{ch}(\operatorname{Re}\rho)(1-s)](s-t)^{\alpha}\,ds\\
&\leqq \frac{\operatorname{ch}(\operatorname{Re}\rho)(1-t)}{|\rho\operatorname{sh}\rho|}\left(\int_0^t [\operatorname{ch}(\operatorname{Re}\rho)s]\,ds\right)^{1-\alpha}\left(\int_0^t [\operatorname{ch}(\operatorname{Re}\rho)s](t-s)\,ds\right)^{\alpha}\\
&\quad+\frac{\operatorname{ch}(\operatorname{Re}\rho)t}{|\rho\operatorname{sh}\rho|}\left(\int_t^1 [\operatorname{ch}(\operatorname{Re}\rho)(1-s)]\,ds\right)^{1-\alpha}\left(\int_t^1 [\operatorname{ch}(\operatorname{Re}\rho)(1-s)](s-t)\,ds\right)^{\alpha},
\end{aligned}$$

grâce à l'inégalité de Hölder, d'où

$$\int_0^1 |K_\rho(t;s)|\,.\,|t-s|^\alpha\,ds$$
$$\leqq \frac{\operatorname{ch}(\operatorname{Re}\rho)(1-t)}{|\rho\operatorname{sh}\rho|}\left(\frac{\operatorname{sh}(\operatorname{Re}\rho)t}{\operatorname{Re}\rho}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{\operatorname{ch}(\operatorname{Re}\rho)t-1}{(\operatorname{Re}\rho)^2}\right)^\alpha$$
$$+\frac{\operatorname{ch}(\operatorname{Re}\rho)t}{|\rho\operatorname{sh}\rho|}\left(\frac{\operatorname{sh}(\operatorname{Re}\rho)(1-t)}{\operatorname{Re}\rho}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{\operatorname{ch}(\operatorname{Re}\rho)(1-t)-1}{(\operatorname{Re}\rho)^2}\right)^\alpha$$
$$\leqq \frac{\operatorname{ch}(\operatorname{Re}\rho)(1-t)\operatorname{sh}(\operatorname{Re}\rho)t+\operatorname{ch}(\operatorname{Re}\rho)t\operatorname{sh}(\operatorname{Re}\rho)(1-t)}{|\rho\operatorname{sh}\rho|(\operatorname{Re}\rho)^{1+\alpha}},$$

car $(\operatorname{ch} x-1)\leqq x\operatorname{sh} x$ pour $x\geqq 0$; on a donc

$$\int_0^1 |K_\rho(t;s)|\,.\,|t-s|^\alpha\,ds \leqq \frac{\operatorname{sh}\operatorname{Re}\rho}{|\rho\operatorname{sh}\rho|(\operatorname{Re}\rho)^{1+\alpha}} \leqq \frac{1}{|\rho|(\operatorname{Re}\rho)^{1+\alpha}},$$

d'où

$$\|[Q;(P-z')^{-1}](Q-z'')^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} = 0\left(\frac{1}{|z'|^{1+(\alpha/2)}[\cos(\theta'/2)]^{1+\alpha}}\right)$$

et l'hypothèse H (A, B; φ) est vérifiée. Du théorème 6.3 et du lemme 6.4 résulte le

THÉORÈME 8.8. — *On suppose que* (7.1)-(7.2) [*resp.* (7.4)] *et* (8.11) *ont lieu et on suppose en plus que* $D_{\Lambda(0)}$ *est dense dans* E; *alors il existe* $\omega\geqq 0$ *tel que pour* $\lambda>\omega$ *et* $f\in L^p(0,1;E)$ [*resp.* C (0, 1; E)] *le problème* (8.2)-(8.3) *admet une solution forte unique* $u\in L^p(0,1;E)$ [*resp.* C (0, 1; E)]; *de plus on a* $u\in L^p(0,1;D_{\Lambda(0)}(\theta;p))$ [*resp.* $C(0,1;D_{\Lambda(0)}(\theta;\infty))$] *pour tout* $\theta\in\,]0,1[$. *Enfin, si* (7.1) *a lieu avec* K = 1 *on a* ω = 0.

Pour utiliser le théorème 6.7, il faut supposer que

$$(8.12)\qquad \|(\Lambda(t)-1)(\Lambda(s)-1)^{-1}-1\|_{\mathscr{L}(F)}\leqq K|t-s|^\alpha$$

pour $t,s\in[0,1]$, avec $F=D_{\Lambda(0)}(\theta;q)$ et $q=p$ si $X=L^p(0,1;E)$ et $q=+\infty$ si X = C (0, 1; E).

THÉORÈME 8.9. — *Sous les hypothèses* (7.1), (7.2) [*resp.* (7.4)], (8.10) *et* (8.12) *le problème* (8.2)-(8.3) *admet une solution stricte u telle que*

$$u,\ u',\ u'',\ \Lambda(0)\,u\in L^p(0,1;D_{\Lambda(0)}(\theta;p))$$

[*resp.* $C(0,1;D_{\Lambda(0)}(\theta;\infty))$] *pour tout*

$$f\in L_p(0,1;D_{\Lambda(0)}(\theta;p))$$

[*resp.* $C(0,1;D_{\Lambda(0)}(\theta;\infty))$], $\lambda>\omega$, $\theta\in\,]0,1[$.

Enfin dans le cas particulier où E est de Hilbert, le théorème 6.8 implique le

THÉORÈME 8.10. — *Sous les hypothèses du théorème* 8.9, *si des plus* $D_{\Lambda(0)}$ *est dense dans* E *espace de Hilbert et si il existe* $\theta\in\,]0,1[$ *avec* $D_{\Lambda(0)}(\theta;2)=D_{\Lambda(0)^*}(\theta;2)$, *le problème* (8.2)-(8.3) *admet une unique solution stricte u telle que* $u,\ u',\ u'',\ \Lambda(0)\,u\in L^2(0,1;E)$ *pour tout* $f\in L^2(0,1;E)$, $\lambda>\omega$, *où* $\omega=-\pi^2$ *si* K = 1.

9. Un autre exemple

On va résoudre ici une équation des ondes abstraites; par réduction de l'ordre, on pourrait la résoudre à l'aide des résultats du paragraphe 7, point 7.2, consacré aux équations d'évolutions hyperboliques, cependant la vérification de l'hypothèse de stabilité (7.10) serait délicate et il est plus commode d'utiliser directement le théorème 5.6 et la remarque 5.10.

Les données sont les suivantes : H est un espace de Hilbert et pour tout $t \in [0, T]$, $A(t)$ est un opérateur auto-adjoint positif de domaine $D_{A(t)}$ indépendant de t, dans H. De plus, on suppose que $A(t)$ est inversible pour tout t et que

$$(9.1)\qquad \| A(s) A(t)^{-1} - 1 \|_{\mathscr{L}(H)} \leqq K \, | t-s |,$$

$$(9.2)\qquad \| A(t)^{1/2} x \|_H \leqq e^{K|t-s|} \| A(s)^{1/2} x \|_{H'}, \qquad \forall x \in D_{A(0)^{1/2}}.$$

On va résoudre l'équation

$$(9.3)\qquad u''(t) + A(t) u(t) = f(t), \qquad 0 < t < T,$$

avec les conditions de Cauchy homogènes

$$(9.4)\qquad u(0) = u'(0) = 0.$$

On effectue bien entendu la réduction de l'ordre en posant

$$\vec{u}(t) = \{ u(t); u'(t) \}, \qquad \vec{f}(t) = \{ 0; f(t) \}$$

et les équations (9.3) et (9.4) sont équivalentes à

$$(9.5)\qquad -\vec{u}'(t) + \Lambda(t) \vec{u}(t) = \vec{f}(t), \qquad 0 < t < T,$$

$$(9.6)\qquad \vec{u}(0) = 0,$$

où

$$\Lambda(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -A(t) & 0 \end{bmatrix}.$$

On prend pour X l'espace $L^p(0, T; D_{A(0)^{1/2} \times H})$, $1 < p < +\infty$, muni de la norme modifiée

$$\| \vec{u} \|_x^p = \int_0^T \| A(t)^{1/2} u_1(t) \|_H^p \, dt + \int_0^T \| u_2(t) \|_H^p \, dt.$$

On remarque que grâce à (9.2) cette norme est bien équivalente à la norme usuelle car on a

$$\int_0^T \| A(t)^{1/2} u_1(t) \|_H^p \, dt \leqq e^{KpT} \int_0^T \| A(0)^{1/2} u_1(t) \|_H^p \, dt$$
$$\leqq e^{2Kpt} \int_0^T \| A(t)^{1/2} u_1(t) \|_H^p \, dt.$$

Ensuite, comme d'habitude, on pose

$$\begin{cases} D_P = \{\vec{u} \in X;\ \vec{u}\,' \in X,\ \vec{u}\,(0) = 0\}, \\ P\vec{u} = -\vec{u}\,' \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} D_Q = L^p(0,\ T;\ D_{A(0)} \times D_{A(0)^{1/2}}), \\ (Q\vec{u})(t) = \Lambda(t)\,\vec{u}(t), \qquad 0 < t < T. \end{cases}$$

Le choix particulier de la norme fait évidemment de Q un générateur infinitésimal de groupe de contractions dans X, par contre P n'est plus générateur infinitésimal de semi-groupe de contractions car

$$(e^{hP}\vec{u})(t) = \begin{cases} \vec{u}(t-h), & h \leqq t \leqq T, \\ 0\ , & 0 \leqq t \leqq h, \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} \|e^{hP} u\|_X^p &= \int_h^T \|A(t)^{1/2} u_1(t-h)\|_H^p\,dt + \int_h^T \|u_2(t-h)\|_H^p\,dt \\ &= \int_0^{T-h} \|A(t+h)^{1/2} u_1(t)\|_H^p\,dt + \int_0^{T-h} \|u_2(t)\|_H^p\,dt \\ &= \int_0^{T-h} e^{Kph} \|A(t)^{1/2} u_1(t)\|_H^p\,dt + \int_0^{T-h} \|u_2(t)\|_H^p\,dt \\ &\leqq e^{Kph} \|\vec{u}\|_X^p. \end{aligned}$$

Ce calcul montre que $P-K$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions dans X; les hypothèses (5.3) et (5.6) sont donc vérifiées par $P-K$ et Q (avec bien sûr $A = P-K$ et $B = Q$). Le choix de p fait de X un espace réflexif donc (*cf.* remarque 5.6) l'hypothèse (ii) du théorème 5.6 est vérifiée. Quant à l'hypothèse (i) elle résultera de l'utilisation de la remarque 5.10; on a

$$(Q\,e^{hP}\,Q^{-1}\vec{u})(t) = \begin{cases} \{u_1(t-h);\ A(t)A(t-h)^{-1}u_2(t-h)\}, & h < t \leqq T, \\ \{0;\ 0\}, & 0 \leqq t \leqq h, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} \|Q\,e^{hP}\,Q^{-1}\vec{u}\|_x^p &= \int_h^T \|A(t)^{1/2} u_1(t-h)\|_H^p\,dt \\ &\quad + \int_h^T \|A(t)A(t-h)^{-1} u_2(t-h)\|_H^p\,dt \\ &= \int_0^{T-h} \|A(t+h)^{1/2} u_1(t)\|_H^p\,dt + \int_0^{T-h} \|A(t+h)A(t)^{-1} u_2(t)\|_H^p\,dt \\ &\leqq e^{Kph} \int_0^{T-h} \|A(t)^{1/2} u_1(t)\|_H^p\,dt + (1+Kh)^p \int_0^{T-h} \|u_2(t)\|_H^p\,dt \\ &\leqq e^{pKh} \|\vec{u}\|_x^p, \end{aligned}$$

grâce à (9.1) et (9.2) : on a donc

$$\| Q e^{hP} Q^{-1} \|_{\mathscr{L}(X)} \leqq e^{Kh},$$

d'où

$$\| Q(P-\lambda)^{-1} Q^{-1} \|_{\mathscr{L}(X)} \leqq \left\| \int_0^{+\infty} e^{-\lambda h} Q e^{hP} Q^{-1} \, dh \right\|_{\mathscr{L}(X)} \leqq \frac{1}{\lambda - K}.$$

Toutes les hypothèses du théorème 5.6 étant vérifiées, on a pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ et tout $\vec{f} \in X$ une solution forte $\vec{u} \in X$ de (9.5) et (9.6) et revenant à l'équation de départ, on a le

THÉORÈME 9.1. — *Sous les hypothèses* (9.1) *et* (9.2), *l'équation* (9.3) *admet pour tout* $f \in L^p(0, T; H)$ *une unique solution forte*

$$u \in W_0^{1,p}(0, T; H) \cap L^p(0, T; D_{A(0)^{1/2}}).$$

La solution forte est définie ici en traduisant pour l'équation d'ordre 2 la notion de solution forte de (9.3) dans X c'est-à-dire qu'il existe une suite u_n, $n = 1, 2, \ldots$ de fonctions vérifiant

$$u_n \in W_0^{2,p}(0, T; H) \cap W_0^{1,p}(0, T; D_{A(0)^{1/2}}) \cap L^p(0, T; D_{A(0)})$$

et

$$u_n''(t) + A(t) u_n(t) \to f(t) \quad \text{lorsque } n \to +\infty$$

dans l'espace $L^p(0, T; H) + W^{-1,p}(0, T; D_{A(0)^{1/2}})$ [19].

Remarque 9.2. — L'application du théorème 5.6 avec le second membre $\vec{f}$ le plus général dans X, fournit en fait une solution forte (dans le même sens que ci-dessus) de

$$u''(t) + A(t) u(t) = f_1'(t) + f_2(t),$$

où $f_1 \in L^p(0, T; D_{A(0)1,2})$ et $f_2 \in L^p(0, T; H)$.

Remarque 9.3. — Si on ajoute l'hypothèse supplémentaire où $D_{A(t)^{3/2}}$ est constant et

$$(9.7) \qquad \| A(s)^{3/2} A(t)^{-3/2} - 1 \|_{\mathscr{L}(H)} \leqq K |t-s|,$$

alors les résultats précédents sont encore vrais en prenant pour X soit l'espace

$$L^1(0, T; D_{A(0)^{1/2}}) \times L^1(0, T; H),$$

soit l'espace

$$C_0(0, T; D_{A(0)^{1/2}}) \times C_0(0, T; H).$$

En effet, on obtient les hypothèses (i) et (ii) du théorème 5.6 en posant $Y = D_{Q^2}$, grâce à la majoration

$$\| Q^2 e^{hP} Q^{-2} \|_{\mathscr{L}(X)} \leqq e^{Kh},$$

qui résulte cette fois de (9.1) et (9.7).

---

(19) Ce dernier espace est simplement l'espace des dérivées premières dans la direction de t, des éléments de $L^p(0, T; D_{A(0)^{1/2}})$.

Remarque 9.4. — L'hypothèse (9.2) est vérifiée dans le cas particulier où

$$|(A(t)x;\, x)-(A(s)x;\, x)| \leqq K\,|t-s|\,(A(s)x;\, x)$$

pour tout $x \in D_{A(0)}$ [20].

Elle l'est aussi évidemment lorsque

$$\| A(t)^{1/2} A(s)^{-1/2} - 1 \|_{\mathscr{L}(H)} \leqq K\,|t-s|.$$

Remarque 9.5. — Il résulte de Grisvard [11] que l'image par

$$u \to \{ u(0),\, u'(0) \}$$

de $W^{2,p}(0, T; H) \cap W^{1,p}(0, T; D_{A(0)^{1/2}}) \cap L^p(0, T; D_{A(0)})$ est exactement

$$D_{A(0)}\left(1 - \frac{1}{2p};\, p\right) \times D_{A(0)}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2p};\, p\right).$$

On en déduit pour $f \in L^p(0, T; H)$, $u_0 \in D_{A(0)}(1-(1/2)p;\, p)$ et $u_1 \in D_{A(0)}((1/2)-(1/2p;\, p)$ l'existence d'une unique solution forte

$$u \in W^{2,p}(0, T; H) \cap W^{1,p}(0, T; D_{A(0)^{1/2}}) \cap L^p(0, T; D_{A(0)})$$

pour l'équation (9.3) avec les conditions de Cauchy :

$$u(0) = u_0, \qquad u'(0) = u_1.$$

APPENDICE

ÉLÉMENTS DE THÉORIE DE L'INTERPOLATION

A.1. Les espaces d'interpolation réels peuvent être définis comme suit : par la méthode des traces introduite dans Lions [27]; Soit X, Y un couple d'espaces de Banach avec $Y \subset X$, l'injection étant continue; on désigne par $(Y; X)_{\theta,p}$ l'espace décrit par $u(0)$ lorsque u parcourt l'espace $W(p, \alpha; Y, X)$ avec $\alpha + (1/p) = \theta \in]0, 1[$, $1 \leqq p \leqq +\infty$ où $W(p, \alpha; Y, X)$ est l'espace des u qui vérifient :

$$\begin{cases} t^\alpha u \in L^p(0, +\infty; Y), \\ t^\alpha u' \in L^p(0, +\infty; X). \end{cases}$$

On munit $(Y; X)_{\theta,p}$ de la norme d'espace de Banach :

$$x \to \operatorname{Inf}\left\{\int_0^{+\infty} t^{\alpha p}\, \| u(t) \|_Y^p\, dt + \int_0^{+\infty} t^{\alpha p}\, \| u'(t) \|_X^p\, dt\right\}^{1/p},$$

où le inf. est pris par rapport à toutes les fonctions $u \in W(p, \alpha; Y, X)$ telles que $u(0) = x$.

---

[20] C'est le cas en particulier lorsque $A(t)$ est un opérateur du second ordre fortement elliptique dans un groupe x de variables d'espace, à coefficients lipschitziens en t, considéré avec $D_{A(t)} = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, Ω ouvert borné régulier de R_x^n.

Ces espaces sont d'interpolation entre Y et X dans le sens que si $\Pi \in \mathscr{L}(X)$ et si par restriction $\Pi \in \mathscr{L}(Y)$ alors $\Pi \in \mathscr{L}((Y; X)_{\theta,p})$ pour tout $\theta \in]0, 1[$ et $1 \leqq p \leqq +\infty$.

Par ailleurs, dans Lions-Peetre [30] les inclusions suivantes sont démontrées :

$$Y \subset (Y; X)_{\theta, p} \subset X$$

pour tout $\theta \in]0, 1[$, $p \in [1, +\infty]$,

$$(Y; X)_{\theta, p} \subset (Y; X)_{\omega, q},$$

pourvu que $0 < \theta \leqq \omega < 1$, $p, q \in [1, +\infty]$ ou bien pourvu que $1 \leqq p \leqq q \leqq +\infty$ si $\theta = \omega \in]0, 1[$ ([21]).

Dans le cas particulier où Y est le domaine D_A d'un opérateur linéaire fermé A dans X, muni de la norme du graphe, on pose *par définition*

$$D_A(\theta; p) = (D_A; X)_{1-\theta, p},$$

$p \in [1, +\infty]$, $0 < \theta < 1$ [l'espace ainsi introduit ne dépend que de D_A et non de A dans le sens que si $D_A = D_B$, alors $D_A(\theta; p) = D_B(\theta, p)$ algébriquement avec équivalence des normes].

On peut dans certains cas, expliciter complètement les espaces ainsi introduits. Voici les résultats connus par ordre décroissant de généralité :

(i) On suppose que $\rho_A \supset \mathbf{R}_+$ et qu'il existe C_A tel que

$$\| (A-\lambda)^{-1} \|_{\mathscr{L}(X)} \leqq \frac{C_A}{\lambda}, \qquad \lambda > 0,$$

alors $D_A(\theta, p)$ est le sous-espace de X formé des x tels que

$$\| t^{\theta} A (A-t)^{-1} x \|_X \in L^p_*,$$

où L^p_* est l'espace des fonctions boréliennes de puissance p intégrable pour la mesure dt/t sur $]0, +\infty[$ (avec la modification usuelle lorsque $p = +\infty$). Ceci est démontré dans Grisvard [11].

(ii) On suppose que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu et borné dans X, alors $D_A(\theta; p)$ est le sous-espace de X formé des x tels que

$$\| t^{-\theta} (e^{tA} - 1) x \|_X \in L^p_*.$$

Ceci est prouvé dans Lions [27].

(iii) On suppose que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe continu borné et analytique dans X, alors $D_A(\theta; p)$ est le sous-espace de X formé des x tels que

$$\| t^{1-\theta} A e^{tA} x \|_X \in L^p_*,$$

cf. Butzer-Bérens [1].

([21]) Les injections correspondant aux inclusions sont toujours continues.

(iv) Si X est de Hilbert et A auto-adjoint positif alors

$$D_A(\theta; 2) = D_{A^\theta}$$

(le domaine de la puissance θ de A) .

On peut aussi expliciter dans les mêmes hypothèses les espace $D_{A^m}(\theta; p)$: la condition sur x est dans le cas (i) :

$$\| t^{m\theta} A^m (A-t)^{-m} x \|_X \in L^p_*,$$

et dans le cas (ii) :

$$\| t^{-m\theta} (e^{tA}-1)^m x \|_X \in L^p_*.$$

Grâce à la propriété de réitération de Lions-Peetre [30], on a l'identité [en supposant vérifiée l'hypothèse du cas (i)] :

$$(D_{A^k}\,;\, D_{A^n})_{1-\theta, p} = (D_{A^m}\,;\, X)_{1-\omega, p},$$

où $0 \leqq n \leqq k \leqq m$ et $k\,\theta + n\,(1-\theta) = m\,\theta$; ceci justifie que l'on pose *par définition*

$$D_A(s; p) = D_{A^m}(\theta; p),$$

où $s = m\,\theta$, m entier $\geqq 1$, $p \in [1; +\infty]$, $\theta \in]0, 1[$. On a donc les inclusions

$$D_{A^m} \subset D_A(s; p) \subset D_A(t; q) \subset X,$$

pourvu que $m > s \geqq t > 0$, $p \in [1, +\infty]$, $q \in [1, +\infty]$ et de plus $p \leqq q$ lorsque $s = t$.

Enfin D_{A^m} est dense dans $D_A(s; p)$ si $m > s$ et $p < +\infty$.

A.2. Au paragraphe 4, on a utilisé l'espace $D_P(\theta; p)$ où X est soit L^p 0, T; E), $1 \leqq p < +\infty$ soit $C_0(0, T; E)$ soit $C(0, T; E)$, $P\,u = -u'$ et

$$D_P = \{ u \in X;\, u' \in X,\, u(0) = 0 \}.$$

On explicite l'espace $D_P(\theta; p)$ en utilisant le fait que lorsque X est soit $L^p(0, T; E)$, $1 \leqq p < +\infty$ soit $C_0(0, T; E)$, P est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu borné :

$$(e^{hP} u)(t) = \begin{cases} u(t-h), & h \leqq t \leqq T, \\ 0, & 0 \leqq t \leqq h, \end{cases}$$

on en déduit en utilisant les résultats cités plus haut que

$$(W_0^{1,p}(0, T; E);\, L^p(0, T; E))_{1-\theta, p} = \begin{cases} W^{\theta, p}(0, T; E) & \text{si } 0 < \theta < \dfrac{1}{p}, \\ W_{0,0}^{\theta, p}(0, T; E) & \text{si } \theta = \dfrac{1}{p}, \\ W_0^{\theta, p}(0, T; E) & \text{si } \dfrac{1}{p} < \theta < 1. \end{cases}$$

(*cf.* aussi Lions-Magenes [29]) et que

$$(C_0^1(0, T; E); C_0(0, T; E))_{1-\theta, \infty} = C_0^\theta(0, T; E).$$

Dans le cas où $X = C(0, T; E)$, il est un peu plus délicat d'expliciter $D_P(\theta; \infty)$: par prolongement et restriction, on voit que $D_P(\theta; \infty)$ est inclus dans l'espace des restrictions à $[0, T]$ des éléments de $(\tilde{Y}; \tilde{X})_{1-\theta, \infty}$ où $\tilde{X}$ est l'espace des fonctions continues définies dans $\mathbf{R}$ à valeurs dans E et qui tendent vers zéro à l'infini, muni de la norme du maximum et $\tilde{Y} = \{ u \in \tilde{X}; u' \in \tilde{X} \}$. Il est clair que $\tilde{Y}$ est le domaine du générateur infinitésimal du groupe (fortement continu) des translations dans $\tilde{X}$ et par conséquent $(\tilde{Y}; \tilde{X})_{1-\theta, \infty}$ est le sous-espace de $\tilde{X}$ formé des u tels que

$$\max_{t \geqq 0} \max_{x \in \mathbf{R}} t^{-\theta} |u(x+t) - u(x)| < +\infty;$$

donc les fonctions de $(\tilde{Y}; \tilde{X})_{1-\theta, \infty}$ sont höldériennes d'exposant θ et par restriction on a

$$D_P(\theta; \infty) \subset C_0^\theta(0, T; E).$$

[Les éléments de $D_P(\theta, \infty)$ s'annulent en zéro car on a $D_P(\theta, \infty) \subset D_P(\omega; 1)$ si $0 < \omega < \theta$, D_P est dense dans $D_P(\omega; 1)$ pour une norme plus fine que la norme du maximum et par définition les éléments de D_P s'annulent en zéro.] Réciproquement, on a

$$C_0^\theta(0, T; E) \subset D_P(\theta; \infty)$$

car il est évident que

$$(C_0^1(0, T; E); C_0(0, T; E))_{1-\theta, \infty} \subset D_P(\theta; \infty).$$

En conclusion, on a $D_P(\theta; \infty) = C_0^\theta(0, T; E)$ aussi dans le cas où $X = C(0, T; E)$.

Au paragraphe 4, on a également utilisé l'espace $D_Q(\theta; p)$ où X est comme ci-dessus et $D_Q = L^p(0, T; D_\Lambda)$, $C_0(0, T; D_\Lambda)$ ou $C(0, T; D_\Lambda)$ respectivement avec Λ opérateur fermé dans E, $\rho_\Lambda \supset \mathbf{R}_+$ et

$$\|(\Lambda - \lambda)^{-1}\|_{\mathscr{L}(E)} \leqq \frac{C_\Lambda}{\lambda}, \qquad \forall \lambda > 0.$$

L'opérateur Q qui est défini par $(Q u)(t) = \Lambda u(t)$ pour $u \in D_Q$ vérifie la même hypothèse dans X, ce qui permet d'expliciter $D_Q(\theta; p)$ en utilisant les résultats cités plus haut : si pour fixer les idées on suppose que $X = L^p(0, T; E)$, $D_Q(\theta; p)$ est le sous-espace de X formé des u tels que

$$\|t^\theta Q(Q-t)^{-1} u\|_X \in L_*^p,$$

c'est-à-dire que

$$\int_0^{+\infty} \int_0^T \|t^\theta \Lambda(\Lambda - t)^{-1} u(x)\|_E^p \, dx \frac{dt}{t} < +\infty,$$

et grâce au théorème de Fubini, c'est encore l'espace

$$L_P(0, T; D_A(\theta; p)).$$

On raisonne de la même manière pour montrer que $D_P(\theta; \infty)$ est $C_0(0, T; D_A(\theta; \infty))$ [resp. $C(0, T; D_A(\theta; \infty))$] selon que X est $C_0(0, T; E)$ [resp. $C(0, T; E)$].

A.3. Au paragraphe 8, on a utilisé $D_P(\theta; p)$ où X est soit $L^p(0, 1; E)$ $1 \leqq p < +\infty$, soit $C(0, 1; E)$, $P u = u''$,

$$D_P = \{ u \in X;\ u',\ u'' \in X,\ u(0) = u(1) = 0 \}.$$

Lorsque $X = L^p(0, 1; E)$ l'espace $D_P(\theta; p)$ est explicité complètement dans Grisvard [12] (§ 7), c'est le sous-espace de $W^{2\theta, p}(0, 1; E)$ défini par $u(0) = u(1) = 0$ si $2\theta > 1/p$ [22] et

$$\int_0^1 \| u(x) \|_E^p \frac{dt}{t(1-t)} < +\infty,$$

si $2\theta = 1/p$; enfin, lorsque $2\theta < 1/p$, c'est l'espace $W^{2\theta, p}(0, 1; E)$ entier et on a utilisé seulement ce résultat particulier qui peut se démontrer directement assez simplement comme suit : par prolongement et restriction $D_P(\theta; p)$ est inclus dans l'espace des restrictions à [0, 1] des fonctions de $(W^{2, p}(\mathbf{R}; E); L^p(\mathbf{R}; E))_{1-\theta, p}$; comme $W^{2, p}(\mathbf{R}; E)$ est le domaine du carré du générateur infinitésimal du groupe des translations dans $L^p(\mathbf{R}; E)$ on voit en appliquant les résultats cités plus haut que

$$(W^{2, p}(\mathbf{R}; E); L^p(\mathbf{R}, E))_{1-\theta, p} = W^{2\theta, p}(\mathbf{R}; E).$$

On en déduit que $D_P(\theta; p) \subset W^{2\theta, p}(0, 1; E)$. Cependant, on a lorsque $2\theta < 1/p$ l'identité

$$(W_0^{2, p}(0, 1; E); L^p(0, 1; E))_{1-\theta, p} = W^{2\theta, p}(0, 1; E), \tag{A.1}$$

d'où résulte que $D_P(\theta, p) = W^{2\theta, p}(0, 1; E)$ puisque $W_0^{2, p}(0, 1; E) \subset D_P$. Pour démontrer (A.1) en raisonnant par prolongement et restriction, il suffit de vérifier l'identité

$$(W_0^{2, p}(0, +\infty; E);\ L^p(0, +\infty; E))_{1-\theta, p} = W^{2\theta, p}(0, +\infty; E),$$

qui découle des résultats cités plus haut car $W_0^{2, p}(0, +\infty; E)$ est le domaine du carré du générateur infinitésimal du semi-groupe G défini dans $L^p(0, +\infty; E)$ par

$$G(t) u(x) = \begin{cases} u(x-t) & t \leqq x < +\infty, \\ 0, & 0 \leqq x < t. \end{cases} \tag{A.2}$$

Enfin, lorsque $X = C(0, 1; E)$ on a

$$D_P(\theta; \infty) = \{ u \in C^{2\theta}(0, 1; E);\ u(0) = u(1) = 0 \},$$

(22) Avec $2\theta \neq 1$.

pourvu que $2\theta \neq 1$. En effet, on a $D_P(\theta; \infty) \subset C^{2\theta}(0, 1; E)$ car $D_P(\theta; \infty)$ est formé de restrictions à $[0, 1]$ de fonctions de $(\tilde{Z}; \tilde{X})_{1-\theta, \infty}$ où $\tilde{X}$ est comme en A.2 l'espace des fonctions continues définies dans $\mathbf{R}$ à valeurs dans E et tendant vers zéro à l'infini et $\tilde{Z} = \{ u \in \tilde{X}; u', u'' \in \tilde{X} \}$; $\tilde{Z}$ est donc le domaine du carré du générateur infinitésimal du groupe des translations dans $\tilde{X}$. De la théorie générale, on déduit donc que $(\tilde{Z}; \tilde{X})_{1-\theta, \infty} = C^{2\theta}(\mathbf{R}; E)$ d'où $D_P(\theta; \infty) \subset C^{2\theta}(0, 1; E)$. Ensuite, on vérifie que $u(0) = u(1) = 0$ pour $u \in D_P(\theta; \infty)$ car D_P est dense dans $D_P(\theta; \infty)$ pour la norme du maximum. On a donc ainsi l'inclusion

$$D_P(\theta; \infty) \subseteq \{ u \in C^{2\theta}(0, 1; E); u(0) = u(1) = 0 \}.$$

Pour montrer l'inclusion inverse, il suffit de remarquer que pour $0 < \theta < 1/2$, on a

$$\begin{aligned} &\{ u \in C^{2\theta}(0, 1; E); u(0) = u(1) = 0 \} \\ &= (\{ u \in C^2(0, 1; E); u(0) = u'(0) = u''(0) = u(1) = u'(1) = u''(1) = 0 \}; \\ &\qquad \{ u \in C(0, 1; E); u(0) = u(1) = 0 \})_{1-\theta, \infty}, \end{aligned}$$

ce qui, par restriction et prolongement, résulte de

$$C_0^{2\theta}(0, 1; E) = (C_0^2(0, 1; E); C_0(0, 1; E))_{1-\theta, \infty},$$

identité qui se démontre en utilisant le semi-groupe G défini en (A.2). On n'a pas utilisé au paragraphe 8 le résultat correspondant avec $1 > \theta > 1/2$.

Un exposé complet des techniques d'interpolation utilisées ici, se trouve aussi dans Grisvard [14].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BUTZER-BERENS, *Semi Groups of Operators and Approximation*, Springer-Verlag, Band 145.

[2] CHERNOF, *Perturbation of Dissipatice Operators with Relative Bound One* (*Proceedings Amer. Math. Soc.*), vol. 33, 1972, p. 72-74).

[3] DA PRATO, *Alcune proprietà della somma di applicazioni lineari in spazi di Banach* (*Conferenze del Seminario di Mat della Università di Bari*, no 119, 1969).

[4] DA PRATO, R *semigrupi ed equazioni di evoluzione in* L_p (*Ricerche di Mat.*, vol. 19, 1967, p. 233-249).

[5] DA PRATO, *Weak Solutions for Linear Abstract Differential Equations in Banach Spaces* (*Advances in Math.*, vol. 5, n° 2, 1970, p. 181-245).

[6] DA PRATO, *Somma di generatori infinitesimali di semi-gruppi di contrazioni in spazi di Banach riflessivi* (*Bolettino della U. M. I.*, vol. 1, 1968, p. 138-141).

[7] DIEUDONNÉ, *Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym V* (*Canad. J. Math.*, vol. 3, 1951, p. 129-139).

[8] DUBINSKI, *On an Abstract Theorem and its Appications to Boundary Value Problems for Non-Classical. Equations* (*Math. Sbornik*, vol. 79 (121), 1969, p. 91-117 (traduction : *Math. U. S. S. R. Sbornik*, vol. 8, 1969, p. 87-113).

[9] DUBINSKI, *On Some Differential Operator Equations of Arbitrary Order* [*Math. Sbornik*, vol. 90, (132), 1973 (traduction : *Math. U. S. S. R. Sbornik*, vol. 19, 1973, p. 1-21].

[10] DUNFORD-SCHWARTZ, *Linear Operators*, part I, Interscience Publications.

[11] GRISVARD, *Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications* (*J. Math. pures et appl.*, t. 45, 1966, p. 143-290).

[12] GRISVARD, *Équations différentielles abstraites* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, t. 2, fasc. 3, 1969, p. 311-395).

[13] GRISVARD, *Espaces intermédiaires entre espaces de Sobolev avec poids* (*Annali della S. N. S. di Pisa*, 3e série, 17, fasc. 3, 1963, p. 255-296).

[14] GRISVARD, *Spazi di tracce ed applicazioni* (*Rendiconti di Matematica*, (4), vol. 5, série VI, 1972, p. 657-729).

[15] GRISVARD, *Équations opérationnelles abstraites dans les espaces de Banach et problèmes aux limites dans des ouverts cylindriques* (*Annali S. N. S. di Pisa*, 3e série, t. 21, 1967, p. 307).

[16] GUSTAVSON, *A perturbation lemma* (*Bulletin Amer. Math. Soc.*, vol. 72, 1966, p. 334-338).

[17] HARDY-LITTLEWOOD-POLYA, *Inequalities*, Cambridge University Press.

[18] HILLE-PHILLIPS, *Functional Analysis and Semi-Groups* (*A. M. S. Colloquium Publication*, 1957).

[19] IANNELLI, *Alcuni risultati di esistenza e regolarità per il probelma di Cauchy astratto nel caso iperbolico* (*Publications de l'Ist. Mat. G. Castelnuovo*, Roma).

[20] KATO, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, vol. 132).

[21] KATO, *Semi-Groups and Temporally Inhomogeneous Evolution Equations*, C. I. M. E. 1° ciclo, 1963).

[22] KATO, *Linear Evolution Equations of Hyperbolic Type* (*J. Fac. University Tokyo*, section 1, vol. 17, 1970, p. 241-258).

[23] KATO-TANABE, *On the Abstract Evolution Equations* (*Osaka Math. J.*, vol. 14, 1962, p. 107-133).

[24] KRASNOSELSKI, *Topological Methods in the Theory of Non-Linear Integral Equations*, Pergamon Press.

[25] KREIN, *Linear Differential Equations in Banach Spaces*, Moscou, 1967.

[26] KURTZ, *Extension of Trotter's Operator Semi-Group Approximation Theorem* (*J. Funct. Anal.*, vol. 3, 1969, p. 354-375).

[27] LIONS, *Théorèmes de trace et d'interpolation*, I et II (*Annali S. N. S. di Pisa*, vol. 13, 1959, p. 389-403 et 14, 1960, p. 317-331).

[28] LIONS-MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, Paris, 1968.

[29] LIONS-MAGENES, *Problemi al contorno non omogenei* III, (*Annali S. N. S. di Pisa*, vol. 15, 1961, p. 39-101).

[30] LIONS-PEETRE, *Sur une classe d'espaces d'interpolation* (*Publications de l'I. S. H. E.*, vol. 19, 1964, p. 5-68).

[31] LOOMIS, *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis*, Van-Nostrand, 1953).

[32] LUMER-PHILLIPS, *Dissipative Operators in a* B-*Space* (*Pac. J. Math.*, vol. 11, 1961, p. 679-698).

[33] TANABE, *On the Equations of Evolution in a Banach Space* (*Osaka Math. J.*, vol. 12, 1960, p. 363-376).

[34] TANABE, *Evolutional Equations of Parabolic Type* (*Proc. Japan Acad. Sc.*, vol. 37, 1961, p. 610-613).

[35] YOSIDA, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, vol. 123.

(Manuscrit reçu le 14 janvier 1975.)

G. DA PRATO,
Istituto matematico G. Castelnuovo,
Università degli studi,
Roma;

P. GRISVARD,
I. M. S. P.,
parc Valrose,
Nice.