Contrôle - Calcul intégral

Corrigé

Exercice 1 (Sommes de Riemann)**.** Donner la valeur des limites lorsque n tend vers l'infini des deux expressions suivantes

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{4n^2-k^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{4n^2-k^2}.$$

Avant tout calcul, on justifiera l'existence de ces limites.

Nous mettons chacune des deux expressions ci-dessus sous la forme

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})f(\xi_k), \qquad x_k=\tfrac{k}{n}\ (k=0,1,\dots,n) \quad \text{et} \quad \xi_k=\tfrac{k}{n}\ (k=1,\dots,n).$$

L'ensemble des points $\{x_k, 0\le k\le n\}$ forme une subdivision (régulière) de l'intervalle $[0,1]$ et $\xi_k=x_k\in[x_{k-1},x_k]$ pour tout $1\le k\le n$.

1. La première expression s'écrit
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{4n^2-k^2} = \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}\Big)f\Big(\frac{k}{n}\Big)$$
avec $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par $f(t)=\frac{1}{4-t^2}$. Cette fonction f est continue sur $[0,1]$ (car inverse d'un polynôme qui ne s'annule pas sur $[0,1]$), donc intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$. Ceci montre que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{4n^2-k^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{1}{4-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac14\int_0^1\Big(\frac{1}{2-t}+\frac{1}{2+t}\Big)\mathrm{d}t=\frac14\Big[\ln\Big|\frac{2+t}{2-t}\Big|\Big]_{t=0}^{1}=\frac{\ln 3}{4}.$$

2. La deuxième expression s'écrit
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{4n^2-k^2} = \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}\Big)g\Big(\frac{k}{n}\Big)$$
avec $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par $g(t)=\frac{t}{4-t^2}$. Cette fonction g est continue sur $[0,1]$ (car produit de f avec l'identité), donc intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$. Ceci montre que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{4n^2-k^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t}{4-t^2}\,\mathrm{d}t=-\frac12\Big[\ln|4-t^2|\Big]_{t=0}^{1}=\frac12\ln\Big(\frac43\Big).$$

Exercice 2 (Intégrale généralisée)**.** Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. On note

$$I_\alpha=\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

1. Pour quel(s) α l'intégrale I_α est-elle convergente ?

L'intégrale est généralisée en 0 et à l'infini. On traite donc chacun de ces deux cas séparément.

en 0 : Au voisinage de 0, on a $\frac{\sin t}{t^\alpha}\sim t^{1-\alpha}$. La fonction $t\mapsto t^{1-\alpha}$ est intégrable au voisinage de 0 si $1-\alpha>-1$ (d'après la comparaison aux intégrales des fonctions de Riemann). Ainsi, on en déduit que la fonction $t\mapsto\frac{\sin t}{t^\alpha}$ est intégrable au voisinage de 0 si, et seulement si, $\alpha<2$.

à l'∞ : Si $\alpha>1$, la fonction $t\mapsto t^{-\alpha}$ admet une intégrale généralisée au voisinage de l'infini. Or on a $\left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right|\le t^{-\alpha}$, ce qui montre que l'intégrale $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Si $\alpha=1$, on a vu en cours (et en DM) que l'intégrale I_1 est convergente (non absolument convergente).

Si $0<\alpha<1$, la même démonstration que pour le cas $\alpha=1$ (intégration par parties) permet de montrer que l'intégrale $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est convergente (non absolument convergente).

Si $\alpha\le 0$ (et donc $-\alpha\ge 0$), pour $n\in\mathbb{N}$, on a (en découpant l'intervalle d'intégration en intervalles de longueur π)

$$\int_0^{(n+1)\pi} t^{-\alpha}\sin t\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}t^{-\alpha}|\sin t|\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$$

où $u_k\ge\frac{\pi}{4}(k\pi)^{-\alpha}$. Ainsi, la série de terme général $\big((-1)^k u_k\big)_{k\ge0}$ n'est pas convergente (car son terme général ne tend pas vers 0, et donc l'intégrale généralisée de $t\mapsto t^{-\alpha}\sin t$ sur $[0,\infty[$ n'est pas convergente.

En conclusion, l'intégrale I_α est convergente si, et seulement si $0<\alpha<2$ (absolument convergente pour $1<\alpha<2$).

2. Soit $1 < \alpha < 2$. On note

$$F_\alpha(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Montrer que $x \mapsto F_\alpha(x)$ est continue et impaire sur $\mathbb{R}$.

D'une part, la fonction $f_\alpha : (t,x) \mapsto \frac{\sin(xt)}{t^\alpha}$ est continue sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}$. Soit $M > 0$ et $x \in [-M,M]$. Pour $1 < \alpha < 2$, on pose $g(t) = Mt^{1-\alpha}$ si $0 < t \leq 1$ et $g(t) = t^{-\alpha}$ si $t > 1$. Cette fonction g est positive et admet une intégrale généralisée finie sur l'intervalle $[0,\infty[$. Comme de plus $|f_\alpha(t,x)| \leq g(t)$ pour tout $x \in [-M,M]$, on en déduit par le théorème de convergence dominée que F_α est continue sur $[-M,M]$. Ceci est vrai pour tout $M > 0$, donc F_α est continue sur la réunion de tous les intervalles du type $[-M,M]$ ($M > 0$), c'est-à-dire sur $\mathbb{R}$.
Il est d'autre part immédiat que $f_\alpha(t,-x) = -f_\alpha(t,x)$, ce qui permet d'affirmet que F_α est impaire.

(b) Donner la valeur de $F_\alpha(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ en fonction de I_α.

Comme F_α est impaire, il suffit de trouver sa valeur sur $[0,\infty[$. Il est immédiat que $F_\alpha(0) = 0$ car $f_\alpha(t,0) = 0$ pour tout $t > 0$. Si $x > 0$, on a, par changement de variables $u = xt$,

$$\int_\varepsilon^A \frac{\sin(xt)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = x^{\alpha-1}\int_{x\varepsilon}^{xA} \frac{\sin u}{u^\alpha}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[\varepsilon\to 0, A\to\infty]{} x^{\alpha-1}F_\alpha(1) = F_\alpha(x).$$

Par imparité de F_α, on déduit la valeur de $F_\alpha(x)$ pour $x < 0$: $F_\alpha(x) = -|x|^{\alpha-1}F_\alpha(1)$.

(c) La fonction F_α est-elle dérivable ?

On vient de trouver l'expression de F_α : $F_\alpha(x) = F_\alpha(1)x^{\alpha-1}$ si $x \geq 0$ et $F_\alpha(x) = -F_\alpha(1)(-x)^{\alpha-1}$ si $x < 0$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Sa dérivée vaut $F'_\alpha(x) = (\alpha-1)|x|^{\alpha-2}F_\alpha(1)$ si $x \neq 0$.

(d) Que peut-on dire de la fonction

$$F_1 : x \longmapsto \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{(domaine de définition, continuité, valeur) ?}$$

Comme pour F_α dans la question précédente, on voit facilement que pour $0 < \varepsilon < A < \infty$ et $x > 0$ (par changement de variables $u = xt$):

$$\int_\varepsilon^A \frac{\sin(xt)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{x\varepsilon}^{xA} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[\varepsilon\to 0, A\to\infty]{} \frac{\pi}{2} = F_1(x), \quad x > 0.$$

Si $x = 0$, on a $F_1(0) = 0$. Enfin, si $x < 0$, on a pour tout $t \in]0,\infty[$ $\frac{\sin(xt)}{t} = -\frac{\sin(-xt)}{t}$ (avec $-x > 0$). On applique alors le résultat pour $y = -x > 0$ trouvé plus haut et on a $F_1(x) = -\frac{\pi}{2}$ si $x < 0$.
La fonction F_1 est donc définie sur $\mathbb{R}$, est continue et dérivable sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,\infty[$ (de dérivée nulle sur chacun de ces intervalles), mais discontinue en 0. Elle vaut $\frac{\pi}{2}$ sur $]0,\infty[$, 0 en 0 et $-\frac{\pi}{2}$ sur $]-\infty,0[$.