Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Courbes et fonctions

2016–17, Licence SPI

Sommaire

1 Nombres complexes

Exercice 1. Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants, et placer les dans le plan complexe:

1 - $(3+2i)(1-i)-(2-i)^2+(5-i)(5+i)$

2 - i^9

3 - $(1+i)^5$

4 - $\dfrac{5-2i}{2-3i}$

5 - $\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^2}{(3+2i)^2-(1+i)^2}$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1 - $(z-i)(z+i)=z^2-3$

2 - $z+\bar{z}-4=0$

3 - $z-\bar{z}+3=0$

4 - $iz+(2+4i)\bar{z}=1$

Exercice 3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que:

1 - $\dfrac{z+2i}{z-4i}\in\mathbb{R}$

2 - $(iz-z)(\bar{z}-1)$ est un imaginaire pur.

Exercice 4. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$,

$$(1+i)^n-(1-i)^n$$

est un imaginaire pur.

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1 - $z+|z|=3-4i$

2 - $2z^2=3|z|^2+1$

3 - $2\bar{z}+i=1+|z|^2$

Exercice 6. Trouver l'ensemble des points M du plan d'affixes z vérifiant:

1 - $\dfrac{z+2}{z-5}$ est imaginaire pur.

2 - $z+\bar{z}=|z|$.

3 - les points d'affixe i, z et iz sont alignés

4 - $|z| = |1-z|$.

Exercice 7. Soit z et z' deux nombres complexes de module 1, tels que $z+z' \neq 0$. Montrer que

$$\frac{1+zz'}{z+z'} \in \mathbb{R}.$$

Exercice 8. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants, et placer les dans le plan:

1 - $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

2 - $4e^{i\frac{5\pi}{6}}$

3 - $-2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice 9. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants, et placer les dans le plan:

1 - $-4+4i$

2 - $1-i\sqrt{3}$

3 - $-3-i\sqrt{3}$.

Exercice 10. Mettre $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{20}$ sous forme algébrique.

Exercice 11. Mettre sous forme trigonométrique les racines $n^{ièmes}$ du nombre complexe Z, et tracer les dans le plan:

1 - $Z=-32$, $n=5$

2 - $Z=1+i$, $n=3$

3 - $Z=-8\sqrt{3}-8i$, $n=8$.

Exercice 12. Calculer les racines carrées de Z:

1 - $Z=i$

2 - $Z=5-12i$

3 - $Z=-\sqrt{3}+i$.

Exercice 13. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1 - $-z^2+5z-7=0$

2 - $(1-i)z^2-2(3-2i)z+9-7i=0$

3 - $z^2-(4+2i)z+3-2i=0$

4 - $z^2+iz+1=0$

5 - $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$.

Exercice 14. On considère l'équation

$$z^3 - 6z^2 + (12 + 2i)z - 8 - 4i = 0.$$

1 - Chercher une solution réelle.

2 - Résoudre l'équation.

Exercice 15. Calculer $\sin 8x$ en fonction de $\sin x$.

Exercice 16. Linéariser:

1 - $\cos^4 x$

2 - $\cos^2 x \sin^4 x$.

Exercice 17. Mettre sous forme d'un produit d'expressions de la forme $\cos ax$ ou $\sin bx$:

1 - $\sin^2 2x - \sin^2 3x$

2 - $\cos^2(x - \frac{\pi}{4}) - \cos^2(2x + \pi)$

3 - $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$.

Exercice 18. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes:

1 - $-\sin x - \cos x = \frac{3}{2}$

2 - $\sqrt{3} \cos 3x + \sin 3x = 1$

3 - $\sin 2x > \sin 3x$

4 - $2 \cos x + \sin x < \frac{1}{2}$.

2 Géométrie dans le plan

Exercice 19. On considère les droites $D : x + 2y = 5$ et $D' : 3x - y = 1$ et on note A l'intersection des deux droites et B le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1 - Donner une équation de la droite (AB).

2 - Donner une équation de la perpendiculaire à D passant par B.

3 - Donner une équation de la parallèle à D' passant par B.

4 - Soit C le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$. Donner une équation de la médiatrice Δ du segment $[B, C]$. Δ est-elle parallèle à D ? Et à D' ?

Exercice 20. On considère la famille des droites $D_\lambda : x + \lambda y + 1 = 0$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

1 - Vérifier que ces droites passent toutes par un même point A dont on donnera les coordonnées.

2 - Parmi toutes ces droites, y en a-t-il une qui est verticale ? Si oui donner une équation de cette droite.

3 - Parmi toutes ces droites, y en a-t-il une qui est horizontale ? Si oui donner une équation de cette droite.

4 - Parmi toutes ces droites, y en a-t-il qui sont parallèles, confondues ou perpendiculaires à la droite Δ d'équation $2x - 3y + 1 = 0$? Si oui donner des équations de ces droites.

Exercice 21. Calculer la distance du point A à la droite D dans les cas suivants:

1 - $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $D : 2x + y - 1 = 0$

2 - $A\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $D : 3x - 2y + 4 = 0$

3 - $A\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ et $D : -x + 3y + 2 = 0$.

Exercice 22. Soient A_m le point de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ $(m \in \mathbb{R})$ et B le point de coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$. Soit $\mathcal{D}_m$ la droite d'équation $mx + (1-m)y + 1 = 0$.

1 - Donner une équation de la droite (A_mB).

2 - Déterminer les valeurs de m pour lesquelles $\mathcal{D}_m$ et (A_mB) sont parallèles.

3 - Déterminer les valeurs de m pour lesquelles $\mathcal{D}_m$ et (A_mB) sont orthogonales.

4 - Calculer la distance de B à $\mathcal{D}_m$.

Exercice 23. Si a et b sont les affixes de deux sommets opposés d'un carré, calculer les affixes des deux autres.

Exercice 24. Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que les points d'affixes z, z^2, z^4 soient alignés.

Exercice 25. Soient A le point de coordonnées $\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$ et B le point de coordonnées $\begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$.

1 - Donner une équation (D) de la droite (AB).

2 - Donner une équation (C) du cercle de diamètre $[AB]$.

3 - Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $(C) + \lambda(D)$ est l'équation d'un cercle passant par A et B.

4 - En déduire une équation du cercle circonscrit au triangle OAB.

Exercice 26. Calculer les angles:

1 - entre les vecteurs $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$,

2 - entre les vecteurs $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 \begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 \\ \sqrt{2}+2 \end{pmatrix}$,

3 - du triangle de sommets $A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 27. On considère dans le plan les deux droites

$$D : 3x + y = 5 \text{ et } D' : x - 2y + 3 = 0.$$

Quel est l'angle entre ces deux droites ?

Exercice 28. Soient A le point d'affixe 1, B le point d'affixe $1+i$ et C le point d'affixe i. Soient M un point de la droite (BC) et N le point d'intersection de la droite (AB) et de la perpendiculaire à (OM) passant par O. On note I le milieu de $[MN]$. Déterminer le lieu des points I lorsque M décrit la droite (BC).

Exercice 29. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{1}{5}(-3x - 4y), \frac{1}{5}(-4x + 3y - 2) \right).$$

Réécrire f en utilisant des notations matricielles. Interpréter f géométriquement.

Exercice 30. On considère les cercles

$$\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 - 4r^2 = 0$$

où $r \in \mathbb{R}$. Déterminer les valeurs de r pour lesquelles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont tangents. Dans ce cas, déterminer les coordonnées du point de tangence, et donner une équation de la tangente commune.

3 Géométrie dans l'espace

Exercice 31. Les quatre points A, B, C et D de l'espace sont-ils coplanaires ? Si oui, donner une équation du plan qui les contient :

1 - $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $D \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2 - $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $D \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3 - $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $D \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 32. Trouver une équation du plan P défini par les éléments suivants.

1 - A, B et C sont des points de P

a) $A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

b) $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$.

c) $A\begin{pmatrix}5\\0\\-1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-2\\4\\5\end{pmatrix}$.

2 - A est un point de P, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de P

a) $A\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$.

b) $A\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\4\\5\end{pmatrix}$.

3 - A est un point de P, D est une droite contenue dans P

a) $A\begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix}$ et $D : \begin{cases} x+y-z+3=0 \\ 4x-y+2z=0 \end{cases}$

b) $A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $D : \begin{cases} x=t \\ y=-1+2t \\ z=1-3t \end{cases}$

4 - D et D' sont des droites contenues dans P

a) $D : \begin{cases} x+y-z+3=0 \\ x-y-2=0 \end{cases}$ et $D' : \begin{cases} 3x-y-z+5=0 \\ x+y-z+1=0 \end{cases}$

b) $D : \begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ x+3y+z-4=0 \end{cases}$ et $D' : \begin{cases} 2x+y-3z+7=0 \\ 3x+2y+z-1=0 \end{cases}$

Exercice 33. Les plans suivants sont-ils parallèles ou sécants? Dans ce dernier cas, donner un vecteur directeur de la droite $D = P \cap P'$.

1 - $P : 5x-y-1=0$ et $P' : z=3$.

2 - $P : x+y+z+1=0$ et $P' : 2x-y+3z+2=0$.

3 - $P : 2x-z+1=0$ et $P' : 4x-3y+2z+5=0$.

4 - $P : 4x-6y+8z-1=0$ et $P' : -6x+12y-9z+11=0$.

Exercice 34. Les droites suivantes sont-elles sécantes, parallèles ou non coplanaires ? Si elles sont sécantes donner leur point d'intersection et si elles sont parallèles donner un vecteur directeur.

1 - $D : \begin{cases} x+y-z+2=0 \\ x+y+z+1=0 \end{cases}$ et $D' : \begin{cases} 3x-y+2z-7=0 \\ x-y=0 \end{cases}$

2 - $D : \begin{cases} x=1-2t \\ y=t+2 \\ z=3t+1 \end{cases}$ et $D' : \begin{cases} x=3t-1 \\ y=-t+2 \\ z=2t \end{cases}$

Exercice 35. Dans chacun des cas suivants dire si la droite D et le plan P sont parallèles ou sécants. Donner alors leur point d'intersection.

1 - $D : \begin{cases} 5x-3y+2z-5=0 \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$ et $P : 4x-3y+7z-7=0$.

2 - $D : \begin{cases} x=3+2t \\ y=5-3t \\ z=2-2t \end{cases}$ et $P : -3x+2y+3z-5=0$.

Exercice 36. On considère les quatre points suivants: $A(2,0,0)$, $B(-1,\sqrt{3},0)$, $C(-1,-\sqrt{3},0)$, $D(0,0,4)$. Déterminer un vecteur directeur de la droite $(ABC) \cap (ADE)$.

Exercice 37. On considère la famille de plans $(P_m)_{m\in\mathbb{R}}$ d'équations:

$$m^2x + (2m-1)y + mz = 3.$$

1 - Déterminer les plans P_m dans chacun des cas suivants :

a) $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in P_m$

b) $B \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in P_m$

c) $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de P

d) $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est normal à P.

2 - Montrer qu'il existe un unique point R appartenant à tous les plans P_m.

Exercice 38.

Déterminer la distance du point A au plan P dans les cas suivants:

1 - $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $P : x+y+z-1=0$.

2 - $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $P : 2x+y+z+4=0$.

Exercice 39. Déterminer la distance du point $M\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ aux droites

$$D\begin{cases}x+y-2z=1\\2x-y+z+1=0\end{cases}\qquad \text{et } \Delta\begin{cases}x=1+2t\\y=2-t\\z=2+2t\end{cases}$$

Exercice 40. On considère les deux droites $D:\begin{cases}y-z=3\\-x-y+2=0\end{cases}$ et $\Delta:\begin{cases}-x+3z=1\\-x-3y=2\end{cases}$.

1 - Donner un vecteur directeur de D et de Δ.

2 - Donner un paramétrage de Δ.

3 - On fixe un point M_α de Δ dépendant du paramètre α où α est l'abscisse de point M_α. Donner une équation du plan P_α passant par M_α et contenant D.

4 - Parmi tous ces plans, y en a-t-il un qui est perpendiculaire à Δ ? Pour quelle valeur α_0 de α est il obtenu ? Donner une équation de ce plan. Donner les coordonnées de M_{α_0}.

Exercice 41. Donner des équations la perpendiculaire commune Δ aux droites D_1 et D_2, et calculer la distance entre D_1 et D_2 dans les cas suivants:

1 - $D_1:\begin{cases}x-y-z+4=0\\-x-2y-3z+9=0\end{cases}$ et $D_2:\begin{cases}-x+2y+z+2=0\\-2x+4y-z+1=0\end{cases}$

2 - $D_1:\begin{cases}x+y-z+2=0\\x+y+z+1=0\end{cases}$ et $D_2:\begin{cases}3x-y+2z-7=0\\x-y=0\end{cases}$

3 - $D_1:\begin{cases}x=1-2t\\y=t+2\\z=3t+1\end{cases}$ et $D_2:\begin{cases}x=3t-1\\y=-t+2\\z=2t\end{cases}$

4 - $D_1:\begin{cases}x-y-z-2=0\\x-2y-3z+1=0\end{cases}$ et $D_2:\begin{cases}x+y+2z-1=0\\2x+y+z+2=0\end{cases}$

Exercice 42. On considère la surface S d'équation $x^2+y^2-z^2=1$.

1 - Caractériser géométriquement l'intersection de S avec un plan horizontal.

2 - Soit M_θ le point de coordonnées $\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\\0\end{pmatrix}$ $(\theta\in\mathbb{R})$. Existe-t-il une droite passant par M_θ entièrement contenue dans S.

3 - En déduire un paramétrage de S par θ et z.

Exercice 43. Soient $A\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$.

1 - Déterminer une équation de la sphère S de diamètre $[AB]$.

2 - Soit S' la surface d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z - 7 = 0$. Caractériser S géométriquement.

3 - Déterminer l'intersection C de S et S'. Montrer que C est contenu dans un plan P dont on donnera une équation.

Exercice 44. Soient P_λ ($\lambda \in \mathbb{R}$) le plan d'équation $x + y + \lambda z - 1 = 0$ et S la sphère de centre O et de rayon 2. Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles le plan P_λ est tangent à S. Déterminer alors les coordonnées du point de tangence.

4 Étude de fonctions

Exercice 45. Étudier (domaine de définition, variations, limites aux bornes du domaine, asymptotes droites ou paraboliques éventuelles, position de la courbe par rapport à l'asymptote) et représenter graphiquement les fonctions définies par

1. $f : x \mapsto x^2 - 2x - \ln x$;
2. $f : x \mapsto x^2 e^{-x} + 2x - \sqrt{x^2+1}$;
3. $f : x \mapsto \dfrac{x \ln x - x^2}{x \cos^2 x + \sqrt{|x|}}$.

Exercice 46.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = 2 - x + \ln|x|$.
   - (a) Étudier les variations de g et ses limites aux bornes de son domaine de définition.
   - (b) Montrer qu'il existe trois réels a, b, c (on ne demande pas de les calculer) vérifiant
   $$0 < a < b < c \quad \text{et} \quad f(a) = f(b) = f(c) = 0.$$
2. Soit g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ par $g(x) = \dfrac{x(1 + \ln|x|)}{1 - x}$.
   - (a) Calculer g', la dérivée de g.
   - (b) Étudier les variations de g.
   - (c) Est-il possible de prolonger g par continuité en 0 ? La fonction éventuellement ainsi prolongée est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 47. Soit $f : x \mapsto \begin{cases} e^x - x - 1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x \ln x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$. Faire une étude complète de f et la représenter graphiquement.

Exercice 48. Soit $f : x \mapsto 3x - 3\ln|2e^x - 1|$. Montrer que le graphe de f admet trois asymptotes passant par un même point. Représenter graphiquement f.

Exercice 49. Montrer que pour tout $x > 0$ et pour tout $a > 1$, on a $x^a - 1 \geq a(x - 1)$.

Exercice 50.

1. Soit $f : x \mapsto x + \sqrt{1+x^2}$.

   (a) Étudier f et la représenter graphiquement. On précisera les asymptotes au graphe de f.

   (b) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle qu'on précisera.

2. Soit $g = \ln f$.

   (a) Étudier la fonction g.

   (b) Résoudre l'équation $g(x) = 0$.

3. Soit $h : x \mapsto \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

   (a) Étudier la fonction h et la représenter graphiquement. On étudiera les branches infinies du graphe de h.

   (b) Montrer que h est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que son inverse est donné par g. Tracer alors la courbe représentative de g.

Exercice 51. Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x} - x$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

(b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

(c) Montrer que le graphe de f admet une asymptote droite de la forme $y = ax + b$ au voisinage de $-\infty$ (on donnera les valeurs de a et b).

(d) Représenter f graphiquement.

Exercice 52. Écrire un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto e^x \cos x$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}(e^x \cos x - 1)$ admet-elle une limite en 0 ? Si oui, quelle est cette limite ?

Exercice 53. Écrire un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $x \mapsto \cos x$ et à l'ordre 1 au voisinage de 0 de $x \mapsto \sin 3x$. En déduire les limites

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\sin 3x}{\sqrt{1-\cos x}} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to0^-} \frac{\sin 3x}{\sqrt{1-\cos x}}.$$

Exercice 54.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x - e^x + 1$.

   (a) Montrer que g admet un minimum en $x = 0$.

   (b) En déduire que g ne prend que des valeurs positives ou nulles.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On donnera en particulier la valeur de $f'(0)$.

(c) Montrer que f admet une fonction réciproque dont on indiquera l'ensemble de définition.

Exercice 55. Pour $a \in \mathbb{R}$, on désigne par f_a la fonction définie par $f_a(x) = \ln(x^2 + a)$.

1. Indiquer, selon les valeurs de a, l'ensemble de définition de f_a et les limites de f_a aux bornes de son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de f_a.
3. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$f_a(x) = 2\ln x + \ln\left(1 + \frac{a}{x^2}\right).$$

   (b) En déduire $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_a(x)}{x}$, puis la nature des branches infinies des courbes $\mathscr{C}_a$ représentatives des fonctions f_a lorsque $x \to +\infty$ et lorsque $x \to -\infty$.

3. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, on considère $\mathscr{C}_a$ et $\mathscr{C}_b$ les représentations graphiques des fonctions f_a et f_b. On appelle M le point de $\mathscr{C}_a$ d'abscisse x et N le point de $\mathscr{C}_b$ de même abscisse.
   (a) Montrer que $MN \neq 0$.
   (b) Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}_a$ et $\mathscr{C}_b$?
   (c) Montrer que les courbes $\mathscr{C}_a$ et $\mathscr{C}_b$ sont asymptotes.

5 Courbes paramétrées

Exercice 56. Étudier la courbe du plan définie pour $u \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} x &= \cos 3u \\ y &= \sin 2u. \end{cases}$$

Exercice 57 (La cycloïde)**.** Soit $R > 0$. Étudier la courbe paramétrique définie pour $u \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} x &= R(u - \sin u) \\ y &= R(1 - \cos u). \end{cases}$$

On précisera en particulier les tangentes aux points $(2kR\pi, 0)$ et $(2k+1)R\pi, 2R)$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 58. Étudier la courbe paramétrique définie pour $u \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} x &= \frac{u^2}{1+u^2} \\ y &= \frac{u^3}{1+u^2}. \end{cases}$$

On précisera en particulier le comportement de cette courbe à l'origine $(0, 0)$.

Exercice 59. Étudier les courbes paramétriques définies pour $u \in \mathbb{R}$ par

(a)

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{1-u^2}{2u^2} \\ y & = & \frac{1+u^2}{2u^2}; \end{array}\right.$$

(b)

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \sin\frac{u}{2} \\ y & = & \cos u; \end{array}\right.$$

(c)

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2+\cos^2 u \\ y & = & 1-\sin^2 u; \end{array}\right.$$

(d)

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \alpha + a\cos u \\ y & = & \beta + b\sin u, \end{array}\right.$$

pour $a, b > 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

(e)

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \cos u \sin u \\ y & = & \cos^2 u - \frac{1}{2} \\ z & = & -u; \end{array}\right.$$

(f)

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2+\cos u \\ y & = & 1+\sin u \\ z & = & 5. \end{array}\right.$$

Exercice 60 (La cardioïde)**.** Étudier la courbe paramétrique définie pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3\cos t + 3\cos 2t + \cos 3t \\ y & = & 3\sin t + 3\sin 2t + \sin 3t. \end{array}\right.$$

Calculer la longueur de cette courbe.

Exercice 61. Pour les courbes définies par les représentations paramétriques suivantes, déterminer l'équation de la tangente au point de paramètre u_0 :

(a)

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & u^2 - u + 1 \\ y & = & 4u^3 - 3u^2 - 2 \end{array}\right. \qquad u_0 = 1;$$

(b)

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{y} \\ y & = & \frac{2-3u}{u+1} \end{array}\right. \qquad u_0 = 1;$$

(c)

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \ln|2u-5| \\ y & = & \frac{1}{\ln u} \end{array}\right. \qquad u_0 = 2;$$

(d)

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & e^{-3u^2} \\ y & = & e^{\sqrt{5u+1}} \end{array}\right. \qquad u_0 = 0;$$

(e)

Exercice 62. Soit $\mathscr{C}$ la courbe de $\mathbb{R}^3$ définie par les équations paramétriques suivantes

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & 2+\cos^2 t \\ y & = & 1-\sin^2 t \\ z & = & 3\cos 2t \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $\mathscr{C}$ est une droite dont on déterminera des équations cartésiennes.

Exercice 63. Soit $\mathscr{C}$ la courbe de $\mathbb{R}^3$ définie par les équations paramétriques suivantes

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & 2+\cos 2t \\ y & = & 1+\sin 2t \\ z & = & 3 \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $\mathscr{C}$ est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 64. Construire la courbe $\mathscr{C}$ définie pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & \cos t(\sqrt{2}\cos t+1) \\ y & = & \sin t(\sqrt{2}\cos t-1). \end{array}\right.$$

Déterminer les points doubles de $\mathscr{C}$, ainsi que les points d'intersection avec les axes. Montrer que $\mathscr{C}$ possède un centre de rotation Ω ; plus précisément, montrer que $\mathscr{C}$ est invariante par trois rotations (à déterminer) de centre Ω (dont l'identité).

Exercice 65. Étudier la courbe d'équation polaire $r = \frac{1-\sin\vartheta}{1+\cos\vartheta}$, $\vartheta \in \mathbb{R}$. On précisera en particulier la période et on étudiera les symétries éventuelles de cette courbe. Montrer que cette courbe admet une branche parabolique dans la direction Ox.

Exercice 66. Étudier la courbe $\mathscr{C}$ d'équation polaire $r = \frac{\vartheta}{\vartheta+\pi}$, $\vartheta \in \mathbb{R}$. Montrer que la distance entre $\mathscr{C}$ et le cercle unité est nulle.

Exercice 67. Soit $a > 0$. Soit γ l'arc défini en coordonnées polaires par $\vartheta = 2t - \tan t$, $r = a\sin 2t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$. Tracer le support de γ.

Exercice 68. Dans $\mathbb{R}^3$, le point M a pour coordonnées à l'instant $t \geq 0$

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & 1-\cos t \\ y & = & 3+2\cos t \\ z & = & 5\cos t. \end{array}\right.$$

Montrer que le mouvement de M est rectiligne uniforme ; donner sa trajectoire et décrire ce mouvement.

Exercice 69. Tracer les courbes en polaires suivantes:

1 - $\rho(\vartheta) = \sin(2\vartheta)$

2 - $\rho(\vartheta) = \frac{\sin(\vartheta)}{\vartheta}$

3 - $\rho(\vartheta) = \frac{\vartheta-1}{\vartheta+1}$

4 - $\rho(\vartheta) = \cos(\vartheta) - \cos(2\vartheta)$

5 - $\rho(\vartheta) = \frac{\cos(\vartheta)}{1+\sin(\vartheta)}$

Exercice 70. Grâce aux coordonnées polaires, tracer la courbe définie implicitement par la relation $2xy(x^2 + y^2) = x^2 - y^2$.