Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Année universitaire 2016-2017

Site : ☐ Luminy ☒ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☒ 1er semestre ☐ 2ème semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : L2 Nom du diplôme : Licence Maths
Code du module : SMI3U1TC Libellé du module : Analyse 2
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Exercice 1 (Question de cours)**.** Énoncer un théorème du cours qui donne des conditions pour que la somme d'une série de fonctions dérivables soit dérivable.

Exercice 2 (Séries numériques)**.**

1. Déterminer la nature de la série $\sum\left(n - \frac{1}{2n} - \sqrt{n^2-1}\right)$.
2. Dire pourquoi la série $\sum \frac{1}{4n^2-1}$ converge et calculer sa somme.
3. La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ $(n \geq 2)$ est-elle alternée ? Est-elle convergente ? Si oui, que vaut sa somme ?
   Indication : pour $a_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$, on pourra évaluer $a_{2k} + a_{2k+1}$ pour $k \geq 0$.

Exercice 3 (Suites et séries de fonctions)**.** Pour $n \geq 1$, on pose $g_n(x) = -\frac{1}{2}e^{-nx^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction γ que l'on déterminera.
   Cette convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
2. Montrer que la série de fonctions $\sum g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ vers une fonction g que l'on déterminera.
   Montrer que cette convergence est uniforme sur les intervalles du type $[a, +\infty[$ et $]-\infty, -a]$ lorsque $a > 0$.
3. Pour $n \geq 0$, on pose $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.
   Cette convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
4. En remarquant que $f_n' = g_n$, déterminer f, somme de la série $\sum f_n$, sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (Séries entières)**.** Soit (E) l'équation différentielle $xy' + y = \frac{1}{1+x^2}$.

Déterminer toutes les solutions de (E) développables en série entière au voisinage de 0.