Contrôle

Licence SPI - Semestre 1 - 2016-17

Lundi 14 novembre 2016 - 8h-10h

Exercice 1 (Nombres complexes)**.**

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-(1+i)z+13i=0$.
   (b) Déterminer les solutions imaginaires pures (z de la forme $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$) de l'équation $z^3 - z^2 + (12i + 1)z - 13 = 0$.
2. Soit $z = \sqrt{2} - i\sqrt{6}$.
   (a) Donner le module et l'argument de z.
   (b) Trouver tous les $w \in \mathbb{C}$ vérifiant $w^3 = z$. On cherchera w sous la forme $w = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$.

Exercice 2 (Géométrie plane)**.** On se place dans le plan. On considère la famille de droites $\{D_m,\ m \in \mathbb{R}\}$ d'équations paramétriques

$$D_m : \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2 + (1-m)t \\ y & = & -1 + (1+m)t \end{array} \right. , \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que les droites D_m, $m \in \mathbb{R}$, passent toutes par un même point A que l'on déterminera.
2. Soit $m \in \mathbb{R}$. Donner un vecteur directeur de la droite D_m ainsi qu'une équation cartésienne de D_m.
3. Soit $m \in \mathbb{R}$. Calculer la distance entre le point B de coordonnées $(4, -3)$ et la droite D_m.
4. Soit $\mathscr{C}$ le cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 23 = 0$.
   (a) Trouver le centre et le rayon du cercle $\mathscr{C}$.
   (b) Trouver $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ tels que $\mathscr{C} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; z = x + iy \text{ vérifie } |z - a| = r\big\}$

Exercice 3 (Géométrie dans l'espace)**.** On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$ euclidien. Donner l'équation cartésienne du plan passant par les trois points de coordonnées $(1, 1, 2)$, $(-1, -1, 0)$ et $(0, 1, 4)$.