Examen “Problèmes d’évolution”

3 mars 2017

M2 EDP-CS - Université Aix Marseille

1. **Questions de cours :**
   (a) Soit ϕ une solution faible de l’équation rétrograde
   $$\partial_s \phi(s,x) = -\mathrm{div}_x A^*(s,x)\nabla_x \phi(s,x)$$
   sur $(0,T)\times\Omega$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert). Montrer que u définie par $u(t,x) = \phi(T-t,x)$, $t \in (0,T)$, $x \in \Omega$, est une solution faible locale sur $(0,T)\times\Omega$ d’une équation directe
   $$\partial_t u(t,x) = \mathrm{div}_x \tilde{A}(t,x)\nabla_x u(t,x)$$
   pour une matrice $\tilde{A}$ que l’on déterminera.

   (b) Démontrer les estimées locales d’énergie pour l’équation rétrograde (on supposera connues les estimées locales d’énergie pour l’équation directe).

2. **Inégalité de Nash :** Soit $n \geq 1$. Le but de cette question est de montrer qu’il existe une constante $C_n > 0$ telle que l’inégalité suivante soit vérifiée pour toute fonction $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}^1(\mathbb{R}^n)$ ($u \neq 0$)
   $$\|\nabla u\|_2 \geq C_n \|u\|_1^{-\frac{2}{n}} \|u\|_2^{1+\frac{2}{n}}.$$
   (a) On note, pour $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
   $$v = \mathscr{F}(u) : \xi \mapsto \tfrac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} u(x)\,\mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$
   Montrer que
   $$|v(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|u\|_1 \quad \text{pour tout} \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$
   (b) Si de plus $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$, rappeler pourquoi on a les égalités $\|v\|_2 = \|u\|_2$ et $\|\xi \mapsto |\xi| v(\xi)\|_2 = \|\nabla u\|_2$.

   (c) Montrer qu’il existe une constante $\kappa_n > 0$ (qui ne dépend que de la dimension n) telle que pour tout $r > 0$, on a
   $$\int_{|\xi|\leq r} |v|^2(\xi)\,\mathrm{d}\xi \leq \kappa_n r^n \|u\|_1^2 \qquad \text{et} \qquad \int_{|\xi|>r} |v|^2(\xi)\,\mathrm{d}\xi \leq \frac{1}{r^2}\|\nabla u\|_2^2.$$
   (d) En optimisant selon $r > 0$, montrer que
   $$\|u\|_2^2 \leq K_n \|u\|_1^{\frac{4}{n+2}} \|\nabla u\|_2^{\frac{2n}{n+2}}$$
   pour une constante $K_n > 0$ ne dépendant que de la dimension n.

   (e) Conclure.

3. **Application aux edp :** On se place en dimension 2, c’est-à-dire que $n = 2$. Soit $A = A(t,x)$ ($t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^2$) une matrice réelle de constantes d’ellipticité (uniforme en (t,x)) $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$. Soit $u : (t,x) \mapsto u(t,x)$ une solution faible globale (réelle) dans $\dot{W}(0,\infty)$ du problème $\partial_t u(t,x) = \mathrm{div}_x\, A(t,x)\nabla_x u(t,x)$ vérifiant de plus $u(t,x) \geq 0$ pour presque tout $(t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^2$ et $u \in \mathscr{C}([0,\infty); L^1(\mathbb{R}^2))$ (on ne demande pas de prouver qu’une telle solution existe).

(a) *Question préliminaire :* Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Montrer que pour tout $0 < c < C$,

$$\lim_{R \to \infty} \int_{cR \leq |x| \leq CR} |f(x)| \, \mathrm{d}x$$

existe et déterminer cette limite. On justifiera le résultat.

(b) Soit $\theta \in \mathscr{C}_c^\infty(0, \infty)$ et $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty([0, \infty))$ telle que $\varphi(r) = 1$ si $0 \leq r \leq 1$, $\varphi(r) = 0$ si $r \geq 2$ et $0 \leq \varphi(r) \leq 1$ pour tout $r \geq 0$. Soit $\phi_R(t, x) = \theta(t)\varphi\big(\frac{|x|}{R}\big)$. Montrer que

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} A(t, x) \nabla_x u(t, x) \cdot \nabla_x \phi_R(t, x) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \xrightarrow[R \to \infty]{} 0.$$

(c) En déduire que $\|u(t, \cdot)\|_1 = \int_{\mathbb{R}^2} u(t, x) \, \mathrm{d}x$ est constante au cours du temps (on rappelle que $u(t, x) \geq 0$ presque partout) que l'on supposera égale à 1.

(d) On note

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^2} u(t, x)^2 \, \mathrm{d}x, \quad t \geq 0.$$

Montrer que $-E'(t) \geq 2\lambda \|\nabla_x u(t, \cdot)\|_2^2$, $t > 0$.

(e) En utilisant l'inégalité de Nash (dans le cas $n = 2$), montrer que E vérifie une inégalité différentielle d'ordre 1.

(f) En déduire une majoration de $E(t)$ en fonction de t.