Problème de Stokes - Corrigé

M2 EDPCS – Université Aix-Marseille

On note $\mathcal{H}$ l'espace des champs de vecteurs de $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ à divergence nulle, c'est-à-dire

$$\mathcal{H} = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n); \operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^n \right\}.$$

Dans toute la suite, on notera $\langle u, v\rangle$ le produit scalaire entre u et v dans $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. D'autre part, on note ${}_{X'}\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ le produit de dualité entre un espace X et son dual X'.

1. Montrer que $\mathcal{H}$ muni du produit scalaire provenant de $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert.

   Pour montrer que $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert, il suffit de montrer que c'est un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Soit donc $(u_k)_{k\geq 1}$ une suite de $\mathcal{H}$ qui converge en norme $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ vers u. Alors $(\operatorname{div} u_k)_{k\geq 1}$ converge vers $\operatorname{div} u$ au sens des distributions. En effet, pour tout $\varphi \in \mathscr{D} = \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a

   $${}_{\mathscr{D}'}\langle \operatorname{div} u_k, \varphi \rangle_{\mathscr{D}} = -\langle u_k, \nabla\varphi\rangle \xrightarrow[k\to\infty]{} -\langle u_k, \nabla\varphi\rangle = {}_{\mathscr{D}'}\langle \operatorname{div} u, \varphi\rangle_{\mathscr{D}}.$$

   Comme $\operatorname{div} u_k = 0$ dans $\mathscr{D}'$ pour tout $k \geq 1$, on en déduit que $\operatorname{div} u = 0$, et donc $u \in \mathcal{H}$.

2. Soit $p \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^n)$. Montrer que ∇p est orthogonal à $\mathcal{H}$ dans $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

   Soit $p \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^n)$. Alors $\nabla p \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. On a pour tout $u \in \mathcal{H}$

   $$\langle \nabla p, u\rangle = -{}_{\dot{H}^{-1}}\langle p, \operatorname{div} u\rangle_{\dot{H}^1} = 0,$$

   ce qui montre que ∇p est orthogonal à $\mathcal{H}$.

3. Soit $u = (u_k)_{1\leq k\leq n} \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. On définit l'opérateur $\mathbb{G}$ par son action sur u grâce à la transformée de Fourier $\mathscr{F}$ de la manière suivante :

   $$\mathscr{F}(\mathbb{G}u)(\xi) = \left(\frac{\xi_j\xi_k}{|\xi|^2}\right)_{1\leq j,k\leq n} \mathscr{F}(u)(\xi) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\xi_j\xi_k}{|\xi|^2}\mathscr{F}(u_k)(\xi)\right)_{1\leq j\leq n}.$$

   (a) Montrer que $\mathbb{G}$ est un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. On notera $\mathcal{G}$ l'image de $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ par $\mathbb{G}$.

   Pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, comme la transformée de Fourier est une isométrie de L^2, on a

   $$\begin{aligned}
   \|\mathbb{G}u\|_2^2 = \|\mathscr{F}(\mathbb{G}u)\|_2^2 = \sum_{j=1}^n \left\|\left(\mathscr{F}(\mathbb{G}u)\right)_j\right\|_2^2 &= \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left|\sum_{k=1}^n \frac{\xi_j\xi_k}{|\xi|^2}\mathscr{F}(u_k)(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi \\
   &\leq \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\xi_j^2}{|\xi|^2} \sum_{k=1}^n |\mathscr{F}(u_k)(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi = \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} |\mathscr{F}(u_k)(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \\
   &= \|\mathscr{F}(u)\|_2^2 = \|u\|_2^2,
   \end{aligned}$$

   où l'inégalité de la 3ème ligne provient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'espace ℓ_n^2 et le fait que $\displaystyle\sum_{k=1}^n \xi_k^2 = |\xi|^2$. Ainsi, $\mathbb{G}$ est bien un opérateur borné de $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ de norme inférieure ou égale à 1.

   (b) Montrer que $\mathbb{G}$ est une projection (on montrera que $\mathbb{G}^2 = \mathbb{G}$).

L'opérateur $\mathbb{G}$ est défini via sa transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ par la multiplication par la matrice $M(\xi)=\left(\frac{\xi_j\xi_k}{|\xi|^2}\right)_{1\le j,k\le n}$. Son carré est donc représenté via sa transformée de Fourier par $M(\xi)^2$, c'est-à-dire

$$\big(M(\xi)^2\big)_{jk}=\sum_{\ell=1}^n\frac{\xi_j\xi_\ell}{|\xi|^2}\frac{\xi_\ell\xi_k}{|\xi|^2}=\sum_{\ell=1}^n\frac{\xi_j\xi_k}{|\xi|^2}\frac{\xi_\ell^2}{|\xi|^2}=\frac{\xi_j\xi_k}{|\xi|^2}\frac{|\xi|^2}{|\xi|^2}=\big(M(\xi)\big)_{jk}.$$

On en déduit que $\mathbb{G}^2=\mathbb{G}$, et donc que $\mathbb{G}$ est une projection.

(c) Montrer que le noyau de $\mathbb{G}$ est $\mathcal{H}$, c'est-à-dire que, pour $u\in L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$,

$$\mathbb{G}u=0\quad\text{si, et seulement si,}\quad u\in\mathcal{H}.$$

$\Leftarrow$: Soit $u\in\mathcal{H}$. Alors pour tout $\phi\in L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, on a

$$\begin{aligned}\langle\mathbb{G}u,\phi\rangle=\langle\mathscr{F}(\mathbb{G}u),\mathscr{F}(\phi)\rangle&=-\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{k=1}^n\mathscr{F}(u_k)(\xi)\cdot i\xi_k\frac{1}{|\xi|^2}\sum_{j=1}^n i\xi_j\mathscr{F}(\phi_j)(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\&=-\langle\mathscr{F}(u),\mathscr{F}\big(\nabla(-\Delta)^{-1}(\operatorname{div}\phi)\big)\rangle=-\langle u,\nabla(-\Delta)^{-1}\operatorname{div}\phi\rangle=0\end{aligned}$$

où on a utilisé le théorème de Plancherel dans la première et l'avant-dernière égalité, le fait que $\mathcal{H}$ est orthogonal à ∇p pour $p=(-\Delta)^{-1}(\operatorname{div}\phi)\in\dot H^1(\mathbb{R}^n)$ et l'expression en Fourier de $\operatorname{div}v$ (pour $v\in L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$), $(-\Delta)^{-1}:\dot H^{-1}\to\dot H^1$ et ∇p (pour $p\in\dot H^1(\mathbb{R}^n)$). On déduit alors de l'égalité $\langle\mathbb{G}u,\phi\rangle=0$ pour tout $\phi\in L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ que $\mathbb{G}u=0$.
$\Rightarrow$: Supposons que $u\in L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ tel que $\mathbb{G}u=0$ dans $L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. Alors $\mathscr{F}(\mathbb{G}u)(\xi)=0$ pour presque tout $\xi\in\mathbb{R}^n$. Ainsi, on a pour tout $1\le j\le n$,

$$\frac{\xi_j}{|\xi|^2}\sum_{k=1}^n\xi_k\mathscr{F}(u_k)(\xi)=0\quad\text{pour presque tout }\xi\in\mathbb{R}^n.$$

Ceci montre alors que pour tout $1\le j\le n$ $\frac{\xi_j}{|\xi|^2}\mathscr{F}(\operatorname{div}u)(\xi)=0$ pour presque tout $\xi\in\mathbb{R}^n$, et donc que $\operatorname{div}u=0$ au sens des distributions. Ainsi, $u\in\mathcal{H}$.

(d) Montrer que $L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)=\mathcal{G}\overset{\perp}{\oplus}\mathcal{H}$.

Comme $\mathbb{G}$ est une projection, on a $L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)=\operatorname{Im}(\mathbb{G})\oplus\operatorname{Ker}(\mathbb{G})$. Par définition, $\operatorname{Im}(\mathbb{G})=\mathcal{G}$ et, d'après la question précédente, $\operatorname{Ker}(\mathbb{G})=\mathcal{H}$. Il reste à montrer que $\mathcal{G}$ est orthogonal à $\mathcal{H}$. Soit $\phi\in\mathcal{G}$. Alors il existe $v\in L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ tel que $\phi=\mathbb{G}v=\nabla\big((-\Delta)^{-1}(\operatorname{div}v)\big)$. Ce qui montre que $\phi=\nabla p$ avec $p=(-\Delta)^{-1}(\operatorname{div}v)\in\dot H^1(\mathbb{R}^n)$. D'après la question 2, on en déduit que $\phi=\nabla p$ est orthogonal à $\mathcal{H}$.

4. Soit $u\in\mathcal{H}$. Montrer que $e^{t\Delta}u\in\mathcal{H}$ pour tout $t\ge0$. On rappelle que $e^{t\Delta}$ est défini grâce à la transformée de Fourier par $\mathscr{F}\big(e^{t\Delta}u\big)(\xi)=e^{-t|\xi|^2}\mathscr{F}(u)(\xi)$.

Pour $u\in\mathcal{H}\subset L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, on a $e^{t\Delta}u\in L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ et donc $\operatorname{div}\big(e^{t\Delta}u\big)\in\dot H^{-1}(\mathbb{R}^n)$. En calculant le produit de dualité de $\operatorname{div}\big(e^{t\Delta}u\big)\in\dot H^{-1}(\mathbb{R}^n)$ avec $\varphi\in\dot H^1(\mathbb{R}^n)$, on obtient

$$\begin{aligned}{}_{\dot H^{-1}}\langle\operatorname{div}\big(e^{t\Delta}u\big),\varphi\rangle_{\dot H^1}=-\langle e^{t\Delta}u,\nabla\varphi\rangle&=-\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{k=1}^n e^{-t|\xi|^2}\mathscr{F}(u_k)(\xi)\cdot i\xi_k\mathscr{F}(\varphi)(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\&=-\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{k=1}^n\mathscr{F}(u_k)(\xi)\cdot i\xi_k\big(e^{-t|\xi|^2}\mathscr{F}(\varphi)(\xi)\big)\,\mathrm{d}\xi\\&=-\big\langle\mathscr{F}(u),\mathscr{F}\big(\nabla(e^{t\Delta}\varphi)\big)\big\rangle=-\langle u,\nabla(e^{t\Delta}\varphi)\rangle=0,\end{aligned}$$

où la dernière égalité provient de l'orthogonalité de $\mathcal{H}$ avec $\nabla\dot H^1(\mathbb{R}^n)$ (question 2). Ceci montre bien que $\operatorname{div}\big(e^{t\Delta}u\big)=0$ dans $\dot H^{-1}(\mathbb{R}^n)$.

5. Montrer que $\mathrm{Id}-\mathbb{G}=:\mathbb{P}$ est une projection orthogonale de $L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ sur $\mathcal{H}$, puis que $\mathbb{P}$ s'étend en un opérateur borné sur $\dot H^{-1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$.

Dans la question 3 (d), on a vu que $\mathcal{G} = \mathrm{Im}(\mathbb{G})$ est orthogonal à $\mathcal{H} = \mathrm{Ker}(\mathbb{G})$. Comme $\mathbb{G}$ est une projection orthogonale, $\mathrm{Id} - \mathbb{G} = \mathbb{P}$ est aussi une projection orthogonale et on a $\mathrm{Ker}(\mathbb{P}) = \mathrm{Im}(\mathbb{G}) = \mathcal{G}$ ainsi que $\mathrm{Im}(\mathbb{P}) = \mathrm{Ker}(\mathbb{G}) = \mathcal{H}$. On peut vérifier facilement que $\mathbb{G}$ et $\mathbb{P}$ sont auto-adjoints dans $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.
Pour montrer que $\mathbb{P}$ peut s'étendre en un opérateur borné sur $\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, il suffit de montrer que $\mathbb{G}$ peut s'étendre en un opérateur borné sur $\dot{H}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, puis de raisonner pour $\mathrm{Id} - \mathbb{G}$ et par dualité. Pour $u \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, on définit Gu par

$$Gu = \mathscr{F}^{-1}\Big[\xi \mapsto \Big(\sum_{k=1}^n \frac{\xi_j \xi_k}{|\xi|^2} \mathscr{F}(u_k)(\xi)\Big)_{1 \le j \le n}\Big].$$

La même preuve qu'en 3 (a) montre que

$$\|Gu\|_{\dot{H}^1}^2 = \|\xi \mapsto |\xi| \mathscr{F}(Gu)(\xi)\|_2^2 \le \|\xi \mapsto |\xi| \mathscr{F}(u)\|_2^2 = \|u\|_{\dot{H}^1}^2.$$

Ainsi, $G : \dot{H}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to \dot{H}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ vérifie aussi pour tout $u \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et tout $p \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
{}_{\dot{H}^{-1}}\langle \nabla p, Gu \rangle_{\dot{H}^1} &= -\langle p, \operatorname{div} Gu \rangle = -\langle \mathscr{F}(p), \mathscr{F}(\operatorname{div} Gu) \rangle \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{F}(p)(\xi) \cdot \sum_{j=1}^n i\xi_j \sum_{k=1}^n \frac{\xi_j \xi_k}{|\xi|^2} \mathscr{F}(u_k)(\xi) \, \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{F}(p)(\xi) \cdot \Big(\sum_{j=1}^n \frac{\xi_j^2}{|\xi|^2}\Big) \sum_{k=1}^n i\xi_k \mathscr{F}(u_k)(\xi) \, \mathrm{d}\xi \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{F}(p)(\xi) \mathscr{F}(\operatorname{div} u)(\xi) \, \mathrm{d}\xi = -\langle p, \operatorname{div} u \rangle = 0,
\end{aligned}$$

ce qui montre en particulier que pour G', l'adjoint de G, $G'(\nabla p) = 0$ dans $\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ pour tout $p \in L^2(\mathbb{R}^n)$. On définit alors $\tilde{\mathbb{G}} = G' : \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est une extension de $\mathbb{G}$ à $\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $\tilde{\mathbb{P}} = \mathrm{Id}_{\dot{H}^{-1}} - \tilde{\mathbb{G}} : \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est une extension de $\mathbb{P}$ à $\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ qui vérifie $\tilde{\mathbb{P}}(\nabla p) = \nabla p - G'(\nabla p) = 0$ pour tout $p \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

6. Soit $u_0 \in \mathcal{H}$ et $f \in L^2(0, \infty; \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$. Montrer que $u \in \dot{W}(0, \infty) \cap \mathscr{C}_0([0, \infty); \mathcal{H})$ est solution de

$$\partial_t u - \Delta u + \nabla p = f \quad \text{au sens des distributions de } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \quad u(0, \cdot) = u_0$$

si, et seulement si, u s'écrit :

$$u(t) = e^{t\Delta} u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} (\mathbb{P} f)(s) \, \mathrm{d}s, \quad t \ge 0.$$

$\Rightarrow$: Si $f \in L^2(\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ et $u \in \dot{W}(0, \infty)$, on a $\nabla p = \partial_t u - \Delta u - f \in L^2(0, \infty; \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$. En appliquant l'extension $\tilde{\mathbb{P}}$ à cette équation, on obtient

$$\tilde{\mathbb{P}}\big(\partial_t u - \Delta u - f\big) = \tilde{\mathbb{P}}(\nabla p) = 0 \quad \text{dans } L^2(0, \infty; \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)).$$

D'autre part, il n'est pas très difficile de montrer que $\tilde{\mathbb{P}}$ commute avec ∂_t et Δ. Comme $\mathbb{P} u = u$ car $u \in \mathscr{C}([0, \infty), \mathcal{H})$, on en déduit que $\partial_t u - \Delta u = \tilde{\mathbb{P}} f \in L^2(0, \infty; \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$, $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. L'étude du problème de l'équation de la chaleur montre alors que u s'écrit

$$u(t) = e^{t\Delta} u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} (\tilde{\mathbb{P}} f)(s) \, \mathrm{d}s, \quad t \ge 0,$$

comme annoncé.
$\Leftarrow$: Si u s'écrit comme dans l'énoncé, l'étude du problème de léquation de la chaleur permet d'affirmer que $u \in \dot{W}(0, \infty) \cap \mathscr{C}_0([0, \infty); L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est solution de $\partial_t u - \Delta u = \tilde{\mathbb{P}} f$ au sens des distributions avec $u(0, \cdot) = u_0$. Grâce au fait que $\tilde{\mathbb{P}}$ commute avec ∂_t et Δ, on obtient facilement que

$$\tilde{\mathbb{P}}\big(\partial_t u - \Delta u - f\big) = 0$$

et donc $\partial_t u - \Delta u - f \in \mathrm{Ker}(\tilde{\mathbb{P}})$. Un théorème important (et difficile à démontrer), le théorème de De Rham, permet de montrer, en particulier, que $\mathrm{Ker}(\tilde{\mathbb{P}}) = \nabla\big(L^2(\mathbb{R}^n)\big)$, ce qui montre le résultat annoncé.