Contrôle - Calcul intégral

Jeudi 2 mars 2017

Exercice 1 (Sommes de Riemann)**.** Donner la valeur des limites lorsque n tend vers l'infini des deux expressions suivantes

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{4n^2-k^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{4n^2-k^2}.$$

Avant tout calcul, on justifiera l'existence de ces limites.

Exercice 2 (Intégrale généralisée)**.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note

$$I_\alpha = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

1. Pour quel(s) α l'intégrale I_α est-elle convergente ?
2. Soit $1 < \alpha < 2$. On note
$$F_\alpha(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}.$$
   (a) Montrer que $x \mapsto F_\alpha(x)$ est continue et impaire sur $\mathbb{R}$.
   (b) Donner la valeur de $F_\alpha(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ en fonction de I_α.
   (c) La fonction F_α est-elle dérivable ?
   (d) Que peut-on dire de la fonction
$$F_1 : x \longmapsto \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{(domaine de définition, continuité, valeur) ?}$$