Corrigé de l'examen du 17 janvier 2018

Questions de cours 1.

1. Donner la définition d'une série numérique absolument convergente et donner un exemple de série convergente non absolument convergente.

   Réponse :

   Une série $\sum a_n$ ($a_n \in \mathbb{C}$) est absolument convergente si la suite des sommes partielles des modules $\left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

   La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, non absolument convergente.

2. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière. (On attend ici une définition, pas une formule pour le calculer).

   Réponse :

   Le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$ est l'unique réel positif (ou nul) tel que la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente si $|z| < R$ et divergente si $|z| > R$.

3. Quand peut-on dire que la limite d'une suite de fonctions dérivables est dérivable ? (On demande un théorème du cours, mais pas sa démonstration).

   Réponse :

   Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dérivables sur un intervalle $[a, b]$ qui converge simplement vers f sur $[a, b]$ et telle que la suite des dérivées $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur $[a, b]$. Alors f est dérivable sur $[a, b]$ et $f' = g$.

Exercice 2 (Séries numériques)**.**

1. Quelle est la nature de la série numérique $\sum\left(\sqrt{n}\cos\frac{1}{n} - \sqrt{n}\right)$ ($n \geq 1$) ? Justifier.

   Réponse :

   La série numérique proposée est convergente. En effet, comme $\cos\frac{1}{n} \leq 1$ pour tout $n \geq 1$, cette série n'a que des termes négatifs (tous de même signe). De plus, le développement limité de la fonction cosinus au voisinage de 0 donne $\cos\frac{1}{n} - 1 \sim -\frac{1}{2n^2}$ (lorsque n tend vers l'infini), et donc $\sqrt{n}\cos\frac{1}{n} - \sqrt{n} \sim -\frac{1}{2n^{3/2}}$. Comme $3/2 > 1$, la série est comparable à une série de Riemann convergente, elle est donc convergente (et même absolument convergente).

2. Dire pourquoi la série $\sum \frac{4}{n^2-4}$ ($n \geq 3$) est convergente et calculer sa somme.

   Réponse :

   On a : $0 \leq \frac{4}{n^2-4} \sim \frac{4}{n^2}$ lorsque n tend vers l'infini : c'est le terme général d'une série absolument convergente (série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha = 2 > 1$), la série proposée est donc absolument convergente. D'autre part, $\frac{4}{n^2-4} = \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+2}$ pour tout $n \geq 3$. Ainsi,

   $$\sum_{k=3}^{n} \frac{4}{k^2-4} = \sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k+2}\right) = \sum_{k'=1}^{n-2} \frac{1}{k'} - \sum_{\ell=5}^{n+2} \frac{1}{\ell}$$

   où on a posé $k' = k - 2$ et $\ell = k + 2$. Ceci donne donc

   $$\sum_{k=3}^{n} \frac{4}{k^2-4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}.$$

   On vient de montrer que $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4}{n^2-4} = \frac{25}{12}$.

Exercice 3 (Séries de fonctions)**.** Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $f_n(x) = \frac{\sin^2(nx)}{n^2}$.

1. Déterminer l'ensemble $D \subset \mathbb{R}$ pour lequel $\sum f_n(x)$ est une série convergente. On note $S(x)$ sa somme ($x \in D$).

   Réponse :

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\sin^2(nx)| \leq 1$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série (absolument) convergente (c'est une série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha = 2 > 1$). On en déduit que la série $\sum f_n(x)$ est (absolument) convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc $D = \mathbb{R}$.

2. Montrer que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur D. Que peut-on en déduire sur la régularité de S sur D ?

   Réponse :

   On vient de voir que pour tout $n \geq 1$, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série absolument convergente. Ainsi, la série de fonction $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$. Comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, on en déduit que S est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Étudier $\sum f_n'$: convergence simple, uniforme sur des intervalles de $\mathbb{R}$ à déterminer.

   Réponse :

   Pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f_n'(x) = \frac{2\sin(nx)\cos(nx)}{n} = \frac{\sin(2nx)}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On voit facilement que la série $\sum f_n'(x)$ est convergente dès que $2x$ est un multiple de π : dans ce cas, $\sin(2nx) = 0$ pour tout $n \geq 1$. Lorsque $2x$ n'est pas un multiple de π, on peut appliquer le théorème d'Abel (les sommes partielles $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(2kx)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées par $\frac{1}{|\sin x|}$ et la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante vers 0) pour conclure à la convergence de $\sum f_n'(x)$. Ceci montre que $\sum f_n'$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

   Le théorème d'Abel uniforme s'applique sur tout intervalle du type $[k\pi+\varepsilon, (k+1)\pi-\varepsilon]$ pour $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Il y a donc convergence uniforme de la série $\sum f_n'$ sur ces intervalles.

Et, au choix, l'un des deux exercices suivants :

Exercice 4 (Séries entières)**.** 1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{z^{2n}}{n2^n}$ $(n \geq 1)$.

   Réponse :

   $R = \sqrt{2}$: en effet, si $|z| > \sqrt{2}$, alors $\left|\frac{z^{2n}}{n2^n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ (la série est divergente puisque son terme général ne converge pas vers 0) et si $|z| < \sqrt{2}$, alors $\left|\frac{z^{2n}}{n2^n}\right| \leq a^n$ avec $a = \frac{|z|}{2} < 1$, donc est le terme général d'une série convergente (série géométrique de raison $a < 1$). D'après la définition du rayon de convergence, cela montre bien que $R = \sqrt{2}$.

2. Que se passe-t-il sur le cercle de convergence $|z| = R$ (convergence de la série) ?

   Réponse :

   Si $|z| = \sqrt{2}$, alors z s'écrit $\sqrt{2}e^{i\vartheta}$ avec $\vartheta \in [0, 2\pi[$. La série devient : $\sum \frac{e^{i2n\vartheta}}{n}$. Si $\vartheta = 0$ ou $\vartheta = \pi$, $e^{i2n\vartheta} = 1$ et la série est divergente (c'est la série harmonique). Si $\vartheta \in]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$, on peut alors appliquer le théorème d'Abel (voir l'exercice précédent) pour montrer que la série $\sum \frac{e^{i2n\vartheta}}{n}$ est convergente.

Exercice 5 (Séries entières et équations différentielles)**.** 1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{(n-1)z^n}{n+1}$ $(n \geq 2)$. Pour $|z| < R$, on note $f(z)$ sa somme.

   Réponse :

   Si $|z| > 1$, alors $\left|\frac{(n-1)z^n}{n+1}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$: la série est divergente puisque son terme général ne converge pas vers 0. Si $|z| < 1$, alors $\left|\frac{(n-1)z^n}{n+1}\right| \leq |z|^n$ qui est le terme général d'une série convergente (série géométrique de raison $|z| < 1$). D'après la définition du rayon de convergence d'une série entière, on en déduit que $R = 1$.

2. Existe-t-il une solution développable en série entière $y(x) = \sum a_n x^n$ à l'équation différentielle

   $$x^2y'' + xy' - y = f \ ?$$

   Si oui, quel est son rayon de convergence ?

   Réponse :

   Pour commencer, remarquons que l'équation différentielle n'a de sens que là où f est définie, c'est-à-dire sur $]-1, 1[$.

   Analyse :

   Supposons qu'une telle fonction existe : $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ avec rayon de convergence R (a priori donc, $R \leq 1$). Pour tout $x \in]-R, R[$, on sait que y est dérivable autant de fois que l'on veut et ses dérivées sont données par la somme des dérivées de $x \mapsto a_n x^n$. On a alors

$$xy'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n \quad \text{et} \quad x^2 y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n, \quad |x| < R.$$

Ceci montre alors que

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - y(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - 1) a_n x^n.$$

L'équation différentielle est vérifiée si $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - 1) a_n x^n = f(x)$, $|x| < R$. Par unicité du développement en série entière, on en déduit donc que $(n^2 - 1) a_n = \frac{n-1}{n+1}$ pour tout $n \geq 2$, ou encore $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ pour $n \geq 2$.

Synthèse :

La série entière $a_0 + a_1 x + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^2}$ a pour rayon de convergence $R = 1$ et est solution de l'équation différentielle. La réponse à la question posée dans l'énoncé est donc "oui" et son rayon de convergence vaut 1. On remarque qu'on a deux degrés de liberté (a_0, a_1) dans le choix de la fonction, ce qui n'est pas très surprenant compte tenu de l'ordre 2 de l'équation différentielle.