DM2 - Calcul intégral

Corrigé

Le but du problème est de trouver la valeur de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$. Pour cela, on utilisera les théorèmes vus en cours sur les intégrales à paramètre (en particulier, le théorème de convergence dominée).

1. Rappeler pourquoi l'intégrale généralisée (en 0 et à l'∞) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

   On sait que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. On peut donc prolonger la fonction $x \mapsto \frac{\sin}{x}$ par continuité en lui donnant la valeur 1 en 0 : soit g cette fonction. La fonction g est alors intégrable sur tout intervalle borné de $[0,\infty[$, donc en particulier sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ (par exemple), et a même valeur que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.
   Il reste à montrer que l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ est convergente. Pour tout $M > \pi$, on a, en intégrant par parties,

   $$\int_{\frac{\pi}{2}}^M \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos x}{x}\right]_{x=\frac{\pi}{2}}^M - \int_{\frac{\pi}{2}}^M \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\cos M}{M} - \int_{\frac{\pi}{2}}^M \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

   Lorsque M tend vers l'infini, le terme $\frac{\cos M}{M}$ tend vers 0. D'autre part, comme $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ pour tout $x \neq 0$ et que par critère de Riemann, l'intégrale de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $[1,\infty[$ est convergente, on en déduit par comparaison que $\int_{\frac{\pi}{2}}^M \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ admet une limite finie lorsque M tend vers l'infini. Ainsi, on vient de montrer que $\int_{\frac{\pi}{2}}^M \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[M\to\infty]{} -\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.
   L'intégrale généralisée $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ est ainsi convergente.

2. Soit $t > 0$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

   Pour tout $t > 0$, on a $\left|e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\right| \leq e^{-tx}$ (car pour tout $x \geq 0$, la fonction g de la question 1 vérifie $|g(x)| \leq 1$) et l'intégrale généralisée de la fonction $x \mapsto e^{-tx}$ sur $[0,\infty[$ est convergente (on peut la calculer facilement puisqu'on connaît une primitive de la fonction à intégrer : elle vaut $\frac{1}{t}$). On en déduit alors que l'intégrale de l'énoncé est absolument convergente pour tout $t > 0$.

3. On définit pour $t \geq 0$ la fonction F par

   $$F(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

   Montrer que F est continue en 0.

   On décompose, comme dans la question 1, l'intégrale en deux :

   $$F_1(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-tx}g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad F_2(t) = \int_{\frac{\pi}{2}}^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

   On voit facilement que F_1 est continue grâce au théorème du cours sur la continuité des intégrales à paramètre : la fonction $(t,x) \mapsto e^{-tx}g(x)$ est continue sur $[0,\infty[\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ comme produit de $(t,x) \mapsto e^{-tx}$ (continue comme produit des deux projections sur les variables t et x et composition avec $u \mapsto e^{-u}$) et $(t,x) \mapsto g(x)$.
   Le traitement de F_2 est plus délicat. La fonction $(t,x) \mapsto e^{-tx}\frac{\sin x}{x}$ ne vérifie pas l'hypothèse de convergence dominée (en tout cas, pas facilement !). On va raisonner comme dans la question 1 en intégrant par parties. À $t > 0$ fixé, une primitive de $h_t : x \mapsto e^{-tx}\sin x$ se calcule assez facilement (par parties ou en remarquant que $e^{-tx}\sin x = \Im m\big(e^{(-t+i)x}\big)$) : la fonction $x \mapsto H_t(x) = -\frac{1}{t^2+1}e^{-tx}(t\sin x + \cos x)$ est bien une primitive de h_t (dans le cas $t = 0$, on retrouve $x \mapsto -\cos x$ comme primitive de $x \mapsto \sin x$). On remarque que $|H_t(x)| \leq \frac{t+1}{t^2+1} \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \geq 0$. D'autre part, la fonction $(t,x) \mapsto \frac{1}{x^2}H_t(x)$ est continue sur $[0,\infty[\times\left[\frac{\pi}{2},\infty\right[$ (comme produits, somme, compositions de fonctions continues).

On a alors pour tout $M > \frac{\pi}{2}$ et tout $t > 0$:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{M} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{M} \frac{1}{x}\,h_t(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{x}\,H_t(x)\right]_{x=\frac{\pi}{2}}^{M} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{M} \frac{1}{x^2}\,H_t(x)\,\mathrm{d}x.$$

Le terme $\left[\frac{1}{x}\,H_t(x)\right]_{x=\frac{\pi}{2}}^{M}$ converge, lorsque M tend vers l'infini, vers $\frac{t}{t^2+1}e^{-t\frac{\pi}{2}}$ (pour le montrer, on utilise le fait que $|H_t|$ est bornée par 1) : la fonction définie par $t \mapsto \frac{t}{t^2+1}e^{-t\frac{\pi}{2}}$ est continue sur $[0,\infty[$. Pour la même raison ($|H_t|$ bornée par 1), la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}\,H_t(x)$ est dominée par $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ dont l'intégrale sur $\left[\frac{\pi}{2},\infty\right[$ converge par le critère de Riemann. On en déduit par le théorème de convergence dominée que la fonction $t \mapsto \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,H_t(x)\,\mathrm{d}x$ est continue sur $[0,\infty[$. Ainsi, F_2 est la somme de deux fonctions continues sur $[0,\infty[$, elle est continue sur $[0,\infty[$, donc en particulier en 0.
En conclusion, $F = F_1 + F_2$ est continue sur $[0,\infty[$ et donc en particulier en 0.

4. Montrer que $F(t)$ admet une limite lorsque t tend vers $+\infty$. Donner cette limite.

En utilisant le fait que $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq 1$ pour tout $x \geq 0$, on a $\left|e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\right| \leq e^{-tx}$ et donc par le théorème de comparaison des intégrales généralisées on obtient

$$|F(t)| \leq \int_0^{\infty} e^{-tx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0,$$

ce qui montre que $F(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini.

5. Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$. Exprimer sa dérivée à l'aide de fonctions usuelles.

On a déjà vu que F était continue sur $[0,\infty[$. D'autre part, on a

$$F(t) = \int_0^{\infty} f(t,x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{avec } f(t,x) = e^{-tx}g(x), \quad (t,x) \in [0,\infty[\times[0,\infty[.$$

La fonction f est continue sur $[0,\infty[\times[0,\infty[$. Elle admet une dérivée partielle par rapport à $t > 0$ qui vaut $(t,x) \mapsto \partial_t f(t,x) = -e^{-tx}\sin x$ qui est continue sur $[0,\infty[\times[0,\infty[$. Pour tout $\delta > 0$, on a $|\partial_t f(t,x)| \leq e^{-\delta x}$ pour tout $t \geq \delta$. La fonction $x \mapsto e^{-\delta x}$ est intégrable sur $[0,\infty[$. Par le théorème de convergence dominée, on en déduit que F est dérivable sur $[\delta,\infty[$ pour tout $\delta > 0$, et donc sur $]0,\infty[$ (la réunion sur tous les $\delta > 0$ des intervalles du type $[\delta,\infty[$ est égale à $]0,\infty[$). Sa dérivée vaut

$$F'(t) = \int_0^{\infty} -e^{-tx}\sin x\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\infty} h_t(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{M\to\infty}\big(H_t(0) - H_t(M)\big) = -\frac{1}{1+t^2}, \quad t > 0,$$

où on a utilisé les fonctions h_t et H_t de la question 3.

6. En déduire une expression de $F(t)$ pour tout $t > 0$.

La fonction F est une primitive de $F' : t \mapsto -\frac{1}{1+t^2}$. Elle vaut donc $F(t) = -\arctan t + c$ où $c \in \mathbb{R}$ est une constante. En utilisant la limite trouvée à la question 4, on a d'une part $F(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ et d'autre part $F(t) = -\arctan t + c \xrightarrow[t\to\infty]{} -\frac{\pi}{2} + c$. On en déduit que $c = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, $F(t) = -\arctan t + \frac{\pi}{2}$ pour tout $t > 0$.

7. Que vaut $F(0)$?

Comme F est continue en 0, on a d'une part $F(t) \xrightarrow[t\to 0]{} F(0)$ et d'autre part $F(t) = -\arctan t + \frac{\pi}{2} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{\pi}{2}$. On en déduit alors que $F(0) = \frac{\pi}{2}$.