Problème de Stokes

Devoir maison à rendre en janvier 2017

M2 EDPCS – Université Aix-Marseille

On note $\mathcal{H}$ l'espace des champs de vecteurs de $L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ à divergence nulle, c'est-à-dire

$$\mathcal{H} = \big\{u \in L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n); \operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^n\big\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{H}$ muni du produit scalaire provenant de $L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert.
2. Soit $p \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^n)$. Montrer que ∇p est orthogonal à $\mathcal{H}$ dans $L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$.
3. Soit $u = (u_k)_{1\le k\le n} \in L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. On définit l'opérateur $\mathbb{G}$ par son action sur u grâce à la transformée de Fourier $\mathscr{F}$ de la manière suivante :

$$\mathscr{F}(\mathbb{G}u)(\xi) = \Big(\frac{\xi_j\xi_k}{|\xi|^2}\Big)_{1\le j,k\le n}\mathscr{F}(u)(\xi) = \Big(\sum_{k=1}^n \frac{\xi_j\xi_k}{|\xi|^2}\mathscr{F}(u_k)(\xi)\Big)_{1\le j\le n}.$$

   (a) Montrer que $\mathbb{G}$ est un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. On notera $\mathcal{G}$ l'image de $L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ par $\mathbb{G}$.

   (b) Montrer que $\mathbb{G}$ est une projection (on montrera que $\mathbb{G}^2 = \mathbb{G}$).

   (c) Montrer que le noyau de $\mathbb{G}$ est $\mathcal{H}$, c'est-à-dire que, pour $u \in L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$,

$$\mathbb{G}u = 0 \quad \text{si, et seulement si,} \quad u \in \mathcal{H}.$$

   (d) Montrer que $L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n) = \mathcal{G} \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{H}$.

4. Soit $u \in \mathcal{H}$. Montrer que $e^{t\Delta}u \in \mathcal{H}$ pour tout $t \ge 0$. On rappelle que $e^{t\Delta}$ est défini grâce à la transformée de Fourier par $\mathscr{F}\big(e^{t\Delta}u\big)(\xi) = e^{-t|\xi|^2}\mathscr{F}(u)(\xi)$.
5. Montrer que $\mathrm{Id} - \mathbb{G} =: \mathbb{P}$ est une projection orthogonale de $L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ sur $\mathcal{H}$, puis que $\mathbb{P}$ s'étend en un opérateur borné sur $\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$.
6. Soit $u_0 \in \mathcal{H}$ et $f \in L^2(0,\infty;\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$. Montrer que $u \in \dot{W}(0,\infty) \cap \mathscr{C}_0([0,\infty);\mathcal{H})$ est solution de

$$\partial_t u - \Delta u + \nabla p = f \quad \text{au sens des distributions de } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \quad u(0,\cdot) = u_0$$

   si, et seulement si, u s'écrit :

$$u(t) = e^{t\Delta}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(\mathbb{P}f)(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \ge 0.$$