DM1 - Calcul intégral

Corrigé

Exercice 1 (Sommes de Riemann)**.** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. On note

$$\Delta_n = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\tfrac{k}{n}\right), \quad n \geq 1.$$

1. Justifier que $\Delta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Comme f est continue sur $[0,1]$, f est intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$. En particulier, la somme de Riemann de f pour la subdivision régulière $\left\{x_k = \frac{k}{n}, 0 \leq k \leq n\right\}$ et les points $\left\{\xi_k = \frac{k}{n}, 1 \leq k \leq n\right\}$ converge vers l'intégrale de f sur l'intervalle $[0,1]$, c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(\xi_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\tfrac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

ce qui montre bien que $\Delta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

2. Soit $n \geq 1$ fixé. On note $m_k = \min_{x\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]} f'(x)$ et $M_k = \max_{x\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]} f'(x)$ pour tout $1 \leq k \leq n$.

(a) En utilisant l'intégrabilité au sens de Riemann de f', montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n m_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(1) - f(0),$$

puis que $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n M_k \xrightarrow[n\to\infty]{} f(1) - f(0)$.

Comme f' est continue sur $[0,1]$, elle atteint ses bornes sur chacun des intervalles $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, $1 \leq k \leq n$. On note ξ_k le point de $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ vérifiant $f'(\xi_k) = m_k$ et η_k le point de $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ vérifiant $f'(\eta_k) = M_k$. En utilisant la subdivision régulière $\left\{x_k = \frac{k}{n}, 0 \leq k \leq n\right\}$ de l'intervalle $[0,1]$, on remarque que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n m_k = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f'(\xi_k) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n M_k = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f'(\eta_k),$$

ce sont deux sommes de Riemann de f'. Comme f' est intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$ (car elle y est continue), on en déduit que les deux quantités ci-dessus convergent vers $\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(1) - f(0)$ lorsque n tend vers l'infini.

(b) Montrer que pour tout $1 \leq k \leq n$, on a : $\displaystyle\frac{1}{2n^2} m_k \leq \frac{1}{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right) - \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2n^2} M_k$.

Le théorème des accroissements finis appliqués à f dans l'intervalle $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, $1 \leq k \leq n$ permet d'affirmer que pour tout $x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, il existe $c \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ tel que $f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) = f'(c)\left(\frac{k}{n} - x\right)$. Ainsi, comme $\left(\frac{k}{n} - x\right) \geq 0$ pour tout $x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, on obtient

$$m_k\left(\tfrac{k}{n} - x\right) \leq f\left(\tfrac{k}{n}\right) - f(x) \leq M_k\left(\tfrac{k}{n} - x\right), \quad \forall x \in \left[\tfrac{k-1}{n}, \tfrac{k}{n}\right].$$

En intégrant l'inégalité précédente sur l'intervalle $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, on obtient

$$m_k \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(\tfrac{k}{n} - x\right)\mathrm{d}x \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f\left(\tfrac{k}{n}\right) - f(x)\right)\mathrm{d}x = \tfrac{1}{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right) - \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \leq M_k \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(\tfrac{k}{n} - x\right)\mathrm{d}x.$$

On conclut en remarquant que

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(\tfrac{k}{n} - x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2n^2}, \quad \forall 1 \leq k \leq n.$$

(c) En sommant la double inégalité précédente sur k, en déduire que

$$-\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} M_k \le \Delta_n \le -\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} m_k.$$

On voit facilement, grâce à la relation de Chasles, qu'en sommant sur k, $1 \le k \le n$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\tfrac{1}{n}f\big(\tfrac{k}{n}\big)-\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x\Big)=\tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\big(\tfrac{k}{n}\big)-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=-\Delta_n.$$

Ainsi, grâce aux inégalités prouvées à la question 2 (b), on obtient

$$\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} m_k \le -\Delta_n \le \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} M_k,$$

ce qui était demandé.

3. En déduire que $(n\Delta_n)_{n\ge 1}$ converge et déterminer sa limite.

L'inégalité prouvée à la question 2 (c) implique que

$$-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} M_k \le n\Delta_n \le -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} m_k.$$

Les deux limites calculées à la question 2 (a) permettent alors de conclure (grâce au théorème des gendarmes) que

$$n\Delta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \tfrac{1}{2}\big(f(0)-f(1)\big).$$

4. **Question bonus :** ce dernier résultat (la limite prouvée à la question 3) est-il encore vrai si f n'est pas continue sur $[0,1]$ (tout en restant intégrable au sens de Riemann) ? Et si f est continue sur $[0,1]$, mais pas de classe $\mathscr{C}^1$?

Exercice 2 (Développement asymptotique de la série harmonique)**.** Pour tout $n \ge 1$, on note

$$H_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

1. Montrer que pour tout $k \ge 2$, on a

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\ln\big(\frac{k+1}{k}\big)\le\frac{1}{k}\le\ln\big(\frac{k}{k-1}\big)=\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

En utilisant la décroissance de la fonction $t\mapsto\frac{1}{t}$ sur $[1,+\infty[$, et donc en particulier sur tous les intervalles de la forme $[k-1,k]$ et $[k,k+1]$ ($k\ge 2$), on obtient

$$\frac{1}{t}\le\frac{1}{k},\ \forall t\in[k,k+1] \quad \text{et} \quad \frac{1}{t}\ge\frac{1}{k},\ \forall t\in[k-1,k].$$

En intégrant la première inégalité sur $[k,k+1]$ et la deuxième sur $[k-1,k]$, on obtient

$$\ln\big(\frac{k+1}{k}\big)=\int_k^{k+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\le\frac{1}{k}\le\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\ln\big(\frac{k}{k-1}\big),$$

ce qui est l'inégalité demandée.

2. En déduire que pour tout $n \ge 2$, on a

$$\ln(n+1)=\int_1^{n+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\le H_n\le 1+\int_1^{n}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=1+\ln n.$$

Soit $n \geq 1$. En sommant la double inégalité précédente pour $2 \leq k \leq n$, on obtient grâce à la relation de Chasles

$$\ln(n+1) - \ln 2 = \int_2^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = H_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln n$$

En ajoutant 1 à chacun des termes de la double inégalité ci-dessus, on obtient alors

$$\ln(n+1) \leq \ln(n+1) - \ln 2 + 1 \leq H_n \leq \ln n + 1.$$

L'inégalité de gauche n'est pas vraie si $n = 1$ car $H_1 = 1 \geq \ln 2$, mais l'inégalité de droite est vraie aussi si $n = 1$.

3. Donner un équivalent de H_n lorsque n tend vers l'infini.

   L'encadrement prouvé dans la question précédente permet d'affirmer que pour tout $n \geq 2$, on a

$$1 \underset{\infty \leftarrow n}{\longleftarrow} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \frac{H_n}{\ln n} \leq \frac{\ln n + 1}{\ln n} = 1 + \frac{1}{\ln n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1,$$

   ce qui montre que H_n est équivalent à $\ln n$ lorsque n tend vers l'infini.

4. Montrer que $(H_n - \ln n)_{n \geq 1}$ est une suite positive décroissante. En déduire qu'elle est convergente. On appelle γ sa limite (γ est la constante d'Euler dont les 25 premiers chiffres du développement décimal sont : $\gamma \simeq 0,5772156649015328606065120$.)

   Soit $u_n = H_n - \ln n$, $n \geq 1$. L'inégalité prouvée à la question 2 donne

$$0 \leq \ln\left(1 + \tfrac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n \leq u_n \leq 1, \quad \forall n \geq 2.$$

   Lorsque $n = 1$, on a encore $u_1 = H_1 - \ln 1 = 1 \geq 0$. Ainsi, $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite positive (majorée par 1). Pour tout $n \geq 1$, on a d'autre part

$$u_{n+1} - u_n = (H_{n+1} - \ln(n+1)) - (H_n - \ln n) = \tfrac{1}{n+1} + \ln\left(\tfrac{n}{n+1}\right) = \tfrac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \tfrac{1}{n+1}\right) \leq 0$$

   la dernière inégalité provenant du fait que $\ln(1+u) \leq u$ pour tout $u > -1$ (que l'on applique à $u = -\frac{1}{n+1}$). Ainsi, $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite décroissante. On a vu qu'elle était minorée (par 0). Elle est donc convergente.

5. On voudrait trouver le terme suivant dans le développement asymptotique de la série harmonique, c'est-à-dire trouver un équivalent, lorsque n tend vers l'infini, de $H_n - \ln n - \gamma$. Pour tout $k \geq 1$, on note $\alpha_k = \frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

   (a) Montrer que $\alpha_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$. Trouver un équivalent de α_n lorsque n tend vers l'infini.

   L'inégalité $\ln(1+u) \leq u$ pour tout $u > -1$ appliquée à $u = \frac{1}{n}$ ($n \geq 1$) montre que

$$\alpha_n = \tfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \tfrac{1}{n}\right) \geq 0,$$

   ce qui était demandé. De plus, le développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1+u)$ (donné par $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u)$ avec $\varepsilon(u) \underset{u \to 0}{\longrightarrow} 0$) montre que

$$\alpha_n = \tfrac{1}{2n^2} - \tfrac{1}{n^2}\varepsilon\left(\tfrac{1}{n}\right)$$

   et donc α_n est équivalent à $\frac{1}{2n^2}$ lorsque n tend vers l'infini. On peut en fait montrer que

$$\tfrac{1}{2n^2} - \tfrac{1}{3n^3} \leq \alpha_n \leq \tfrac{1}{2n^2}, \quad \forall n \geq 1.$$

   (b) En déduire que $\sum \alpha_n$ est une série convergente. Montrer que

$$\int_{n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2t^2} - \frac{1}{3t^3}\right)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \leq \int_n^{\infty} \frac{1}{2t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Comme la série de terme général $\frac{1}{2n^2}$ ($n \geq 1$) est convergente (d'après le critère de Riemann), on en déduit que la série de terme général α_n ($n \geq 1$) est convergente (d'après le théorème sur les séries de termes généraux de signe constant équivalents).
En utilisant l'encadrement de α_n donné dans la question précédente, sachant que les fonctions $t \mapsto \frac{1}{2t^2}$ et $t \mapsto \frac{1}{2t^2} - \frac{1}{3t^3}$ sont décroissantes sur $[1, +\infty[$, on obtient grâce à la relation de Chasles

$$\frac{1}{2n} - \frac{5n+3}{6n(n+1)^2} = \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{6(n+1)^2} = \int_{n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2t^2} - \frac{1}{3t^3}\right) \mathrm{d}t \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \leq \int_n^{\infty} \frac{1}{2t^2} \mathrm{d}t = \frac{1}{2n}.$$

(c) En déduire un équivalent de $H_n - \ln n - \gamma$ lorsque n tend vers l'infini.

On remarque que

$$u_{n+1} - u_n = \tfrac{1}{n+1} - \ln\left(\tfrac{n+1}{n}\right) = \alpha_n + \tfrac{1}{n+1} - \tfrac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1$$

et donc, comme $u_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ (ceci a été prouvé à la question 4) et $\frac{1}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$, on a (en sommant d'abord pour $n \leq k \leq N$ puis en faisant tendre N vers l'infini)

$$-u_n = \sum_{k=n}^{\infty} (u_{n+1} - u_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k + \sum_{k=n}^{\infty} \left(\tfrac{1}{k+1} - \tfrac{1}{k}\right) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k - \frac{1}{n},$$

ou encore

$$u_n = \tfrac{1}{n} - \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k, \quad \forall n \geq 1.$$

En utilisant les encadrements trouvés dans les questions précédentes (et en particulier celui de $\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k$), on obtient

$$\tfrac{1}{2n} - \tfrac{1}{2n^2} \leq \tfrac{1}{n} - \alpha_n - \tfrac{1}{2n} \leq u_n \leq \tfrac{1}{n} - \alpha_n - \tfrac{1}{2n} + \tfrac{5n+3}{6n(n+1)^2} \leq \tfrac{1}{2n} - \tfrac{1}{2n^2} + \tfrac{1}{3n^3} + \tfrac{5n+3}{6n(n+1)^2}$$

et donc $u_n = H_n - \ln n - \gamma$ est équivalent, lorsque n tend vers l'infini, à $\frac{1}{2n}$.